# LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS EN LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES NO LINEALES

Marta Caligaris, Georgina Rodríguez y Lorena Laugero
Facultad Regional San Nicolás. Universidad Tecnológica Nacional Argentina
gie@frsn.utn.edu.ar

**Resumen.** Un estudiante no necesariamente utiliza la definición cuando decide si un objeto matemático es ejemplo o contraejemplo de un concepto determinado, sino que generalmente toma la decisión basándose en una imagen que se hizo del mismo. Por lo tanto, es aconsejable comenzar la enseñanza de cada concepto presentando diversos ejemplos mediantes los cuales los alumnos puedan formarse una adecuada imagen. Este trabajo tiene como objetivo presentar la secuencia didáctica que se diseñó para la comprensión de los conceptos que se hallan involucrados en la resolución numérica de ecuaciones no lineales, ofreciendo experiencias y ejemplos. También se mostrarán los resultados obtenidos tras su aplicación.
**Palabras clave**: concepto, definición, imagen, ecuaciones no lineales
**Abstract.** When deciding whether a mathematical object is an example or counterexample of a particular concept , students do not necessarily use the definition, but that decision is usually based on "their image" of it, that is to say, the one that they have constructed. Therefore, it is advisable to begin teaching a concept showing several examples, so as students can build an adequate image of it. This work aims to present the teaching sequence was designed to understand the concepts that are involved in the numerical solution of nonlinear equations, providing experiences and examples. The results obtained after its implementation are also shown.
**Key words**: concept, definition, image, nonlinear equations

## Introducción

Muchas veces, en la práctica docente, se nota la diferencia que existe entre los conceptos concebidos y formulados por la matemática formal y las interpretaciones que los alumnos hacen de los mismos. Así, resulta importante analizar los mecanismos que los estudiantes ponen en juego en el proceso de construcción de un concepto matemático para así poder elaborar secuencias didácticas que contribuyan a tal fin.

En el estudio de la formación de conceptos matemáticos se destacan Vinner y Tall. Para explicar este proceso, introducen los términos "definición del concepto" e "imagen del concepto" (Vinner, 1991; Tall y Vinner, 1981).La definición de un concepto consiste en una serie de palabras que se utilizan para especificarlo. Todos los conceptos matemáticos, excepto los primitivos, tienen definiciones formales. Pero el alumno no necesariamente utiliza la definición cuando decide si un objeto matemático es un ejemplo de un concepto, sino que toma la decisión, en general, basándose en su imagen del mismo, es decir, en el conjunto de todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados por él al concepto, algo no verbal que se ha ido formando a lo largo de los años por medio de diversas experiencias. No obstante, esta imagen no es necesariamente coherente en cuanto a su contenido: puede incluir aspectos contradictorios, de los que los estudiantes no son conscientes.

## La problemática de Tall - Vinner

Según Vinner (1991), durante el proceso de formación de conceptos, la relación entre imagen y definición del concepto es recíproca. Sin embargo, la enseñanza de un concepto matemático generalmente está dada por la presentación de la definición formal y se espera que la imagen de ese concepto se forme a partir de la misma. Reaccione como reaccione el sistema de asociación cuando se plantea un problema, se supone que no es posible formular una solución sin antes consultar la definición del concepto. Este es, por supuesto, el proceso deseable. Desafortunadamente, no es lo que ocurre en la práctica.

Por esta razón, es aconsejable comenzar la enseñanza de un concepto presentando diversos ejemplos y contraejemplos con los que los alumnos puedan formar una imagen del mismo. Incluso, si el concepto no es muy complicado, el docente puede pedirles que sugieran su propia definición.

Un sujeto adquiere un concepto cuando construye una imagen de él ya que se considera que conocer una definición, no garantiza la comprensión de dicho concepto (Vinner, 1991).Un mismo estudiante puede reaccionar de distintas maneras ante un mismo concepto en diferentes situaciones. Tall y Vinner (1981) utilizan el término “imagen evocada del concepto” para describir lo que se recuerda en un contexto dado.

