PV APLICADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VARIACIÓN

Segundo Javier Caicedo Zambrano y Leonora Díaz Moreno
Universidad de Nariño Colombia
Universidad de Los Lagos Chile
Jacaza1@gmail.com, leonora.diaz@ulagos.cl

Resumen. Se reporta cómo los estudiantes utilizan la regla de tres y la reducción a la unidad como herramientas para predecir desde una tabla de valores respecto de una situación de variación lineal y no aplican la razón promedio de cambio. Además, se muestra cómo los estudiantes consideran a la tabla, a la gráfica cartesiana y a las expresiones algebraicas como medios para presentar información y no como entidades para argumentar y predecir, es decir, no se consideran como modelos matemáticos.
Palabras clave: Pensamiento variacional, representaciones semióticas
Abstract. It reports how students use the rule of three and the reduction to unity, as tools to predict from a table of values with respect to a linear variation situation, rather than applying the average rate of change. It also shows how students consider the table, and Cartesian graph algebraic expressions as a means for presenting information and not as entities to argue and predict, i.e. not considered as mathematical models.
Key words: Thought variational, Semiotic representations

Introducción

Los hallazgos que se presentan forman parte de una investigación más amplia que indaga acerca del Pensamiento Variacional –PV– que aplican estudiantes de grado noveno de educación básica (en Colombia, la educación básica y media tiene la siguiente organización: un grado de preescolar, cinco de básica primaria, cuatro de básica secundaria y dos grados de educación media) cuando resuelven problemas que se pueden modelar con una función cuadrática. Asumimos que un modelo es un ente para la intervención en otro; es una herramienta, es algo utilizado para comprender e intervenir en lo modelado (Arrieta, 2003). La técnica que utilizamos para recoger y/o producir datos es la *entrevista basada en tareas* (Davis, 1984). De las producciones de los estudiantes, se destaca como herramientas de predicción, la aplicación de la regla de tres y la reducción a la unidad; no utilizan la razón promedio de cambio, herramienta apropiada para predecir en cualquier situación de variación cuantitativa. Asimismo en las producciones estudiantiles se constata que predomina un trabajo algorítmico (mecánico) de los estudiantes.

Marco teórico

Concebimos al conocimiento matemático como una construcción social a diferencia de quienes lo conciben como un proceso interno e individual, donde se establece un diálogo sólo entre sujeto y objeto de conocimiento. Suscribimos la concepción de que "cualquier conocimiento se genera en un contexto social y culturalmente organizado" (Arrieta, 2003, p.39). En relación con el PV adscribimos a lo que plantea Vasco (2006) en el sentido que "las leyes entendidas como fórmulas para reemplazar valores en ellas, obstaculizan el PV, que primero trata de captar qué varía, con qué y cómo, antes de describir nada y, muchos menos, antes de memorizar fórmulas. Tampoco se trata de dibujar las gráficas. Al contrario, las gráficas cartesianas paralizan la covariación y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica" (p. 138).

En el mismo sentido, compartimos que, para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, se requiere de un universo de formas gráficas, extenso y rico en significados para el que aprende (Cantoral y Farfán, 1998; Farfán, 2005); de modo que el conocimiento superficial de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias que se esperan en los cursos de análisis (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral y Montiel, 2001; Farfán, 2005) área de la matemática en la que, esencialmente, se estudia la variación.

Representaciones semióticas

En este documento se operacionaliza la noción de representación desde los desarrollos de Castro y Castro (1997), Rico (2009), Caicedo (2013), es decir, se considera a las representaciones como herramientas que hacen presentes conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales se aborda e interactúa con el conocimiento matemático, independiente de fenómenos a los que puedan modelar. Se conjetura que se piensa y se razona sobre ideas matemáticas con base en representaciones internas de las mismas, operando las personas con tales representaciones. Asimismo que se comunican estas ideas representándolas externamente (Castro & Castro, 1997, p. 101) en ausencia de la actividad de modelar.

Para Duval, citado en Castro y Castro (1997) las representaciones internas se efectúan como una interiorización de las representaciones externas, donde la diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y, por consiguiente, su capacidad de pensamiento sobre ese objeto o concepto representado. De manera recíproca, por medio de las representaciones externas tales como los enunciados en lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones de conceptos matemáticos haciéndolos accesibles a los demás.

