CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE NÚMERO IRRACIONAL EN FORMACIÓN DE PROFESORES: CONFLICTOS SEMIÓTICOS Y DESAFÍOS

Luis Reina, Miguel R. Wilhelmi , Pablo Carranza y Aitzol Lasa
I.E.S. N°9-011 "Del Atuel". Argentina
Universidad Nacional de Río Negro Argentina
Universidad Pública de Navarra España
luisd.reina@gmail.com, miguelr.wilhelmi@unavarra.es, pfcarranza@gmail.com, aitzol.lasa@unavarra.es

Resumen. La enseñanza y el aprendizaje formalizado de los números irracionales en la formación inicial de profesores de secundaria son problemáticos. Un análisis histórico y epistemológico de la noción de número irracional, sirve de base para enmarcar un estudio empírico, con estudiantes para profesor, que indaga el proceso de construcción de la noción de cardinalidad del conjunto de los números irracionales y la densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. El estudio se realiza por medio de algunos elementos teóricos del enfoque ontosemiótico del conocimiento de y de la instrucción matemáticos. La identificación, por parte del estudiante, de la cardinalidad de conjuntos infinitos, hace posible la emergencia de fenómenos relativos a los cardinales transfinitos, determinándose diferentes tipos de errores y conflictos cognitivos.
Palabras clave: irracionales, cardinalidad, densidad, conflictos semióticos
Abstract. The process of formally teaching and learning irrational numbers to future secondary school teachers is problematic. A historical and epistemological analysis of the notion of irrational number is basic for framing an empirical study with prospective teachers, to explore the process of construction of the notion of cardinality of the set of irrational numbers and density of $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. The study was performed using some theoretical elements of the ontosemiotic approach to mathematical knowledge and instruction. Cardinality of infinite sets is identified by students, providing phenomena related to transfinite cardinals and determining several types of errors and cognitive conflicts.
Key words: irrational, cardinality, density, semiotic conflicts

Motivación inicial y complejidad cognitiva

El proceso de construcción de la noción de cardinalidad del conjunto de los números irracionales y la noción de densidad son problemáticos (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004). Asimismo, la noción de densidad se relaciona fuertemente con la de continuidad funcional, donde emergen nuevas dificultades para la apropiación por los estudiantes. (Merenluoto, 2004).

Por otro lado, Reina, Wilhelmi y Lasa (2012) realizan un análisis histórico de la evolución de la noción de número irracional, determinando diferentes significados parciales asociados a dicha noción. Estas configuraciones permiten a los autores describir el funcionamiento del número irracional en distintos libros de texto de secundaria y la planificación de procesos de estudio relativos a la noción.

Otro aspecto clave es la identificación, por parte del estudiante, de la cardinalidad de conjuntos infinitos, donde se han identificado diversos fenómenos didácticos, tales como los de *aplastamiento* y *dependencia* (Arrigo y D'Amore, 1999; 2002; 2004).

Aquí, el objetivo es la determinación de diferentes tipos de errores (Wilhelmi, 2009) y de *conflictos semióticos* por los estudiantes de profesorado en los resultados del cuestionario empleado en la experimentación.

Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.228).

Para abordar este objetivo se propone la resolución de un cuestionario a futuros profesores de matemática del sur de Mendoza, Argentina, y se discuten los resultados (sección 4). Antes, en la sección 2, se hace una breve aproximación histórica y epistemológica de las nociones matemáticas involucradas. En la sección 3 se describen las restricciones epistemológicas, cognitivas y de enseñanza en procesos de estudio relativos al número irracional. El trabajo termina con una breve síntesis e implicaciones para la enseñanza.

Problemáticas epistemológicas e históricas asociadas a conjuntos infinitos

El cardinal de un conjunto es la característica que determina el número de elementos que éste tiene. Por ello, en Teoría de Conjuntos se define el número tres, por ejemplo, como la característica común de todos los conjuntos con tres elementos. De esta forma, al menos formalmente, para determinar si dos conjuntos con un número finito de elementos tienen el mismo cardinal es suficiente contar sus elementos. Sin embargo, si el conjunto es infinito, esta estrategia carece de sentido, puesto que no es posible "contar", en el sentido clásico y escolar del término, el número de elementos de un conjunto infinito.

Dos conjuntos A y B son coordinables, o equipotentes, y se escribe $A \sim B$ si, y sólo si, existe una función uno a uno F cuyo dominio es el conjunto A y cuyo recorrido es el conjunto B (Apostol, 1996, p.46).

Esta noción de coordinabilidad permite observar, por ejemplo, que el conjunto **P** de los números enteros pares y el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros tienen el mismo cardinal. Esto resulta paradójico en el contexto de los conjuntos finitos, puesto que desde los *Elementos* de Euclides se sabe que: "El todo es mayor que la parte". De hecho, la diferencia principal entre los conjuntos finitos e infinitos "es que un conjunto infinito puede ser semejante a alguno de sus subconjuntos propios, mientras que un conjunto finito nunca podrá ser semejante a uno de sus subconjuntos propios" (Apostol, 1996, p.47).

