MODELIZACIÓN CON FUNCIONES

Eugenia Marmolejo, François Pluvinage y Gonzalo Zubieta

Cinvestav, IPN. México

Resumen

En álgebra las variables juegan diferentes papeles, uno de ellos es el de parámetro. Nuestro interés en los parámetros surge de la gran utilidad que tienen en problemas prácticos que se pueden resolver con modelos matemáticos. En esta plática presentaremos una actividad que se llevó a cabo en una escuela particular de la Ciudad de México con alumnos que estaban cursando el último año de bachillerato. El objetivo de esta tarea de modelización matemática fue que los alumnos evaluaran y mejoraran la funcionalidad de un modelo dado que describe el movimiento de un montacargas. Los resultados de este experimento exploratorio dan evidencia de que hace falta insistir en el análisis cualitativo de la situación que se está modelando.

Palabras clave: Parámetros, modelización, pensamiento funcional.

Abstract

In algebra the variables play different roles, one of them is the role of parameter. Our interest in parameters arises from the great value they have in practical problems that can be solved with mathematical models. In this talk we present an activity that took place in a private school in Mexico City with students who were attending the last year of high school. The objective of this task of mathematical modeling with functions was that students assess and improve the functionality of a given model describing the motion of an elevator. The results of this exploratory experiment give evidence that it is necessary to insist on a qualitative analysis of the situation being modeled.

Keywords: Parameters, modeling, functional thinking.

En Álgebra las variables juegan diferentes papeles, uno de ellos es el de parámetro. Nuestro interés en los parámetros surge de la gran utilidad que tienen en problemas prácticos que se pueden resolver con modelos matemáticos. Entre los obstáculos que hubo que superar, durante el desarrollo histórico del concepto de parámetro, Drijvers (2003) cita las siguientes:

1) sus diferentes significados;
2) la distinción de las variables ordinarias y las que juegan el papel de parámetros; y
3) la percepción de expresiones como objetos que representan soluciones generales.

A estos mismos problemas se enfrentan los alumnos en el salón de clases. Nos interesó la actividad que presentaremos porque permite diferentes acercamientos y soluciones como veremos más adelante e involucra la manipulación de parámetros para mejorar un modelo dado.

Montacargas

En la actividad participaron seis alumnos entre 16 y 19 años de edad que estaban cursando el nivel superior de matemáticas a nivel bachillerato. El objetivo del trabajo

Marmolejo, E., Pluvinage, F., y Zubieta, G. (2012). Modelización con funciones. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 75-84). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

fue que los alumnos evaluaran y mejoraran la funcionalidad de un modelo dado que tiene dos parámetros y describe el movimiento de un montacargas. El bachillerato internacional es un curso de dos años durante los cuales los alumnos hacen otras investigaciones que se analizan y discuten en el salón de clase. Al final del curso hacen un trabajo final individual que deben completar en, a lo más, cinco horas. Analizaremos el trabajo final de dos alumnos: Carmen y Sebastián. A los alumnos se les dieron las siguientes especificaciones:

Actividad Montacargas [1]

En esta actividad, primero vas a explorar un posible modelo para un montacargas que se usa para transporte de equipo y ascenso de minerales. Vas a evaluar las fortalezas y debilidades del modelo y finalmente, vas a crear las especificaciones para desarrollar tu propio modelo.

Análisis del modelo dado.

La fórmula $y = 2.5t^3 - 15t^2$ *representa la posición* y *de un elevador medida en metros (*$y = 0$ *representa el nivel del suelo) donde* t *representa el tiempo medido en minutos (*$t = 0$ *es el tiempo de inicio). Sabemos que el viaje de ida y vuelta, sin tomar en cuenta el tiempo que está abajo, es aproximadamente de seis minutos y que la profundidad del pozo vertical es aproximadamente de 100 metros.*

Grafica el desplazamiento, la velocidad y la aceleración y usa estas funciones para:

a) *Explicar el significado de los valores negativos, positivos y cero de la gráfica de la velocidad.*
b) *Explicar las relaciones entre velocidad y aceleración en los intervalos en los que el montacargas aumenta la velocidad, disminuye la velocidad o está en reposo.*
c) *Evaluar la utilidad e identificar los problemas del modelo dado.*

Crea tu propio modelo.

