¿CÓMO GENERAR HABILIDAD PARA DEMOSTRAR?

Rodolfo Eliseo D´Andrea y Patricia Sastre Vázquez
Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario. Argentina
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
rodolfoedandrea@yahoo.com.ar, pasava2001@yahoo.com.ar

Resumen. El estudiante universitario de Argentina tiene dificultades para comprender, reproducir y generar demostraciones matemáticas, confundiendo acciones como demostrar y verificar. El objetivo de este trabajo es reflexionar en torno a la aplicación de una propuesta didáctica consistente en un proceso metodológico que propicia en el estudiante universitario el abordaje de la prueba matemática. Esta propuesta basada en otras, que se describen en este trabajo, intenta evitar saltos cognitivos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración, facilitando el acceso del estudiante y generando aprendizaje constructivo.

Palabras clave: verificación, demostración, aprendizaje constructivo

Abstract. The university student of Argentina has difficulties to comprise, reproduce and generate mathematical proof, confusing the actions like proving and verify. The objective of this paper is to reflect on the implementation of a didactical proposal consisting of a methodological process that allow in student a comprehensive boarding of the mathematical proof. This proposal based on others, described in this paper, tries to avoid cognitive leaps in the teaching and learning of proof, providing student access and generating constructive learning.

Key words: verification, proof, constructive learning

Introducción

El estudiante universitario de Argentina, tiene dificultades para comprender, reproducir y generar demostraciones matemáticas, confundiendo acciones como demostrar y verificar. El estudiante procede, en general, cuando se le pide una prueba, desde el empirismo ingenuo (Balacheff, 2000), considerando que la prueba consiste en la exhibición de algunos casos particulares sin un criterio formado al hacerlo. Los estudiantes, en muchos casos, cuando le es requerida una prueba que el docente ya expuso en clase, vuelven a recurrir a la verificación ignorando lo expuesto. Por otro lado, están aquellos que repiten lo que el docente realizó pero de modo mecánico y sin comprensión. Azcárate Giménez (1995) considera que cuando el estudiante reproduce una prueba exhibida por el docente en clase, en general, lo hace de forma ritual intentando imitar al discurso escuchado.

Cabe preguntarse entonces: ¿Es necesario enseñar a demostrar?; ¿Con qué objetivo?; ¿Cómo es posible guiar al estudiante para que sea capaz de respetar el proceso deductivo cuando realiza la demostración de proposiciones matemáticas?; ¿Qué estrategias pueden utilizarse para que realice este proceso desde el razonamiento y no desde la memoria repetitiva?

El objetivo de este trabajo es reflexionar en torno a la aplicación de una propuesta didáctica consistente en un proceso metodológico que propicia en el estudiante universitario el abordaje de la demostración matemática. Esta propuesta basada en otras, que se describen más adelante, intenta evitar saltos cognitivos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración, facilitando el acceso a la prueba y generando aprendizaje constructivo.

La prueba matemática

En Matemática existen dos tipos de proposiciones verdaderas. Las que no requieren ser demostradas, denominadas axiomas. Por otro lado están las que requieren ser demostradas, que si son trascendentes dentro de la comunidad matemática se las considera estrictamente un Teorema, ya que las mismas expresan resultados claves de avance científico dentro de esta ciencia pero, hay otras que no tienen esta categoría aunque son importantes para llegar a la formulación de un teorema y que requieren de la prueba para el sostén de su verdad y son simplemente proposiciones. Tanto las proposiciones últimas citadas y los teoremas constan de hipótesis, tesis y demostración. La Hipótesis es una suposición que permite inferir una consecuencia; debe destacarse que la hipótesis incluye también las denominadas "hipótesis implícitas" que son todos los conocimientos previos que se tienen al momento de establecer la hipótesis de la proposición a probar. La Tesis es una proposición mantenida con razonamientos, que son los que determinan la estructura de la demostración.

La Demostración es la argumentación utilizada para sostener la veracidad de una proposición matemática verdadera. Quiénes determinan esa estructura son los 'eslabones' argumentativos que constituyen la cadena del razonamiento que constituye la demostración. En definitiva, son los pasos necesarios para resolver (o llegar) a probar la verdad que postula la tesis.