Así pues, las representaciones externas tienen una doble función; por una parte, actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales; y por otra, permiten la expresión de conceptos e ideas en los sujetos que las utilizan (Castro & Castro, 1997, p. 101). Dependiendo del tipo de símbolos, gráficos o notaciones con los que un estudiante interactúe en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático, se producirán representaciones internas del mismo, y las herramientas que un sujeto utilice para representar externamente un concepto serán *indicios* de, generalmente, cuál es la información que posee sobre ese concepto. Las representaciones externas pueden contribuir significativamente al aprendizaje si se promueve el tratamiento y la conversión de registros de representación en el dominio de la actividad matemática en sí.

Ahora bien, cada uno de los modos distintos de representar un mismo concepto matemático proporciona una caracterización diferente de dicho concepto; "no hay un único sistema capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto matemático encierra" (Castro & Castro, 1997, p.103). Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada uno de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades. Para el caso particular de la resolución de problemas, "se necesita tener la posibilidad de cambiar de una representación a otra, cuando la otra sea más eficiente para el nuevo paso que queremos tomar" (Dreyfus, 1991, citado en Villegas, García & Castro, 2005, p. 232).

Modelo, Modelación y Modelización Matemática

a) Modelo: Con base en la clasificación de perspectivas de modelación de Kaiser y Sriraman (2006), presentamos tres concepciones de modelo, así:

1) **Perspectiva de Modelo Cognitivo:** Un modelo es una esquematización abstracta de la realidad, entendiendo que esta realidad, bien puede pertenecer al mundo de los fenómenos o al de los conceptos. Esto hace que sean poderosos instrumentos conceptuales, que permiten a los sujetos alcanzar y representar múltiples relaciones y estructuras que se presentan en la realidad, las cuales, dada su complejidad, no son comprensibles y manejables en muchas ocasiones fuera del modelo (Castro & Castro, 1997, p.106). Es una representación conceptual, simbólica, y por tanto, indirecta de la realidad, que al ser necesariamente esquemática se convierte en una representación parcial y selectiva de aspectos de esa realidad. Por tanto, no existe modelo que pueda agotar de forma absoluta y definitiva la interpretación de la realidad (Rico, Castro & Coriat, 1997).

2) **Perspectiva de Modelo Realista:** Un modelo es un ente para la intervención en otro; es una herramienta, es algo utilizado para comprender e intervenir en lo modelado (Arrieta, 2003); es decir, un modelo es una representación que permite argumentar y predecir; por lo cual, la manipulación del modelo nos permite entender y predecir un fenómeno, así como validar hipótesis y elaborar estrategias para la intervención.

3) Perspectiva de Modelo Educacional: Un modelo matemático es una estructura matemática que aproxima o describe ciertas relaciones de un hecho o fenómeno (Castro & Castro, 1997, p.107); "…es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el fenómeno en cuestión" (Hein & Biembengut, 2006, p. 2), pero que, a diferencia de cualquier representación, tiene la cualidad de servir de soporte para explicar y predecir.

b) Modelación y Modelización: el paso entre una situación real hacia la construcción de un modelo matemático se denomina *Modelación* (Blum & Niss, 1991, p.115) y al proceso implicado en la obtención de un modelo matemático se llama *Modelización Matemática* (Hein & Biembengut, 2006, p. 2). La *modelación matemática* es fundamentalmente una forma de la solución de problemas de la vida real; pero no es una forma cualquiera, sino que conlleva la consideración del problema como un todo (Castro & Castro, 1997, p.110). La modelación se puede hacer de formas diferentes, cada una simplifica la situación y selecciona una manera de representarla mentalmente, gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, con el fin de formular y resolver los problemas relacionados con ella. Un buen modelo permite buscar distintos caminos de solución, obtener una solución aproximada o darse cuenta si es plausible y significativa la encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos.

c) Una perspectiva de modelación desde la socioepistemología**.** Los autores Arrieta y Díaz (2014) conciben a la modelación desde su marco socioepistemológico como la articulación de dos entidades, para actuar sobre una de ellos a partir de la otra. Condición necesaria es que en una red de tales entidades, una de ellas sea un fenómeno. Por ejemplo el fenómeno puede ser para el cardiólogo el funcionamiento del corazón de su paciente. Constituye al electro en modelo cuando prescribe al paciente un tratamiento que impacte benéficamente su corazón desde el registro de su actividad eléctrica que "lee" en el electro. En la actividad matemática escolar un fenómeno puede ser la elasticidad de un resorte y entidades pueden ser tablas numéricas, figuras gráficas, expresiones algebraicas. El cardiólogo interviene el corazón de su paciente (lo modelado) a partir de su electro (el modelo). En este movimiento el cardiólogo modela. Los estudiantes predicen la elongación del resorte (lo modelado, la elasticidad del resorte) desde una tabla numérica (el modelo). En este movimiento los estudiantes modelan.