En cuanto a la definición del concepto, estos autores hacen una importante diferenciación entre la definición institucional o formal del concepto y la definición que construye el estudiante, es decir, su definición personal. La definición del concepto hace referencia a una conformación de palabras utilizadas para especificar el concepto. Un individuo puede aprenderla por repetición o, más significativamente aprenderla y relacionarla, en un mayor o menor grado, con el concepto como un todo. También puede ser una reconstrucción personal de una definición. En este caso, la conformación de palabras que el estudiante utiliza es una manifestación de la imagen evocada del concepto. De esta manera, una definición personal del concepto puede diferir de su definición formal.

Apoyados en lo anteriormente expuesto y en observaciones empíricas, Tall y Vinner, identifican algunos problemas en el aprendizaje de conceptos matemáticos que se manifiestan como desarticulaciones entre el concepto personal, la definición institucional del concepto y la definición personal. Álvarez y Delgado (2002), denominan estos problemas como “Problemática Tall – Vinner”:

- La imagen del concepto puede presentar incoherencias, al activarse o ponerse en juego en diferentes situaciones.

- Entre la imagen del concepto o concepto personal que construye el sujeto y el concepto matemático institucional se pueden presentar desadaptaciones matemáticas, relativas a la forma en que el sujeto apropia el significado socialmente compartido del concepto matemático.
- Es frecuente que los estudiantes no dispongan de la definición personal de un concepto matemático que han estudiado. No obstante, aun cuando la tengan y aun si la definición que verbalizan concuerda con la definición institucional, ésta puede estar desarticulada, sin que tenga efectos en la acción del sujeto.

Estos tres problemas permiten explicar porqué, en determinadas situaciones, un alumno puede dar evidencias de comprensión de un concepto y, en otras no.

Estos autores introducen también los conceptos de "estabilidad", "adaptabilidad" y "coherencia". Una definición personal, relativa a un concepto matemático, es estable en la medida en que la persona verbaliza una definición sobre el concepto en forma consistente y equivalente en diferentes situaciones. Una definición personal estable se llama bien adaptada matemáticamente si es equivalente a la definición institucionalizada. La coherencia de la definición se refiere al grado de articulación que tiene dicha definición personal con la acción, es decir con la imagen evocada del concepto.

Por lo tanto, comprender un concepto implica construir una imagen asociada, pero esta comprensión se constituye en un concepto personal bien constituido matemáticamente en la medida en que el sujeto dispone de una definición personal estable del concepto, coherente y bien ajustada a la definición matemática del concepto.

### La resolución numérica de ecuaciones no lineales

La necesidad de obtener la solución de una ecuación no lineal se presenta con frecuencia al resolver problemas de ingeniería. De allí la importancia de que los alumnos de estas carreras adquieran las habilidades necesarias para resolver este tipo de ecuaciones.

Uno de los principales obstáculos que se presenta en la enseñanza del Análisis Numérico es la dificultad que tienen los alumnos para comprender la esencia de la materia. Ésta es una asignatura que tiene características propias ya que no existen siempre "verdades" aplicables a todas las situaciones y porque la pertinencia o no de utilizar diversas herramientas para resolver un problema depende fuertemente del contexto en el cual se va a utilizar (Montero, Astiz, Medina, Vilanova, Rocerau y Vecino, 2003).En particular, en la resolución numérica de ecuaciones no lineales, los alumnos tienen inconvenientes para resolver este tipo de ecuaciones debido a que están acostumbrados a trabajar con "precisión" y se desconciertan cuando tienen que resolver situaciones donde existe cierto grado de incertidumbre (Montero et al., 2003). Esta situación se debe a que, desde la enseñanza elemental de la matemática, hasta el nivel medio superior, se priorizan los métodos determinados sobre los aproximados (Rodriguez y Sierra, 2012). Además, sienten inseguridad cuando deben elegir el método numérico más pertinente para obtener la solución de una determinada ecuación no lineal porque ponen en juego sus conocimientos teóricos, su intuición y experiencia.