Para demostrar un teorema 'no hay recetas', cada uno que se presenta es una situación nueva, pero existen ciertos lineamientos o pautas a seguir que constituyen los métodos a aplicar en diferentes situaciones. Asimismo, a cada momento se presentan situaciones diferentes que requieren de ingenio, destreza y algo que sí es común y que se requiere siempre: Raciocinio y capacidad deductiva como consecuencia y una importante capacidad de abstracción.

Las propuestas didácticas de tres investigadores

Leron (1983) propone un método para la demostración, denominado "estructural", inspirado por las ideas informáticas que surgieron en los ochenta y repercutieron indiscutiblemente para posteriores avances. La idea básica que subyace es presentar las demostraciones en clase en diferentes niveles de gradualidad, procediendo desde las ideas elementales de la prueba hacia la conclusión, de manera escalonada y fragmentada. La ventaja principal de presentar así una demostración es que permite una comunicación más fluida generando en el estudiante un aprendizaje significativo. A diferencia de la prueba tradicional que se desarrolla desde la hipótesis a la tesis, la prueba estructural se desarrolla como un 'diagrama de flujo', focalizando determinadas partes de la prueba, de forma de facilitar la comprensión de estas, con el objetivo de generar la comprensión global de la prueba completa.

Solow (1992) sostiene que si se tiene que realizar una demostración del tipo: si A entonces B, se dice que se usa un *método progresivo*, tomando A como cierto llegamos a B, y que se usa uno *regresivo* cuando se busca un método para demostrar que B es verdadero, partiendo del supuesto de que B es verdadero. Ambos métodos se relacionan entre sí cuando se trabaja con B de tal forma que se llega a A y luego se toma A y se llega a B, obteniéndose así el método conocido como regresivo-progresivo. El proceso regresivo se inicia preguntando: ¿Cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera? El proceso de demostración se comienza regresivamente, planteando lo que Solow denomina: "pregunta de abstracción" que consiste siempre en un planteo de la forma: "¿Cómo o Cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera?". La pregunta debe ser formulada de un modo abstracto y sin hacer referencia alguna al problema concreto que generó. La respuesta a la pregunta de abstracción es un proceso de dos fases. Primero hay que dar una respuesta abstracta, para después aplicar esta respuesta a la situación específica. La forma en que sea formulada esta pregunta juega un papel decisivo. Por ejemplo, si tiene que probarse que el cuadrado de todo número entero par es par, la pregunta de abstracción sería para el planteo de esta prueba: ¿Cómo puedo demostrar que un número al cuadrado es par? Se puede responder esta pregunta en términos no tan abstractos, diciendo que esto puede ocurrir cuando se puede expresar al número como el producto de 2 por otro entero.

En virtud de observar que en la formación de profesores de Matemáticas cubanos existían dificultades en el aprendizaje de demostraciones geométricas, Bravo y Arrieta (2003) propusieron un sistema de acciones para la enseñanza de las mismas, lo cual impulsó a la búsqueda de herramientas metodológicas que condujeran a ideas novedosas en su enseñanza. En sus trabajos se presentan estrategias y los resultados de la aplicación de estas con el objeto de generar la habilidad 'demostrar' en el estudiante de profesorado. En el marco teórico de su trabajo, estudiaron algunas aportaciones teóricas sobre estrategias didácticas junto al importante papel que juega la resolución de problemas en el proceso de enseñanza de la Matemática.

La propuesta didáctica de D´Andrea y otros, basada en Leron, Solow y Bravo Arrieta

El lenguaje matemático tiene tres facetas claramente definidas: coloquial, que se expresa a través del lenguaje natural del individuo; visual, que se expresa a través de un simple diagrama a mano alzada a una gráfica que puede ser realizada por un software y finalmente el lenguaje simbólico propio de la Matemática.

La epistemología de la Matemática se basa en el raciocinio y la abstracción, que en el estudiante requieren de un entrenamiento en el conocimiento y la adquisición de destrezas en el Lenguaje Matemático.

Como producto de la investigación llevada a cabo por D´Andrea, Curia y Lavalle (2012) sobre el razonamiento deductivo utilizado por estudiantes de Ciencias Naturales e Ingeniería, en el proceso de validación de proposiciones matemáticas, se generó un diagnóstico que permitió la construcción de una propuesta didáctica consistente en un proceso metodológico que propicia en el estudiante universitario el abordaje de la demostración matemática.