1. *Haz una lista de especificaciones para rediseñar el modelo del montacargas.*
2. *Crea tu propio modelo. Puedes usar una sola función o puedes definir una función por pedazos.*
3. *Explica por qué tu modelo satisface las especificaciones del problema y mejora el modelo dado.*

Aplica tu modelo.

Explica qué tipo de modificaciones se le pueden hacer a tu modelo para usarse en otras situaciones.

[1] International Baccalaureate, 2008.

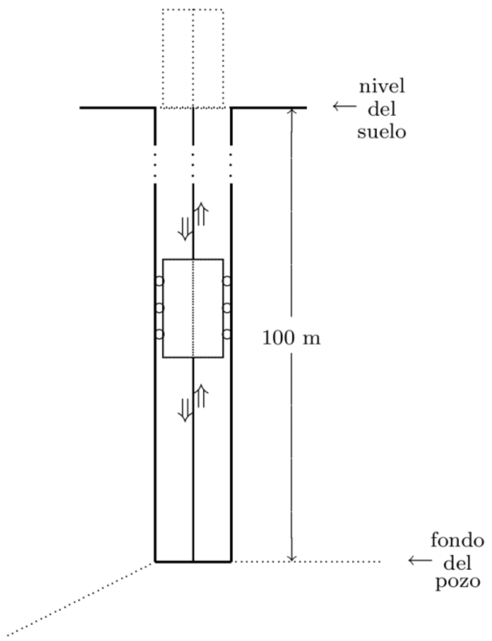


Figura 1: Montacargas.

Observemos que el modelo propuesto se puede escribir en la forma

$$f(t) = 2.5t^3 - 15t^2 = 2.5t^2\left(t - \frac{15}{2.5}\right) = 2.5t^2(t-6)$$

y que, por lo tanto, es un elemento de la siguiente familia de funciones

$$f_a(t) = at^2(t-6)$$

En la siguiente gráfica mostramos elementos de esta familia:

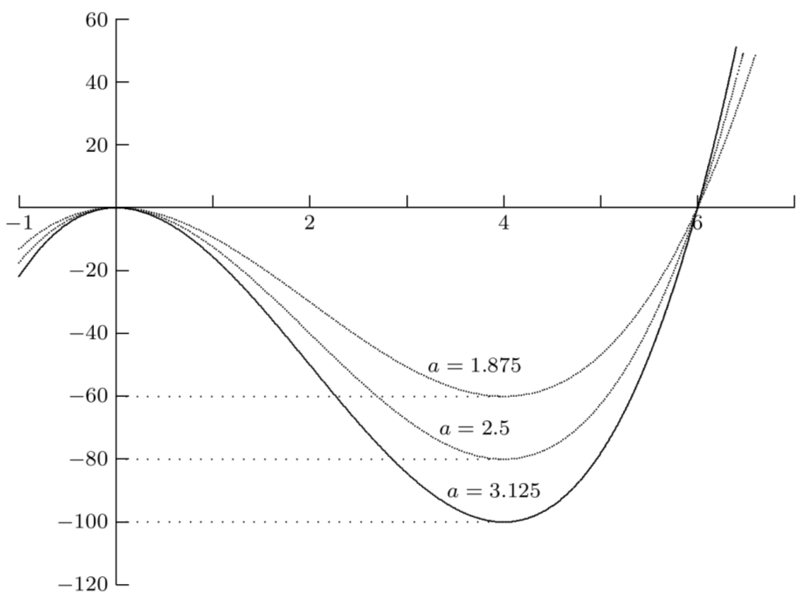


Figura 2: $f_a(t) = at^2(t-6)$

Para todos los elementos de esta familia, que dependen del parámetro a, se cumple que $f_a(0) = 0$, $f_a(6) = 0$, $f_a'(0) = 0$ y $f_a'(4) = 0$.

Sin embargo, estas funciones presentan varios defectos: no son simétricas, el descenso es más lento que el ascenso. El montacargas no se detiene al regresar ya que la derivada en $t = 6$ no es cero. Con el valor propuesto $a = 2.5$, no se alcanza la profundidad del pozo que es de 100 metros. Para encontrar el valor de a con el que se alcanza esta profundidad (ver figura 2), debemos resolver la ecuación

$$-100 = a(4^2)(4 - 6),$$

de donde obtenemos$a = 3.125$. Fijando a con este valor, se alcanza la profundidad del pozo, pero no se corrigen los otros defectos ya señalados. En consecuencia, podemos suponer que en esta actividad se espera, por parte de los alumnos, una propuesta alternativa para corregir los problemas mencionados.