Por esta razón, es necesario que los alumnos, en su proceso de aprendizaje, no sólo adquieran la definición de los conceptos que se hallan involucrados en la resolución numérica de una ecuación no lineal, sino también que formen una adecuada imagen de los mismos. Así, podrán abordar sin dificultad las distintas situaciones que se le presenten.

## Metodología de trabajo

La metodología que se aplicó corresponde a un estudio de caso, con un enfoque centrado en lo cualitativo pero sustentado en aportes cuantitativos. Para el desarrollo de esta metodología de trabajo, se seleccionaron como grupos de estudio a los estudiantes que concurren al curso de Análisis Numérico correspondiente a las carreras de Ingeniería Industrial, Electrónica y Mecánica en el ciclo lectivo 2013.

En los tres cursos, para la enseñanza de la unidad “Resolución numérica de ecuaciones no lineales”, se diseñó e implementó una secuencia de actividades para facilitar la comprensión de los conceptos que se hallan involucrados en el tema, ofreciendo ejemplos pertinentes. Para ello, durante la discusión teórica del tema, se utilizó una de las ventanas personalizadas que constituye el Laboratorio Virtual de Análisis Numérico (Caligaris, Rodríguez y Laugero, 2010).

Por medio de la ventana personalizada que se muestra en la Figura 1, los alumnos pudieron obtener los resultados de las situaciones propuestas, de una manera rápida y sencilla. Esto se debe a que la capacitación que se necesita para utilizar esta ventana es mínima debido a que fue diseñada de manera que presente una interfaz muy simple de interpretar y manipular. Esto posibilita a los alumnos concentrarse en los conceptos matemáticos que el docente quiere destacar, sin necesidad de realizar cálculos rutinarios.

La ventana personalizada de Resolución de ecuaciones no lineales permite obtener una aproximación de una raíz de una ecuación no lineal utilizando los siguientes métodos: Bisección, Newton, Secante y Regula-Falsi (Burden y Faires, 2002; Chapra y Canale, 2004; Mathews y Fink, 2000). Para ello, se deben ingresar la expresión que involucra la ecuación, la tolerancia deseada, la cantidad máxima de iteraciones y la derivada primera de la función asociada a la ecuación. Esto se debe a que dicho software, al trabajar numéricamente, no calcula la derivada de cualquier función en forma simbólica y, para poder obtener una aproximación de la solución de la ecuación no lineal por medio del método de Newton, se requiere de la evaluación de dicha derivada en cada iteración.