Esta investigación tuvo una instancia experimental consistente en la realización de encuestas a profesores de una facultad de Ingeniería y Ciencias para conocer como desarrollaban la didáctica de la demostración y como la habían recibido en el aula, también, pero en su etapa de estudiantes. La etapa experimental de la investigación también incluía la aplicación de una serie de ejercicios a los estudiantes con el objeto de conocer como estos validaban, además de una encuesta que indagaba acerca de como abordaban el estudio de las demostraciones; si las comprendían y si eran capaces de generar nuevas, entre otras cuestiones.

Estos trabajos de campo generaron un diagnóstico, que postula lo siguiente:

> El estudiante ingresante a Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías requiere en los cursos de Matemática del currículo de la carrera elegida comprender la demostración de proposiciones y teoremas. Tiene profundas dificultades para comprenderlas, y más aún para reproducirlas, producto del retardo del desarrollo del pensamiento formal y la supresión de desarrollos teóricos en el área matemática en el ciclo medio. A esto se suma la experiencia personal de los docentes que valoran la formación recibida en la demostración de proposiciones y teoremas pero que paralelamente reniegan de aprendizajes memorísticos implícitos en estas cuestiones y como consecuencia de estas experiencias y la reticencia de los estudiantes a incorporar estos contenidos debilitan estos procesos en el aula y por ende a la Matemática, al no exponer debidamente la epistemología que le es propia. (D´Andrea *et al*, 2012, p.130)

Inspirándose en las propuestas de Leron (1983), Solow (1993) y Bravo Estévez (2003), se establece una propuesta didáctica consistente en un proceso metodológico que permite conducir y encuadrar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática. La propuesta se perfila a través de una serie de estrategias didácticas presentadas como una secuencia de tareas. El objetivo de esta secuencia de tareas tiene como objetivo lograr un aprendizaje comprensivo, significativo y constructivo con una perspectiva implícita que permita desarrollar un pensamiento lógico en el estudiante que pueda ser extrapolado a otras disciplinas. Si bien la secuencia de tareas es eminentemente conductista, su aplicación cotidiana en el desarrollo de los diferentes cursos de Matemática, puede finalmente conducir a una actitud constructivista del estudiante, ya que tal secuencia induce al fortalecimiento de una habilidad 'dormida' en este y es la actividad 'demostrar'. Para el desarrollo en clase de la actividad consistente en la demostración de una proposición verdadera, que permita una secuencia inmediata de apropiación como consecuencia de la comprensión, se sugiere seguir las siguientes etapas:

1. **Comprensión y Apropiación del Lenguaje Matemático.** Esta etapa es el prolegómeno a las siguientes y consiste en permitir al estudiante el acceso, comprensión y apropiación del Lenguaje Matemático. Para un acercamiento efectivo del estudiante a este Lenguaje, el docente deberá diseñar y seleccionar estrategias y material didáctico que apunten a un aprendizaje constructivo y comprensivo. La comprensión y apropiación del lenguaje requiere que el estudiante conozca:

La utilización de conectores proposicionales: conjunción; disyunción inclusiva y exclusiva; implicación y doble implicación; negación. Las condiciones que pueden presentarse en una implicación o condicional. Las implicaciones asociadas que se hallan implícitas en un condicional cualquiera. Las reglas fundamentales del álgebra de proposiciones: Involución; De Morgan; Negación de una implicación, entre otras. Los métodos de demostración de implicaciones.

Los contenidos citados deben ser expuestos con una profusa cantidad de ejemplos, extraídos de contenidos del ciclo medio que son revisados, usualmente, en el curso propedéutico que antecede el inicio de las Carreras de grado universitarias. Carece de sentido el planteo de las etapas siguientes, si el estudiante no tuvo la posibilidad de acceder al Lenguaje Matemático. Esta etapa debe ser el comienzo de los cursos iniciales de Matemática de la carrera escogida por el estudiante.

2. **Presentación del teorema o proposición a demostrar:** En este punto se presenta al estudiante el teorema o proposición a demostrar, en su estructura formal.