Resultados

Para hacer su propio modelo, *Carmen* consideró que el montacargas:

1. Debería llegar al fondo del pozo.
2. Se debía detener totalmente cuando llegara al nivel del suelo.

Su estrategia para rediseñar el modelo fue la siguiente: Por ensayo y error y utilizando un software dinámico, fue modificando los parámetros a y b de la función$f(t) = at^3 + bt^2$ para ajustar la gráfica de tal forma que el mínimo se acercara a -100 metros. Finalmente eligió el valor 2.3 para el parámetro a y -15.2 para b. En la siguiente figura se puede apreciar que el modelo es muy sensible a la variación de los parámetros:

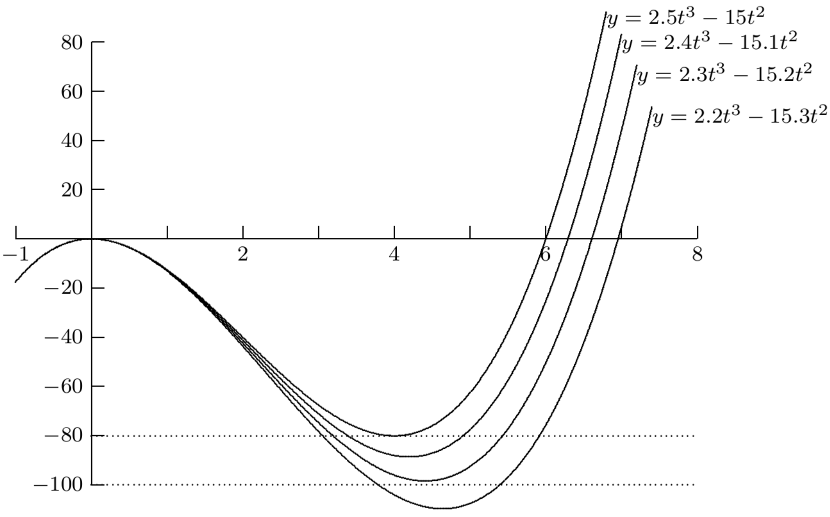


Figura 3: Variación de los parámetros en $f(t) = at^3 + bt^2$

Con este método de prueba y error obtuvo la función: $f_1(t) = 2.3t^3 - 15.2t^2$ (recordemos que el modelo dado es $y = 2.5t^3 - 15t^2$).

Consigue su primer meta ya que el valor mínimo de $f_1(t)$ es -98.35 que se alcanza a los 4.4 minutos. Sin embargo, todavía tiene el problema de que el montacargas no se detiene cuando sube. Para resolverlo, Carmen decide reflejar el pedazo de la gráfica de $f_1(t)$ entre $t = 0$ y $t = 4.4$ usando como eje de reflexión la recta $t = 4.4$. De esta forma conserva el mínimo; y como la gráfica es simétrica, la velocidad al inicio y al final del recorrido es cero.

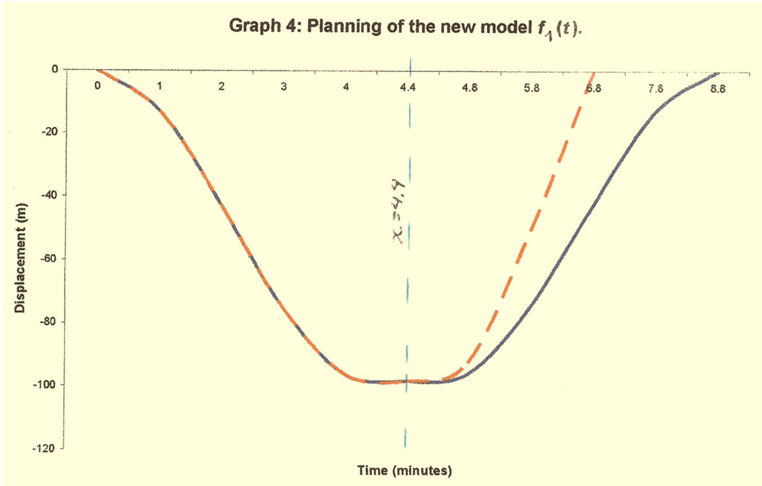


Figura 4: Planeando el nuevo modelo

Con esta estrategia, obtiene una gráfica que puede funcionar como modelo. Para obtener una función que se ajustara a su gráfica hizo un acercamiento discreto, tabuló $f_1(t)$ para seis valores de t; y luego, completó la tabla con valores simétricos. A continuación recreamos su idea en la siguiente tabla:

t	$f_1(t)$
0	0
1	-12.9
2	-42.4
3	-74.7
4	-96
4.4	-98.35 ← punto mínimo

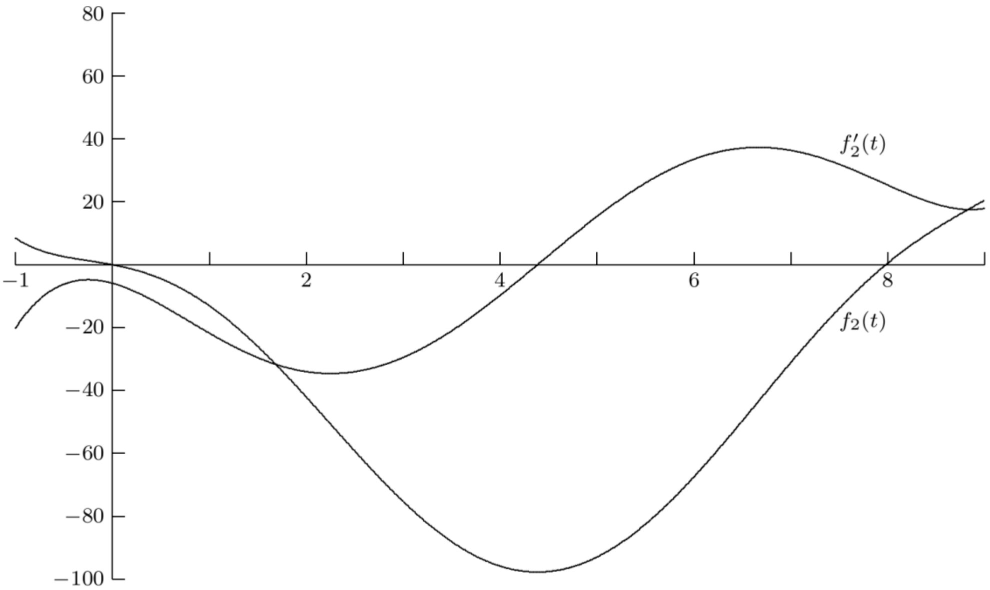
valores simétricos:

$f_1(t)$	t
0	8.8
-12.9	7.8
-42.4	6.8
-74.7	5.8
-96	4.8

Su técnica ahora fue usar *Excel* para ajustar un polinomio a sus datos. La función que obtiene es la siguiente:

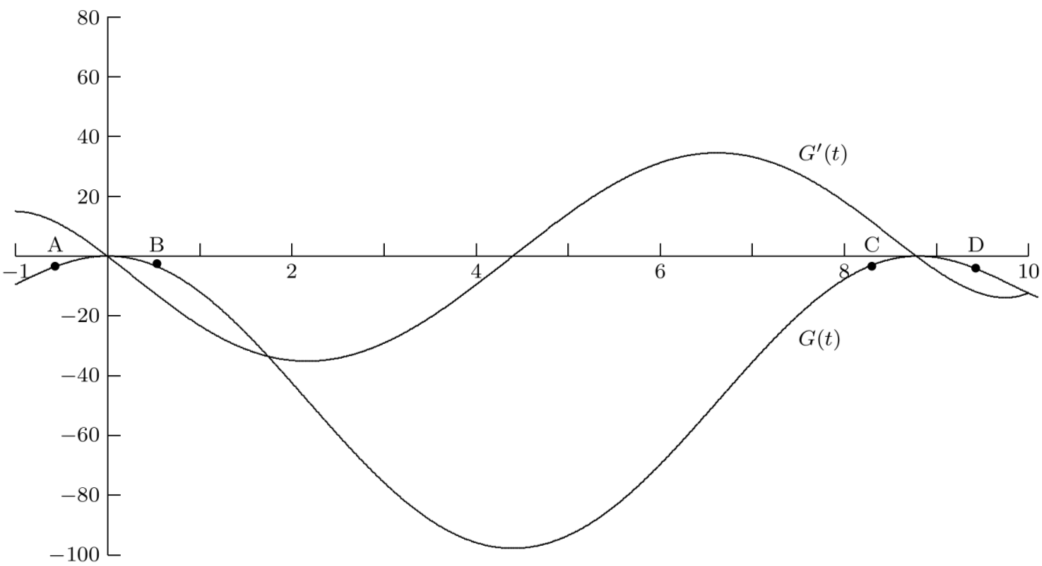
$$f_2(t) = 0.0085t^6 - 0.2234t^5 + 1.9027t^4 - 4.6561t^3 - 4.218t^2 - 5.869t + 0.0191$$

