

LA COMPUESTA DE DOS SIMETRÍAS CON EJES SECANTES, ¿ES UNA ROTACIÓN?: UNA REFLEXIÓN DESDE LA TEORÍA LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Károl Lisette Rueda Gómez y Marcela Parraguez González

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Chile

karol_lisette_matematicas@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. La investigación que reportamos, da cuenta de un estudio sobre la comprensión del concepto compuesta de dos simetrías con ejes secantes que se ha instalado sobre docentes en formación, bajo un enfoque cognitivo, donde se utiliza los modos de pensamiento de Anna Sierpinski como marco teórico y, un estudio de casos como diseño metodológico. Este objeto matemático forma parte de los contenidos propuestos en los programas oficiales de Chile, con un marcado énfasis en las técnicas artísticas. Nuestra problemática de investigación se sitúa al abordar este concepto matemático solamente a través de forma práctica y algunos intentos por recurrir a lo analítico. Afirmamos que estas técnicas no son suficientes para lograr una comprensión profunda del concepto, cuando decimos comprensión profunda, estamos pensando que el docente pueda comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes en los modos: *Sintético Geométrico* (Movimiento rígido en el plano), el *Analítico Aritmético* (Transformación isométrica) y el *Analítico Estructural* (Rotación).

Palabras clave: la teoría de los modos de pensamiento, simetría, rotación, composición de funciones

Abstract. | The research we are reporting, gives account to a study on the understanding of the concept composed of two symmetries with intersecting axes that have been taught to teachers in training. The concept focuses on a cognitive approach including Anna Sierpinski's theoretical framework, and case studies on methodological design. The composition of two symmetries with intersecting axes were found immersed within the subjects of isometric transformations, those of which form part of the content in the official Chilean programs with a strong emphasis on technical or artistic practices. Our research is centered around the mathematical concept only through the practical form and some intentions to reoccur analytically. We confirm that these techniques are insufficient to achieve a profound understanding of the concept. When we say profound understanding, we believe teachers can understand the composition of two symmetries with intersecting axes in the following ways: *Synthetic Geometry* (Rigid movement in the plane), *Analytic Arithmetic* (Isometric transformation) and *Analytical Structure* (Rotation).

Key words: the theory of the thought modes, symmetry, rotation, composition of functions

Introducción

El término transformación isométrica o isometría, está asociado a la transformación de una figura (o un cuerpo geométrico) que conserva su forma, dimensiones y ángulos, cuya clasificación se derivada del concepto transformación geométrica, el cual está estrechamente ligado al álgebra lineal. Por alguna razón este hecho ha sido ignorado en los programas de estudio de MINEDUC 1998, asociando el contenido solo a representaciones artísticas, sin profundizar en su trasfondo conceptual y su gran cantidad de aplicaciones. Las isometrías fueron introducidas en los programas de estudio chileno de matemática de 1998 como la unidad Transformaciones Isométricas, ubicada en el nivel de primero medio (MINEDUC, 1998). En ese entonces se planteaba como objetivo que los estudiantes debían caracterizar la traslación, simetría y rotación de figuras en un plano, diseñar composiciones sencillas que incorporan traslaciones, simetrías y rotaciones, y reconocer simetrías, rotaciones y traslaciones en la naturaleza y en obras de arte tales como las de M.C.Escher, lo que claramente asociaba el contenido con la asignatura de Artes Visuales, pero no con otro ámbito de la propia disciplina.

En el actual Marco Curricular chileno (MINEDUC, 2009), en el nivel 1° año medio, dos de los objetivos fundamentales son referentes a este objeto matemático, los cuales indican que los alumnos sean capaces de:

- ❖ Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas. (MINEDUC, 2009, p.180). Este objetivo fundamental es además un objetivo fundamental transversal (OFT) el cual indica que la enseñanza de este objeto matemático debe centrarse en: Comprender y valorar la perseverancia, el rigor y el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad (MINEDUC, 2009, p.180).
- ❖ Comprender los conceptos y propiedades de la composición de funciones y utilizarlos para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas (MINEDUC, 2009, p.180).

Estos dos objetivos fundamentales están inmersos en el eje de Geometría y en el eje de Álgebra en los siguientes contenidos mínimos obligatorios:

Geometría:

- ❖ Formulación de conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de traslaciones, reflexiones y rotaciones sobre figuras geométricas en el plano cartesiano y verificación, en casos particulares, de dichas conjeturas mediante el uso de un procesador geométrico o manualmente.
- ❖ Relación del concepto de congruencia de figuras planas con las transformaciones isométricas; formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de criterios de congruencia en triángulos; y, utilización de estos criterios en la resolución de problemas y en la demostración de propiedades en polígonos.