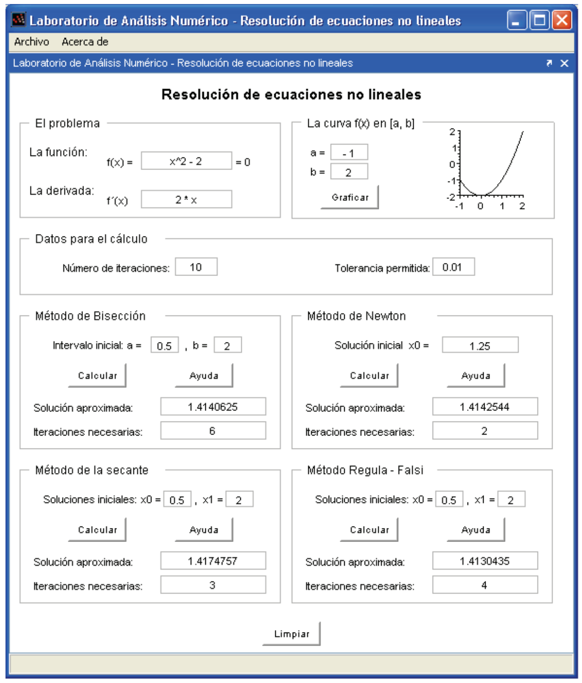



Figura 1. Ventana personalizada de Resolución de ecuaciones no lineales

Todos los métodos requieren de uno o más datos iniciales para su ejecución. Estos se pueden estimar observando un gráfico de la función asociada a la ecuación, que se puede obtener con el botón **Graficar**. Para mostrar los resultados en la ventana personalizada, basta con ingresar los datos necesarios para cada método, y pulsando en el botón **Calcular** correspondiente, se obtiene una aproximación y la cantidad de iteraciones utilizadas. Si con la cantidad de iteraciones máxima o la tolerancia permitida no se alcanza la aproximación deseada, aparece un mensaje de alerta informando al usuario que debe aumentar la cantidad de iteraciones o cambiar la tolerancia permitida. Como ejemplo, se muestran a continuación algunas actividades de la secuencia didáctica diseñada, con el objeto de focalizarse en los conceptos de convergencia, solución aproximada, solución exacta y orden de convergencia.

Actividad 1. (Esta actividad tiene como objetivo que los alumnos adquieran los conceptos de solución exacta y solución aproximada)

Resolver la ecuación $8.x^3 - 6.x^2 - 16.x = 12$ utilizando los métodos disponibles de la ventana personalizada. Tomar como intervalo inicial [0;1] y como punto inicial $x_0 = 1$.

¿Siempre se obtiene una solución aproximada de la ecuación cuando se aplica un método numérico? ¿Es posible obtener la solución exacta? En caso afirmativo, ¿en qué casos?

Actividad 2. (Esta actividad tiene como objetivo que los alumnos adquieran el concepto de convergencia)

Calcular la solución de la ecuación $x^{10} - 1 = 0$. Emplear el método de bisección y de Newton. Tomar como intervalo inicial [0;3] y como punto inicial $x_0 = 0,1$.

¿Siempre se obtiene una solución con la precisión que se desee cuando se aplica un método numérico? Si la función asociada a la ecuación presenta un mínimo cerca de la raíz que se quiere calcular, ¿qué método es el que garantiza la convergencia? ¿Por qué?

Actividad 3. (Esta actividad tiene como objetivo que los alumnos adquieran el concepto de orden de convergencia)

Determinar la solución de la ecuación $\operatorname{sen}(x) = x^2$ utilizando los métodos disponibles de la ventana personalizada. Tomar como intervalo inicial [0,75;1] y como punto inicial $x_0 = 1$.

Establecida una determinada tolerancia, ¿cuál es el método más eficiente para obtener una aproximación de la solución de dicha ecuación? ¿Por qué?

Cualquiera sea la ecuación que se quiera resolver, ¿es posible realizar generalizaciones con respecto a la eficiencia de los métodos de obtención de raíces?

Una vez finalizada la unidad, se aplicó a las tres comisiones un cuestionario donde se le formularon preguntas abiertas. Para responderlas, los alumnos tuvieron que apelar tanto a la definición como a la imagen que formaron de cada uno de los conceptos involucrados en el tema. A continuación, por cuestiones de espacio, sólo se mostrará una de las preguntas que formó parte del cuestionario, cuyas respuestas serán analizadas en la siguiente sección.