Lo que Carmen no verificó en su modelo fue que el montacargas se detuviera al nivel del suelo, es decir, que la velocidad al principio y al final fuera cero; si hubiera graficado la función y su derivada, quizá podría haberse percatado de esta falla. En la siguiente figura presentamos las gráficas de $f_2(t)$ y $f_2'(t)$, donde puede apreciarse que el elevador sólo se detiene en el fondo, cuando $t = 4.4$, pues $f_2'(4.4) = 0$; pero, aunque $f_2(0) = f_2(8.8) = 0$, se puede verificar que la derivada no es cero, y por lo tanto la velocidad en $t = 0$ y en $t = 8.8$ es diferente de cero.



Cabe observar que sería difícil modificar el modelo que propone Carmen para usarlo en otros pozos.

Su procedimiento es adecuado, sin embargo, de acuerdo a su estrategia, hubiera sido suficiente agregar algunos puntos en la tabla, como por ejemplo $A(0.5714, 3.5185)$, $B(0.5357, -2.5926)$, $C(8.2286, -2.5926)$ y $D(9.3357, -3.5185)$ antes de hacer el ajuste, de tal forma que se forzara un punto crítico al principio y otro al final, que aseguraran que la derivada ahí fuese cero. Sea $G(x)$ la función que resulta del ajuste hecho de esta manera. En la siguiente gráfica podemos apreciar como quedan $G(x)$y su derivada:



Por su parte, *Sebastián* hace la siguiente observación. Si la posición está dada por

$$s(t) = 2.5t^3 - 15t^2 \quad \text{metros,}$$

entonces

$$v(t) = s'(t) = 7.5t^2 - 30t \quad \text{m/min}$$

$$a(t) = s''(t) = 15t - 30 \qquad \text{m/min}^2$$

Como en el modelo dado la aceleración tiene la forma $a(t) = mt + c$, decidió que en su modelo también debía ser así. Por lo tanto, debía calcular los parámetros m y c.

Además decidió que el montacargas bajaría en 3 minutos y subiría en 3 minutos, en lugar de bajar en 4 y subir en 2; y que la profundidad máxima a la que llegaría sería 80m. Definió una función en dos partes, una para el descenso de $0 \le t \le 3$ (los primeros tres minutos), y otra para el ascenso (de $3 \le t \le 6$). Para la primera parte supuso que la aceleración estaba dada por

$a_1(t) = m_1 t + c_1$ para $0 \le t \le 3$ (1)

de donde

$$v_1(t) = \int_0^t a_1(x)dx = \int_0^t (m_1 x + c_1)dx = \frac{m_1}{2}t^2 + c_1 t \qquad (2)$$

$$s_1(t) = \int_0^t v_1(x)dx = \int_0^t (\frac{m_1}{2}x^2 + c_1 x)dx = \frac{m_1}{6}t^3 + \frac{c_1}{2}t^2 \qquad (3)$$

Supone que a la mitad del tiempo de descenso, el montacargas alcanza su máxima velocidad, de donde concluye que si $t = \frac{3}{2}$, entonces $a_1(t) = 0$. Sustituye estos datos en (1) y obtiene la ecuación

$$\frac{3}{2}m_1 + c_1 = 0 \quad (4)$$

Además establece la condición de que a los tres minutos el montacargas alcanzará una profundidad de 80 metros, es decir,

$$s_1(3) = -80$$

y a partir de la ecuación (3) obtiene una segunda ecuación:

$$\frac{3^3}{6}m_1 + \frac{3^2}{2}c_1 = \frac{27}{6}m_1 + \frac{9}{2}c_1 = -80$$

De esta forma, con esta ecuación y la (4), obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} \frac{3}{2}m_1 + c_1 = 0 \\ \frac{27}{6}m_1 + \frac{9}{2}c_1 = -80 \end{cases}$$

de donde obtiene los valores para los parámetros:

$$c_1 = -\frac{160}{3} \quad \text{y} \quad m_1 = \frac{320}{9}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (1), (2) y (3) obtuvo