Álgebra:

- ❖ Estudio de la composición de funciones, análisis de sus propiedades y aplicación a las transformaciones isométricas.

Según lo propuesto por el curriculum, en este nivel los estudiantes deben aprender el concepto desde un enfoque visual, algebraico y sistémico donde predomina la geometría sintética, la geometría analítica y el reconocimiento de invariantes que caracteriza a cada transformación isométrica y las composiciones que se establezcan entre ellas

Problemática de investigación y objetivos

El objetivo planteado en el nivel de 1° año medio, esto es, que los alumnos sean capaces de “Comprender los conceptos y propiedades de la composición de funciones y utilizarlos para

resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas” (MINEDUC, 2009, p.180) no ha sido alcanzado según los antecedentes de investigación.

A partir de lo expuesto, surge la siguiente pregunta de investigación. El concepto de composición de de simetrías con ejes secantes que prevalece en los docentes de matemática que imparten la asignatura en estos niveles ¿permite movilizar este objeto matemático, entre sus diferentes definiciones: cómo movimiento rígido, cómo transformación isométrica o cómo Rotación?

Objetivo general de investigación

Ofrecer un conjunto de sugerencias didácticas basadas en nuestra investigación para la enseñanza del concepto compuesta de dos simetrías con ejes secantes.

Objetivos específicos:

1. Indagar en los modos de comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes que prevalecen en los docentes de matemáticas, y explorar si estos modos permiten movilizar este objeto matemático en sus distintas definiciones.
2. Indagar en los elementos de la matemática que propician el tránsito entre las distintas definiciones de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes: cómo movimiento rígido, cómo transformación isométrica y cómo una rotación.

Marco teórico

Los Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000), es una teoría que nace en el seno del álgebra lineal, con la intención de hacer más explícito el pensar teóricamente los conceptos que la componen, proponiendo para ello tres modos de pensamiento, que se pueden reportar desde el desarrollo histórico epistemológico del álgebra lineal y que están presentes en otros conceptos matemáticos hoy en día:

- ❖ El modo de pensamiento sintético-geométrico (SG) los objetos son pensados en su forma más intuitiva, por ejemplo cuando se piensa la composición de dos simetrías como un movimientrígido, (figura 1).
- ❖ En el modo de pensamiento analítico-aritmético (AA) los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas. Por ejemplo, las figuras son pensadas como un conjunto de pares ordenados (x, y) , los ejes de simetría como ecuaciones generales de las rectas $y = mx + b$ y las imágenes simétricas son pares ordenados (x_o, y_o) que cumplen condiciones establecidas, (figura 1).
- ❖ En el modo analítico–estructural (AE) los objetos son pensados a través de las propiedades que estos poseen o los axiomas que permiten explicarlos, (figura 1).

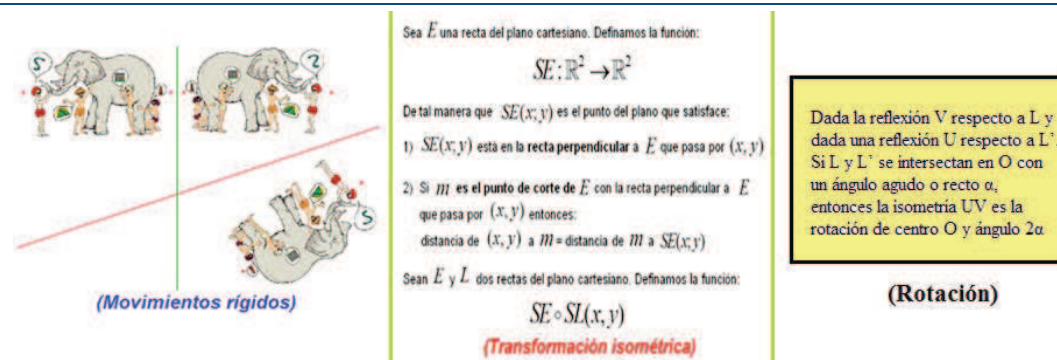


Figura 1. Muestra los tres modos de pensar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes.

Cada uno de los modos de pensamiento permite una mirada diferente del objeto matemático, lo cual conduce a distintas comprensiones del mismo; cada uno de ellos no constituyen etapas en el desarrollo del pensamiento algebraico, sino que por el contrario, son igualmente útiles, cada uno en su propio contexto, para propósitos específicos y sobre todo cuando están interactuando.

Metodología de investigación

Se considera un estudio de casos como diseño metodológico (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992).