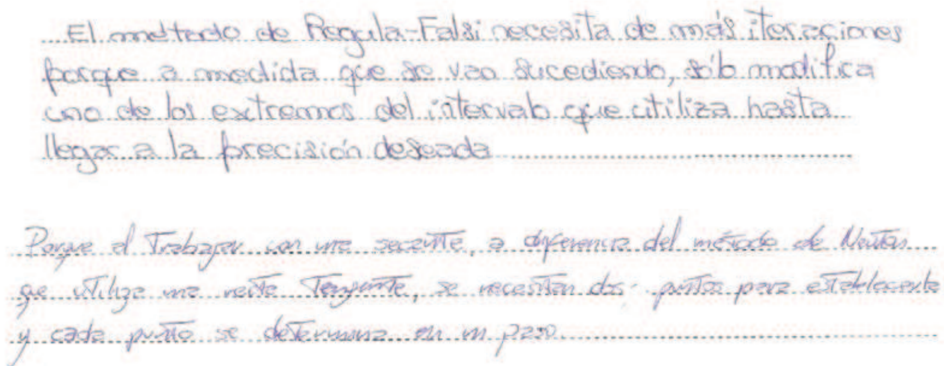
✓**Pregunta 2.**La siguiente tabla muestra la cantidad de iteraciones que se necesitaron al aplicar el método de Regula – Falsi y de Newton para obtener la solución numérica positiva de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ con una precisión determinada. Explicar por qué razón, cualquiera sea la precisión establecida, el primer método necesita de una mayor cantidad de iteraciones para obtener la aproximación deseada.

| Precisión deseada | Cantidad de iteraciones | |
|---|---|---|
| | Regula - Falsi | Newton |
| 0,01 | 3 | 2 |
| 0,0001 | 5 | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| 0,00001 | 7 | 3 |

## Análisis de los resultados

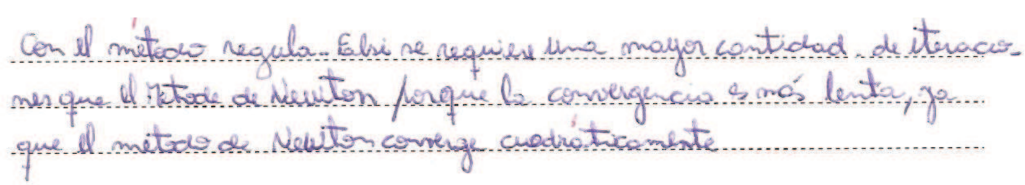
De la totalidad de los cuestionarios realizados, el 82 % de los alumnos pudo explicar por qué razón el método de Newton, para el ejemplo presentado, requiere de menos iteraciones para obtener la aproximación deseada con una determinada precisión. Esta situación pone de manifiesto que estosestudiantes, al poder recurrir al concepto de orden de convergencia para fundamentar la respuesta, han comprendido el concepto matemático involucrado. A continuación, se muestran algunas de las respuestas de aquellos alumnos que no respondieron correctamente la pregunta planteada.

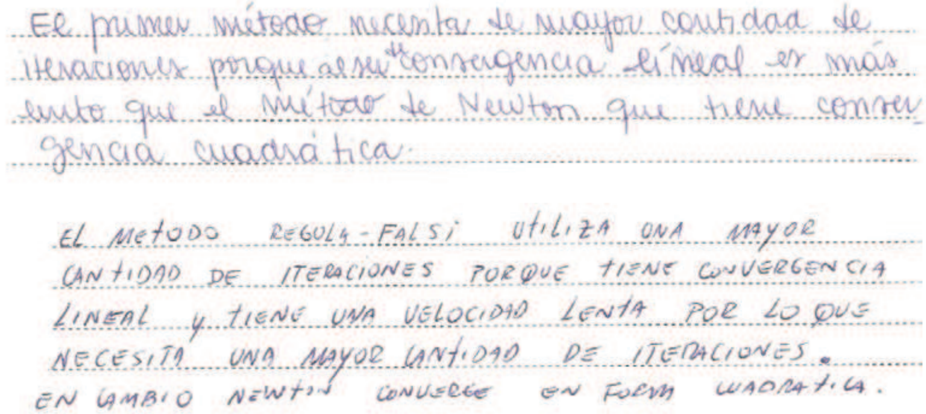

El método de Regula-Falsi necesita de más iteraciones porque a medida que se van sucediendo, sólo modifica uno de los extremos del intervalo que utiliza hasta llegar a la precisión deseada

Porque al trabajar con una secante, a diferencia del método de Newton que utiliza una recta tangente, se necesitan dos puntos para establecerla y cada punto se determina en un paso

Figura 2. Respuestas incorrectas dadas por los alumnos ante la Pregunta 2.