Pensamiento variacional

El Pensamiento Variacional se lo concibe a la manera de Caicedo y Díaz (2011) y Caicedo (2013) es decir, como un tipo de pensamiento matemático que está dirigido al análisis de las relaciones de covariación de un sistema, de una situación o de un fenómeno en general. Está orientado a reconocer qué, cómo y cuánto cambia un sistema, situación o fenómeno, con el fin de lograr su comprensión, descripción, representación en distintos sistemas o registros simbólicos y/o su modelación desde una perspectiva socioepistemológica. Por tanto, adscribimos a la concepción de Vasco (2006) respecto de que "las leyes entendidas como fórmulas para reemplazar valores en ellas, obstaculizan el PV, que primero trata de captar qué varía, con qué y cómo, antes de describir nada y, muchos menos, antes de memorizar fórmulas” (p. 138). Asimismo, coincidimos que tampoco se trata de dibujar gráficas solamente, pues, las gráficas cartesianas, en sí mismas, paralizan la covariación y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica.

Descripción de la experiencia

Se presentó una tabla de datos a un grupo de estudiantes de grado noveno de educación básica, cuyos datos (hipotéticos) se obtuvieron al medir el estiramiento de un resorte al poner pesas de 20gr, consecutivamente, en un portapesas de un sistema masa-resorte (Arrieta, 2003). La tabla muestra las posiciones del portapesas para los pesos respectivos. Entre las preguntas, se planteó la determinación de la posición del portapesas dado un peso y viceversa; la obtención de la gráfica cartesiana y de la expresión algebraica que modele los datos de la tabla. Parte del análisis consiste en el estudio de las producciones de los estudiantes en la perspectiva de reconocer qué herramientas de predicción utilizaron.

Análisis

En la Tabla 1 se muestran los datos del problema que resolvieron los estudiantes. En este documento nos centramos en las preguntas y respuestas de los estudiantes que utilizan la regla de tres y el método de reducción a la unidad, en los casos que se pide obtener la posición correspondiente para un peso que no está registrado en la Tabla 1 (predicción); asimismo, analizamos los casos en donde, al parecer, es posible conjeturar que la falta de reconocimiento del tipo de variación en la tabla de datos, contribuye a que se acepten gráficas incompletas y/o no se pueda determinar la expresión algebraica que modele los datos de la Tabla 1.

Tabla 1 Pesos y Posición del Portapesas en un sistema masa-resorte (Datos sin ruido)

Peso (*gr*)	Posición (del portapesas en *mm*)	Diferencias de la posición (del portapesas en *mm*)
0	5	-
20	35	30
40	65	30
60	95	30
80	125	

La figura 1 muestra el caso en el que un estudiante utiliza la regla de tres para determinar (predecir) la posición que le corresponde al portapesas, para un peso de 50gr. La Tabla 1 no registra el peso de 50gr, pero sí los pesos de 40gr y 60gr con los cuales el estudiante plantea una regla de tres. El estudiante obtiene que, para un peso de 50gr, la posición del portapesas es de 81.25 mm; sin embargo, considerando que se trata de un problema de variación lineal, en donde la razón promedio de cambio es una constante, a través de su aplicación se obtiene el valor de 80mm, que en este caso, corresponde al valor correcto debido al patrón lineal de variación.

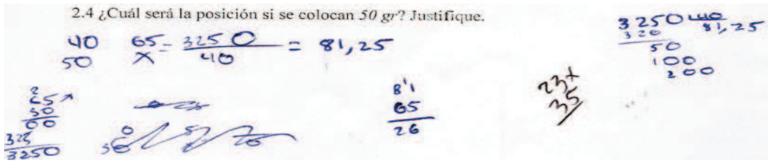

Figura 1 Utilización de regla de tres en lugar de aplicar razón promedio de cambio.

El Cuadro 1 indica un proceder de cálculo de posición con la razón promedio de cambio.