Las tres etapas siguientes tienen órdenes indistintos y esto obedece a que el estudiante puede apropiarse de la comprensión de la proposición a demostrar desde la perspectiva de su propio lenguaje, la visualización o la simple acción de la verificación.

3. **Interpretación coloquial:** En esta etapa se propone al estudiante que intente explicar coloquialmente, lo expuesto formalmente en el ítem anterior. Con esta etapa se generaría la comprensión desde el lenguaje coloquial. Esta etapa constituye la parte crucial del proceso de aprendizaje, ya que el estudiante intentará apropiarse del significado de la proposición desde su propio lenguaje.

4. **Verificación:** En esta etapa el estudiante es instado por el docente a verificar por sí mismo la proposición a demostrar debiendo generar mínimamente dos ejemplos. Ejemplos que no deben ser elegidos aleatoriamente, sino teniendo en cuenta que deben cumplir lo planteado por la hipótesis de la proposición.

5. **Visualización:** En esta etapa, el estudiante nuevamente es instado por el docente, pero esta vez a visualizar la proposición a demostrar. La visualización puede ser una interpretación geométrica si así correspondiera, a través de un simple esquema, dibujo, figura a mano alzada o a través del software. La proposición podría no tener una interpretación geométrica, pero un esquema visual que muestre la secuencia de lo que expresa conceptualmente, puede contribuir notablemente a su comprensión.

6. **Simbolización:** Luego de la explicación coloquial, la verificación y la visualización, entonces debe retomarse la estructura formal de la proposición a demostrar. La comprensión de la expresión simbólica de la proposición a demostrar ya tiene otra accesibilidad para el estudiante, penetrando de esta forma en el proceso de abstracción, imprescindible para llevar a cabo la prueba formal.

7. **Elementos vitales de la proposición:** En esta etapa el estudiante debe identificar la hipótesis de la proposición a demostrar; las hipótesis implícitas y la tesis.

8. **Contenidos implícitos de la proposición:** En esta etapa el estudiante deberá identificar que estructuras conceptuales están implícitas en la proposición a demostrar. Esto de alguna manera está incluido en la etapa anterior en las hipótesis implícitas.

9. **Abstracción:** En esta etapa, el docente guía al estudiante en la formulación de la clásica pregunta de abstracción postulada por Solow (1993) en su método regresivo–progresivo. Esta pregunta, en la exposición de la proposición a demostrar, debe ser formulada al grupo de estudiantes con el objetivo de generar discusión y planteos personales.

10. **Guía Secuenciada de la demostración:** Si la proposición a demostrar, es en extremo constructiva y compleja de modo que el estudiante no pueda abordarla por sí mismo, es recomendable la presentación secuenciada y detallada de la misma a la manera del método estructural sugerido por Leron.

Si la proposición no requiere de grandes artificios para la construcción de su prueba, es importante invitar al estudiante a llevarla a cabo por sí mismo, a través de una Guía Secuenciada de instrucciones que contemplen el paso a paso de la prueba en cuestión para, propiciar la construcción de esos razonamientos de forma autónoma. Esta Guía Secuenciada permitirá observar la demostración una vez realizada desde una perspectiva global hacia perspectivas más focalizadas, posibilitando la construcción de la prueba, generando aprendizajes comprensivos y significativos y no un conocimiento inerte sin interacción. Se recomienda que si la proposición reviste complejidad, el docente la exponga detalladamente, y al finalizarla invite al estudiante a que intente reproducirla de forma aproximada con la Guía Secuenciada antes descripta, o bien que él mismo la genere, o también, que elabore una serie de preguntas relacionadas a la argumentación que conduce a la prueba. Esta serie de preguntas también podría ser un disparador inicial para el estudiante a los efectos de la construcción del razonamiento que constituye la prueba.

La idea que subyace a esta Guía, es que el planteo de las pruebas no sea una instancia formal, sino que se integre a la práctica cotidiana. Es decir, que la práctica tradicional, no esté formada por clásicos ejercicios de aplicación de las estructuras conceptuales y las proposiciones asociadas a estas o simplemente aplicación de algoritmos sino, que la teoría se articule con la práctica de forma natural.