Si bien la mayoría pudo indicar que, el método de Regula – Falsi requiere de más iteraciones para lograr una determinada aproximación por tener un menor orden de convergencia, algunos alumnos no pudieron expresar que no basta la convergencia cuadrática del método de Newton para justificar la eficiencia del mismo. El punto inicial que se tome, las características que presenta la función asociada a la ecuación que se quiere resolver y el tipo de cero o raíz que se quiere calcular (múltiple o simple), son factores que también influyen en la rapidez con que un método logra una determina aproximación. En la Figura 3, se muestran algunas respuestas dadas por los alumnos, que no están completas.


Con el método regula falsi se requiere una mayor cantidad de iteraciones que el método de Newton porque la convergencia es más lenta, ya que el método de Newton converge cuadráticamente



El primer método necesita de mayor cantidad de iteraciones porque a su convergencia lineal es más lento que el Método de Newton que tiene conver gencia cuadrática.

EL METODO REGULA-FALSI UTILIZA UNA MAYOR CANTIDAD DE ITERACIONES PORQUE TIENE CONVERGENCIA LINEAL Y TIENE UNA VELOCIDAD LENTA POR LO QUE NECESITA UNA MAYOR CANTIDAD DE ITERACIONES. EN CAMBIO NEWTON CONVERGE EN FORMA CUADRATICA.

Figura 3. Respuestas dadas por los alumnos ante la Pregunta 2.

## Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en los cuestionarios realizados por los alumnos, se puede concluir que un importante porcentaje de estudiantes ha comprendido adecuadamente algunos conceptos matemáticos involucrados en la resolución de ecuaciones no lineales. Por medio de la secuencia didáctica propuesta, la mayoría de los alumnos pudo construir conceptos personales bien constituidos matemáticamente.

Con el objetivo de que todos los alumnos comprendan los conceptos de convergencia, solución aproximada y solución exacta se continúa a lo largo del curso utilizando estrategias similares en las siguientes unidades. De esta manera, los alumnos podrán disponer de definiciones personales estables, coherentes y bien ajustadas a la definición matemática delos conceptos involucrados en el análisis numérico.

## Referencias bibliográficas


Álvarez, J. y Delgado, C. (2002). The Tall – Vinner problem. An operative reformulation. En Cockburn, A. y Nardi, E. (Eds), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (1), 261. UK: University of East Anglia.

Burden, R. y Faires, D. (2002). *Análisis Numérico*. México: Int. Thomson Editores.

Caligaris, M., Rodríguez, G. y Laugero, L. (2010). Laboratorio de Análisis Numérico. En Cukierman y Virgili (Comp). *La tecnología educativa al servicio de la educación tecnológica. Experiencias e investigaciones en la UTN* (pp. 583-606). Buenos Aires: edUTecNe.

Chapra, S. y Canale, R. (2004). *Métodos numéricos para ingenieros*. México: Mac Graw – Hill.

Mathews, J. y Fink, K. (2000). *Métodos Numéricos con Matlab.* Madrid: Prentice Hall.

Montero, Y., Astiz, M., Medina, P., Vilanova, S., Rocerau, M. y Vecino, M. (2003). Un asistente matemático en la enseñanza de la resolución numérica de ecuaciones no lineales por el método de punto fijo. En Delgado Rubí, J. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16(1), 94-99. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rodríguez, F. y Sierra, M. Lagrange y la resolución de ecuaciones numéricas: perspectiva histórica epistemológica. (2012). En Flores, R. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 209-216. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Vinner, S. (1991).The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.