$$a_1(t) = \frac{320}{9}t - \frac{160}{3} \quad \text{m/min}^2$$

$$v_1(t) = \frac{160}{9}t^2 - \frac{160}{3}t \quad \text{m/min}$$

$$s_1(t) = \frac{160}{27}t^3 - \frac{80}{3}t^2 \quad \text{m}$$

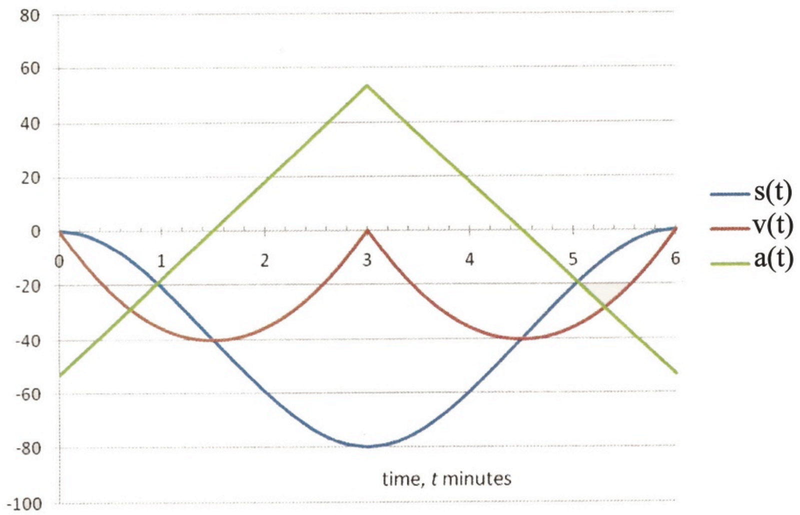
Ahora bien, para definir el segundo pedazo de las funciones (de $3 < t \le 6$), basándose en la gráfica de a_1, decide reflejar verticalmente con respecto a la recta $t = 3$; analíticamente hace primero lo siguiente

$$a_2(t) = a_1(3-(t-3)) = a_1(6-t)$$

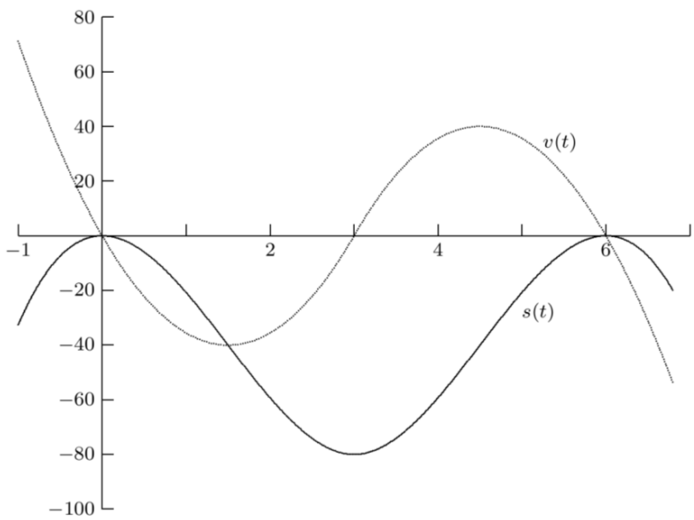
Aplica el mismo razonamiento para encontrar $v_2(t)$ y $s_2(t)$, y posteriormente presenta las tres funciones

$$a_2(t) = a_1(6-t)$$
$$v_2(t) = v_1(t-6) \leftarrow \text{aquí tiene un error}$$
$$s_2(t) = s_1(6-t)$$

Y sus gráficas:



El procedimiento que sigue lo lleva a conseguir un buen candidato para $s(t)$, aunque parte de la premisa incorrecta de suponer que las tres funciones son simétricas con respecto a la recta vertical $x = 3$. Bastaba con definir $s(t)$ a partir de s_1 y s_2 tal y como lo hace él, y luego simplemente derivar para calcular $v(t)$ y $a(t)$. En la siguiente gráfica mostramos el modelo propuesto por Sebastián con la versión correcta de la derivada:

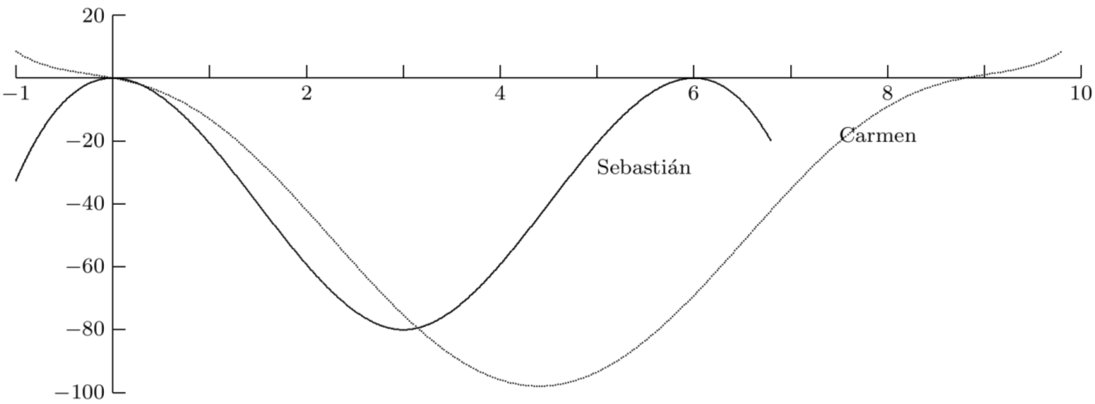


Es un buen modelo en el que fácilmente se puede cambiar la profundidad y el tiempo total del ascenso y descenso: basta establecer el tiempo de descenso y la profundidad deseada en la ecuación (5), es decir

$$s(t_d) = P$$

donde los parámetros t_d y P son el tiempo que tarda el montacargas en descender y la profundidad deseada, respectivamente.

Podemos ver que Carmen y Sebastián se aproximaron con estrategias y técnicas muy distintas entre sí. En la siguiente figura mostramos las gráficas de los dos modelos, la de Carmen en línea punteada y la de Sebastián en línea continua.



Conclusiones

Los resultados de este experimento exploratorio dan evidencia de que hace falta insistir en el análisis cualitativo de la situación que se está modelando. Así diseñada, la actividad definitivamente invitó a los alumnos a usar polinomios, toda vez que el modelo original propuesto pertenece a dicha familia de funciones. Nos cabe ahora la inquietud de pensar, con más ambición, en la posibilidad de que los alumnos cuenten con una variedad más amplia de familias de funciones, aunque por supuesto esto requeriría del correspondiente entrenamiento previo para los alumnos.

Monzó y Puig (en prensa) señalan la importancia del conocimiento de diversos tipos de funciones, ya que este tipo de conocimiento desempeña un papel importante al momento de decidir qué tipo de función será la que se use como modelo. Señalan también la importancia del conocimiento de las formas canónicas, por el significado de sus parámetros y los efectos que se producen al introducir variaciones en sus valores, lo cual resulta muy apropiado para sustentar las intenciones de nuestro trabajo.

Para nuestra actividad del montacargas, se podrían considerar, por ejemplo, la familia de las trigonométricas. Las funciones seno y coseno tienen la forma básica que se está buscando para el montacargas. Por ejemplo, podríamos proponer el modelo original definido por

$$f(t) = 50 \ \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{2} \right) - 50; \text{o análogamente,} \quad f(t) = 50 \ \cos \left(\frac{\pi}{3} t \right) - 50.$$

Y a través de un correcto manejo de los parámetros –que, dicho sea de paso, es el objetivo de nuestra investigación– podemos transformar la amplitud y el período, en este caso de la función $f(t) = a \ \text{sen}(bt - c) + d$ [análogamente, $f(t) = a \ \cos(bt - c) + d$]

para conseguir las mejoras requeridas al modelo. De esta manera, incrementaríamos las opciones para elegir un modelo más eficiente.

Reconocimientos

Queremos hacer explícito nuestro agradecimiento a la M. en C. Susana Cristina Martínez Sánchez por el profesionalismo con el que fueron elaboradas las figuras, así como la revisión técnica y corrección de estilo del documento.

Agradecemos el apoyo brindado por CONACYT.

Finalmente, les damos las gracias a los alumnos Carmen y Sebastián sin cuyo trabajo no hubiese sido posible el nuestro.

Referencias

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter* (Tesis doctoral). Disponible en: http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2003-0925-101838/inhoud.htm

Monzó, O. y Puig, L. (en prensa). *Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones*. En T. Rojano (Ed.) “Tecnologías digitales en la clase de matemáticas”, (pp. *-*). México: Ed. Trillas.