Cuadro 1 Cálculo de la posición del portapesas aplicando la razón promedio de cambio

R/ Según los datos de la tabla, no se conoce la posición del portapesas para 50 gr, sin embargo, dado que 50 gr pertenece al intervalo [40,60], y la tabla presenta la posición para 40 gr y 60 gr, entonces, es posible determinar su posición, cuyo valor debe pertenecer al intervalo [65,95]. En efecto, esta posición se la puede calcular a partir de la razón promedio de cambio de la posición respecto al peso, para pesos entre *40* y *60 gr*. En la Tabla 1 se observa que la posición del portapesas cuando el peso es de *40 gr* es de *65 mm* y para *60 gr* es de *95 mm*. Así que la razón promedio del cambio de posición (*rpc*) por gramo de peso, para los pesos que varían en el intervalo *[40, 60]*, es: *rpc = (95 – 65)/ (60 – 40)=1.5*. En las columnas *Pesos* y *Diferencias de posición* de la Tabla 1, se observa que los pesos aumentan de 20gr en 20 gr, y las diferencias son constantes, por lo cual, la relación matemática entre el peso y la posición del portapesas se puede modelar con una función lineal. Así pues, la posición del portapesas para un peso de *50 gr*, es igual a la posición que corresponde al peso de *40 gr* más la *rpc* multiplicada por el incremento del nuevo peso respecto al peso de *40 gr*; o sea se multiplica por 10; esto es: *65+rpc*(50-40)= 65+1.5*10=80 mm*. Por lo tanto, la posición del portapesas para un peso de *50 gr* es de *80 mm*

Si no se reconoce el tipo de variación de los datos en una representación tabular, entonces queda reducida su utilidad como recurso para la representación gráfica y para la obtención de la expresión algebraica; pues, se pierde información que sirve de base para dichas representaciones y para el control y evaluación de las mismas. Por ejemplo, la gráfica que se presenta en la figura 2, pudo haber sido completada si el estudiante, basado en el hecho de que los datos de la Tabla 1 tienen variación lineal, tal como se precisó en el Cuadro 1, reconociera que la gráfica debe ser una recta. El estudiante no ve la necesidad de unir los pares ordenados que ubica (Ver figura 2). De modo que, parece plausible afirmar que el estudiante no reconoce un modelo de covariación lineal en los datos de la Tabla 1; ya que, de reconocerlo, uniría con segmentos los pares ordenados.

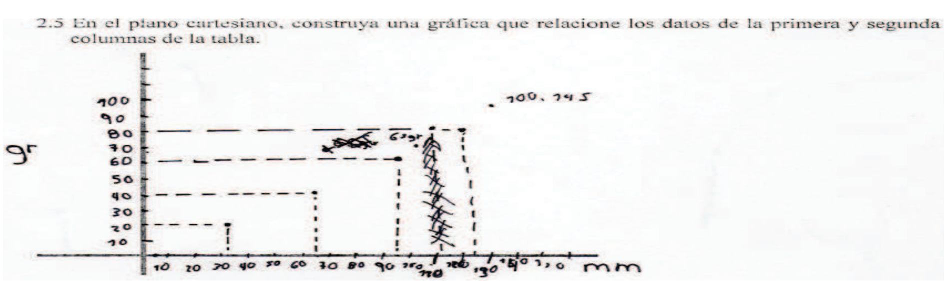

Figura 2 Representación gráfica no apropiada para una situación de variación lineal. El estudiante ubica pares ordenados pero no completa el trazado (Fuente: Cuestionario del estudiante de código 12-9120).

En la figura 3, se observa que el estudiante inicia la representación algebraica con la ecuación $nx^2+5=35$ y determina la expresión $3/40\ x^2+5=y$. Este error se pudo haber omitido si, inicialmente, basado en la variación lineal de los datos de la Tabla 1, hubiera reconocido que la ecuación tiene que ser lineal y de la forma $y=mx+n$. De modo que, parece posible afirmar que, en este caso, ni la Tabla 1 ni la gráfica de la figura 2 se reconocen como modelos de los datos, pues, no permiten predecir el tipo de ecuación que los modela; por lo cual, sólo se quedan a nivel de representación, y no como un recurso con los cuales argumentar y predecir; pues, adscribimos al hecho que una representación simbólica se constituye en un modelo en el momento en que no sólo *evoca* una realidad sino que permite leer, interpretar, explicar y predecir esa realidad.