Caso 1: Un estudio exploratorio realizado a 56 estudiantes de buen rendimiento de la escuela de desarrollo de talentos, Universidad de Chile, facultad de Economía y Negocios. En el presente año (2013) cursan tercer año de enseñanza Media. Este grupo de informantes pertenece a distintos establecimientos de la Región Metropolitana, los cuáles fueron seleccionados por la universidad debido a su excelente rendimiento académico. A ellos se tuvo acceso, ya que uno de los autores que suscribe este documento laboraba como ayudante de geometría para la Escuela de desarrollo de Talentos. Se evidenció la existencia de un obstáculo didáctico en la enseñanza de este objeto matemático, a partir de los resultados obtenidos en la implementación del cuestionario exploratorio.

Caso2: Este caso de estudio lo conforman 14 docentes de matemática de Chile, que cursan estudios de Maestría en didáctica de la matemática. Elegimos estos docentes porque consideramos importante evidenciar los modos de comprender la simetría con ejes secantes que predominan en los docentes de matemática, las posibles conexiones que logran establecer entre los distintos modos y los elementos de la matemática que ponen en juego. Además, son los informantes adecuados para establecer si la falta de una comprensión estructural de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes en los estudiantes, se debe o no a un obstáculo didáctico.

Resultados de la investigación

Los resultados de investigación se derivan de aplicar cuestionarios a los casos de estudios. A modo de ejemplo presentamos lo acontecido con una pregunta del cuestionario para cada caso de estudio.

El **caso 1** es evidencia empírica que sustenta la problemática de investigación planteada. Es decir, los estudiantes no logran comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde sus propiedades como lo proponen los planes y programas de estudio. Los estudiantes logran realizar la composición de dos simetrías con ejes secantes y la rotación de un punto respecto a otro (actividad 1 y 2 del exploratorio), pero al momento de establecer relaciones entre estos dos conceptos (actividad 3) no logran comprender de forma estructural lo que sucede, es decir, no ponen de manifiesto las propiedades que definen el comportamiento de dos simetrías con ejes secantes y su relación directa con el concepto de rotación. Por ejemplo en la actividad 3 del cuestionario: exploratorio; uno de los 56 estudiantes responde lo que muestra la figura 2.

Actividad 3 ¿Qué relación hay entre la actividad 1 y la actividad 2? ¿Por qué?

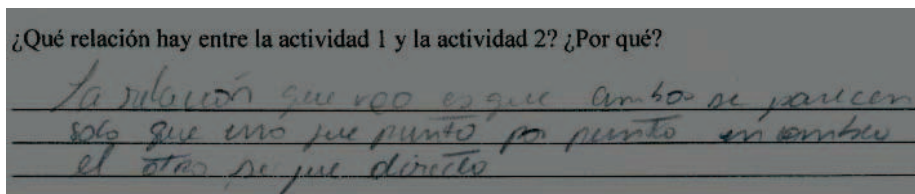


Figura 2. Respuesta de estudiante 1, actividad 3 del cuestionario exploratorio.

El **caso 2** muestra que en general los docentes de matemática tienen un dominio en cuanto a la comprensión de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde un SG, es decir, se les facilita determinar gráficamente el simétrico de un punto o una figura a través de la composición de dos simetrías con ejes secantes, sin embargo, en cuanto al modo de pensar AE, los docentes en general muestran grandes dificultades en su comprensión, puesto que al plantearles una actividad en el modo AE, como por ejemplo la actividad 4 del cuestionario aplicado a docentes de matemática, no son capaces de recurrir a las propiedades que definen a la composición de dos simetrías con ejes secantes para resolverla (figura 3).

Actividad 4: Sea A un punto y P el punto de intersección de dos ejes de simetría. La medida del ángulo formado entre los ejes de simetría es 30° (en sentido horario). Sea B el simétrico de A respecto al primer eje, y sea C el simétrico de B respecto al segundo eje. Teniendo en cuenta que ninguno de los puntos A , B y C están contenidos en los ejes de simetría. Hallar los ejes de simetría y hallar los puntos B y C .

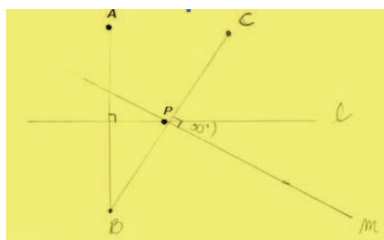


Figura 3. Respuesta informante 19, actividad 4 cuestionario aplicado a docentes de matemática.

En los docentes que desarrollaron el cuestionario, con frecuencia se evidenció el siguiente error: no reconocen los invariantes de la composición en sí (distancia, punto de intersección de los ejes y el ángulo comprendido entre ellos), sino que recurren a los invariantes de la simetría (distancia, punto medio, perpendicularidad), como se muestra en la figura 4.