Ejemplos:

1. ¿Cómo puede probarse que el cociente entre dos números complejos, expresado en forma polar, es otro número complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y su argumento es la diferencia de los argumentos de los complejos dados?

Guía Secuenciada: Considerar que el cociente entre dos números complejos z y z' arroja un cierto resultado (darle un nombre simbólico) y despejar luego z o z' en función de los otros dos. Expresar ambos miembros de la igualdad planteada, en forma polar y luego de tener en cuenta la propiedad del producto de números complejos en forma polar. Considerar la definición de igualdad entre números complejos, correspondiente al formato polar. Aplicada la definición, deben despejarse los valores del módulo y el argumento del número complejo resultado del cociente al cual se le otorgó un nombre al comienzo de la prueba. Tener presente que tal definición debe considerarse particularmente para $k = 0$.

2. Se consideran a continuación, una de las tres proposiciones que constituyen la totalidad de este teorema. Este contempla, según sea el signo de la primer derivada, que la función sea creciente, decreciente o constante. Si $f:[a,b] \to R$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces, cualesquiera sea $x \in (a,b): f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en (a,b). ¿Cómo puede demostrarse que la función de la hipótesis es estrictamente creciente si la función derivada primera es positiva?

Guía Secuenciada: Considerar la función de la hipótesis, y un subintervalo de la misma, que puede llamárselo, por ejemplo: $[x,y] \subset [a,b]$. Luego, aplicar a la función f el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial en el subintervalo considerado, previa verificación del cumplimiento de las hipótesis del teorema citado. Posteriormente analizar el signo de la expresión obtenida y teniendo en cuenta la hipótesis sobre el signo de $f'(x)$ y la definición de función estrictamente creciente, se podrá arribar a la tesis.

Conclusiones

El estudiante cuando comienza a familiarizarse con la demostración, tiene dificultades para comprender la exposición del proceso deductivo de la demostración de las proposiciones matemáticas que realiza el profesor en el aula. Sin embargo, es consciente acerca de lo requerido por este, cuando pide una demostración, comprendiendo que la verificación no es el proceso adecuado para establecerse como prueba. No obstante, recurre a la verificación ni bien encuentra dificultades, posiblemente debido al hecho que en la cotidianeidad y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba usual. Este proceso se repite una y otra vez, y no de forma aislada. Se trata de una reacción muy general, cuando el estudiante no puede llevar a cabo una prueba o no se le ocurre como generarla.

La propuesta didáctica presentada de D´Andrea *et al* (2012) intenta que el estudiante genere una actitud reflexiva frente a la instancia de la prueba. Y también permite que este pueda abordarla en su significación global, que incluye la comprensión del significado de la proposición a demostrar, desde las tres facetas que constituyen el Lenguaje Matemático. La etapa correspondiente a la Guía Secuenciada, es una alternativa interesante que permite conducir al estudiante hacia el objetivo, pero también es una 'muletilla' que con el tiempo debe ser dejada para poder permitir el desarrollo mental autónomo de este. En caso contrario, el estudiante dependerá de esto de forma tal que le será imposible llegar a generar los razonamientos y argumentaciones por sí mismo, que implícitamente se encuentran en las demostraciones.

Se está analizando y como consecuencia, investigando en el presente la posibilidad de generar a partir de la propuesta presentada, otras asociadas que permitan que el estudiante desarrolle otros tipos de argumentaciones, no solo desde la perspectiva deductiva sino desde otras que forman parte de la epistemología matemática.

Referencias bibliográficas

Azcárate Giménez, C. (1995). *Procesos de pensamiento matemático avanzado. Definiciones, demostraciones, ¿Por qué?, ¿Cuándo?, ¿Cómo?*. Barcelona: Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales, Universidad Autonóma de Barcelona.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: una empresa docente y Universidad de Los Andes.

Bravo Estévez, L. y Arrieta, J. (2003). Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas: resultados de su implementación. En E. Castro Martinez (Ed), *Investigación en Educación Matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 7,* 153 – 160. España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

D´Andrea, R.E.; Curia, L.; Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

Leron, U. (1983). Structuring Mathematical Proofs. *The American Mathematical Monthly, 90, (3),* 174 – 185.

Solow, D. (1992). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*. México: Limusa. Noriega Editores.