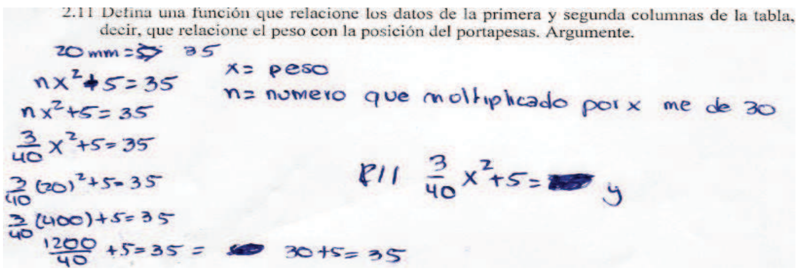

Figura 9: Expresión algebraica no apropiada para una situación de variación lineal (Fuente: Cuestionario del estudiante de código 12-9729)

En términos generales, se encuentra falta de coordinación entre las representaciones tabular, cartesiana y algebraica, lo cual incide para que una de ellas no sea tomada como un referente para otra. Asimismo no se articulan con el fenómeno el que parece invisibilizarse, es decir, no se constituyen modelos. Esto se pone en evidencia, en el hecho en que las respuestas que obtienen con una representación no son motivo de análisis ni de discusión, simplemente se aceptan, tal como sucede con el estudiante de la Figura , quien no considera la variación lineal de los datos de la tabla, pues, sólo la toma como una disposición de pares ordenados. Así pues, los estudiantes tienen dificultad para realizar conversión de representaciones matemáticas (tabular, gráfica cartesiana, expresión algebraica), quizá, una forma de contribuir a la solución sea reconocer cada representación como un modelo de datos, iniciando con la representación tabular, donde se analice el tipo de variación de las variables con el fin de reconocer regularidades en sus valores que soporten la caracterización de la variación (lineal, cuadrática,…). Enfatizar la articulación con el fenómeno es una alternativa de acción didáctica abierta para ulteriores aplicaciones.

Conclusiones

Se encontró que los estudiantes no reconocen la variación lineal en una tabla de valores; que la tabla de valores, la gráfica cartesiana y las expresiones algebraicas no se constituyen en modelos por lo que no se usan para argumentar ni predecir respecto de un fenómeno. Sólo se tratan como medios para presentar datos. Articular con el fenómeno resta como acción didáctica pendiente. Desde la perspectiva de registros semióticos, la tabla de datos no es un referente ni para la gráfica cartesiana ni para la expresión algebraica correspondiente; tampoco se reconoce que apliquen la conversión de representaciones. Se estaría frente a lo que Vasco (2006) identifica con lo que no es Pensamiento Variacional, a saber, que las expresiones algebraicas se traten como fórmulas y no se levante una reflexión sobre la covariación que ellas pueden significar.

Referencias bibliográficas

Arrieta J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav–IPN. México.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2014). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. Aceptado en Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction. Educational Studies. *Mathematics 22*(1), 37–68.

Caicedo, S.J. & Díaz, L. (2011). Pensamiento variacional y sentencias e igualdades numéricas aditivas. *Revista UNIMAR*, 58, 98-105. Versión electrónica en http://asis.umariana.edu.co /RevistaUnimar/publicaciones/RevistaUnimar58.html#/98/

Caicedo, S.J. (2013). *Pensamiento variacional de estudiantes de grado noveno de educación básica aplicado en el proceso de resolución de situaciones problema que se pueden modelar con una función cuadrática.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon – Edición especial: Primer lugar del Premio Internacional de Investigación y de Renovación Pedagógica en Educación Matemática: Thales – San Fernando, España, 42*, 353 – 369.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y pensamiento matemático. México: Pearson Educación.

Castro E. & Castro E. (1997). Representaciones y modelización. En R. Luis (Coord), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra, M. Socas (Eds.). *La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive Science approach to mathematics education*. Tercera reimpresión, 1990. USA, N. Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Dreyfus, T (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Univalle: Instituto de educación y pedagogía.

Farfán, R. M. (2005). Lenguaje algebraico y pensamiento funcional. En R. Cantoral, R. M. Farfán, F. Cordero, J. A. Alanis, R. A. Rodríguez & A.Garza (Eds.). *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 89-144). México: Trillas.

Hein N. & Biembengut, M (2006). *Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas*. En M. Murillo (presidente), Memorias del V festival internacional de matemática. pp. 125 Puntarenas: Colegio universitario de Puntarenas.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of internacional perspectives on modelling in mathematics education. *Analyses ZDM*, Vol. 38 (3).

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rico, L., Castro, E. & Coriat, M. (1997). Revisión teórica sobre la noción de currículo. En L. Rico (Ed.). *Bases teóricas del currículo educación secundaria* (pp.77-150). Madrid: Síntesis.

Vasco, C. E. (2006). *Didáctica de las matemáticas*: *Artículos selectos*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Villegas, J. L., García, R. & Castro, E. (2005). El Papel de las Representaciones en el Éxito de la Resolución de Problemas. En J. Lezama, M. Juan. G. Molina. (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, pp. 231-237.