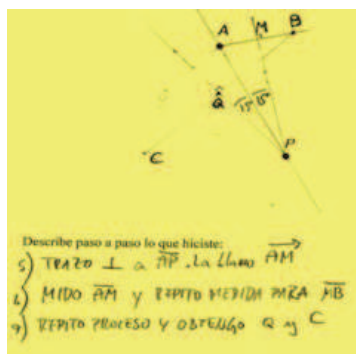


Figura 4. Respuesta informante 111, actividad 4 cuestionario aplicado a docentes de matemática.

Sugerencias didácticas

A partir de los resultados obtenidos en nuestra investigación, entregamos un conjunto de sugerencias didácticas para el aprendizaje del concepto composición de dos simetrías con ejes secantes.

Iniciar la enseñanza con actividades donde los estudiantes transiten entre los modos SG-AE, para ello recomendamos que el aprendiz inicialmente realice la composición de un punto en el espacio respecto a ejes secantes, ya que, les permite enfocarse en los invariantes que prevalecen respecto al punto de intersección de los ejes, y además, en el orden que se debe respetar al componer funciones.

Posterior a ello, se recomienda diseñar actividades que propicien un modo de pensar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde el modo AA, tomando inicialmente como ejes de simetría el eje X, el eje Y, la recta $Y = X$, pero a su vez, potenciar actividades donde los ejes de simetría puedan ser cualquier recta en el plano cartesiano, con el fin de dar otra mirada al objeto matemático y a su vez relacionarlo con diferentes contenidos analíticos, tales como: función, rectas perpendiculares, punto medio, distancia entre dos puntos, punto de intersección, los cuales se ven

reducidos a la **visualización** cuando se trabaja tomando **únicamente** como referencia a los ejes de simetría el eje x y el eje y o la recta $y = x$. Paralelo a ello, es recomendable fomentar la articulación entre los modos AA y SG.

Luego de ello, se sugiere plantear actividades que propicien las conexiones entre los modos SG-AE en el plano cartesiano, con los elementos propios de la geometría analítica. Para ello se recomienda trabajar inicialmente la composición de un par ordenado (x, y) respecto a rectas secantes, por las razones especificadas en el primer párrafo. El objetivo de establecer estas conexiones entre los modos SG-AE y AA es escudriñar otra forma de comprender este objeto matemático y lograr una comprensión profunda con la articulación de los tres modos. Por otra parte, el tratamiento analítico **no** convencional que propone esta investigación sobre el concepto de composición de dos simetrías con ejes secantes permite actividades que propicien el tránsito del modo AE al AA sistematizar este objeto matemático con conceptos tales como: distancia, ángulos, triángulos, circunferencia, relaciones trigonométricas, ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Conclusiones teóricas y reflexiones finales

Al inicio de nuestra investigación nos planteamos las siguientes interrogantes, dos interrogantes.

En relación a la primera interrogante, evidenciamos que los docentes comprenden la compuesta de dos simetrías con ejes secantes como un caso particular de simetría, es decir desde las propiedades exclusivamente de la simetría axial, sin tener en cuenta el vínculo que guarda este objeto matemático con el concepto de rotación. Por lo cual, los datos de la investigación dan cuenta de las grandes dificultades que presentan los docentes en transitar desde el modo AE al modo SG, así mismo, transitar desde el modo AE al modo AA. Según estos resultados, argumentamos que el concepto de composición de dos simetrías con ejes secantes que prevalece en los docentes de matemática no permite movilizar este objeto matemático entre sus diferentes definiciones, en consecuencia, los docentes no poseen una comprensión profunda de este objeto matemático, por ende los estudiantes tampoco la tienen.

En relación a la segunda interrogante, planteamos que los elementos de la matemática que promueven el tránsito entre los modos de comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes obedecen principalmente a estructuras, como se explica a continuación: Para transitar de SG a AE, se requiere de la comprensión de la definición de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes como una rotación. Desde AE-SG, los conectan los invariantes de distancia y ángulo respecto al punto de intersección de los ejes de simetría. Desde SG - AA partir de los invariantes que se dan entre un punto y su simétrico. Desde AA – SG necesitamos de conceptos vistos de

forma analítica, tales como: ecuación de la recta, rectas perpendiculares, punto de intersección, punto medio, distancia entre dos puntos, y desarrollo algorítmicos de sistemas de ecuaciones. Desde AE - AA requerimos de conceptos como: distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, ángulos, triángulos, ecuación de la circunferencia, relaciones trigonométricas, ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Referencias bibliográficas

Arnal, J., Del Rincón, D., y Latorre, A. (2003). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Labor.

Ministerio de educación, Unidad de curriculum y evaluación (1998). *Matemática. Programa de Estudio Primer Año Medio*. Ministerio de educación. Chile.

Ministerio de educación, Unidad de curriculum y evaluación (2009). *Matemática. Programa de estudio Primer Año Medio*. Ministerio de educación. Chile.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L.Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 209-246.