Además, desde Cantor sabemos que existen distintos “cardinales transfinitos”. El cardinal de los conjuntos numerables (coordinables con $\mathbb{N}$) se denota mediante el símbolo: $\aleph_0$. Puede demostrarse que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable, pero que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ no lo es. Así:

$$\text{Card}(\mathbb{Z}^{+}) = \text{Card}(\mathbb{Z}) = \text{Card}(\mathbf{P}) = \text{Card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$$

Cantor estudió si los conjuntos $\mathbb{N}$**,** de los números naturales, y $\mathbb{R}$, de los números reales, son coordinables. La respuesta implicó la noción de completitud de $\mathbb{R}$. Se demuestra que los conjuntos $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ tienen el mismo cardinal. Se dice que el cardinal de $\mathbb{R}$ es la potencia del continuo, se denota *c* o $\aleph_1$. Así:

$$\text{Card}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \text{Card}(\mathbb{R}) = c = \aleph_1$$

Con otras palabras, $\mathbb{R}$ no es numerable debido a la existencia de los números irracionales. Aún más, se demuestra que cualquier intervalo (a, b) en $\mathbb{R}$, $a < b$, tiene por cardinal la potencia del continuo ($\text{Card}((a, b)) = \aleph_1$). Esto se debe a que el conjunto de los números irracionales es *denso* en $\mathbb{R}$ (Iaffei, 2008).

Estos aspectos condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados. Estamos aquí interesados en determinar los errores y su tipología (figura 1).

$$\begin{cases}\text{Error}\begin{cases}\text{No anecdótico}\begin{cases}\text{Reproducible}\begin{cases}\text{Recurrente} \rightarrow \text{Obstáculo}\\ \text{No recurrente}\end{cases}\\ \text{No reproducible}\end{cases}\\ \text{Anecdótico}\end{cases}\\ \text{Fracaso}\end{cases}$$

Figura 1: Tipología de errores (Wilhelmi, 2009, p.8

Restricciones epistemológicas, cognitivas y de enseñanza

En esta sección se concretan algunas de las nociones didácticas introducidas en la sección anterior a procesos de enseñanza y aprendizaje de los números irracionales. Así, los objetos primarios involucrados son:

- *Lenguaje*. Símbolos tipo-letra correspondientes a los conjuntos numéricos, inclusión, flechas indicando una aplicación biyectiva, diagramas de Venn.
- *Situaciones*. Comparación de infinitos.
- *Definiciones*. Conjunto; cardinal de un conjunto finito, infinito; número natural, entero, racional, irracional (trascendente o algebraico); densidad de la recta real; probabilidad.

- *Proposiciones*. Proposiciones relativas al cálculo de probabilidades en conjuntos continuos (la probabilidad de obtener un valor determinado de un conjunto continuo es cero, etc.).
- *Procedimientos*. Coordinación de conjuntos infinitos; cálculo de probabilidades en conjuntos continuos. Media aritmética entre dos números a y b con a<b.
- *Argumentos*. Justificar la igualdad de cardinal de los naturales, enteros, racionales e irracionales algebraicos; refutar la igualdad de cardinal de los irracionales algebraicos y trascendentes; justificar la igualdad de cardinal de los intervalos reales. Demostrar la densidad del conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Es normal que los estudiantes sientan contradicha su intuición. El aprendizaje del universo finito, con sus relaciones y funcionamiento, se ha logrado a lo largo de muchos años y no sin dificultad. Así, antes de la aparición del infinito matemático, los procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos han mostrado su utilidad y eficacia en la resolución de una amplia gama de problemas.

Lo que hemos tratado en este apartado refleja la complejidad asociada a la construcción de la noción de número irracional en donde el infinito matemático aparece como un objeto que incide fuertemente en otras nociones asociadas a dicho conjunto, a saber, numerabilidad, cardinalidad y densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ junto a las nociones de continuidad numérica, geométrica y funcional (figura 2)

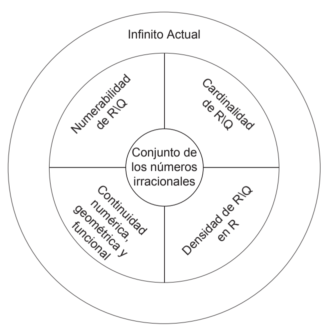

Figura 2: Interrelación entre el infinito matemático y la noción de número irracional

Los números irracionales se presentan entonces no sólo como un "paso obligado" para la apropiación de otras nociones como la de límite funcional sino como un objeto de gran complejidad para su enseñanza y aprendizaje aún en niveles superiores

Experimentación

En la búsqueda de posibles conflictos epistémicos y cognitivos, se plantea a estudiantes un cuestionario individual de diez preguntas: comparación de conjuntos numéricos (naturales, pares, enteros, racionales e irracionales; 4 ítems), comparación de conjuntos numéricos e intervalos (intervalo [0,1], 3 ítems), y cuestiones teóricas referentes a definiciones (números algebraicos y trascendentes, densidad y definición de cardinal; 3 ítems).

Se realizó primero un estudio piloto con cuestiones de comparación de cardinales de conjuntos e intervalos (grupo A). A continuación, se complementó el cuestionario con las cuestiones teóricas sobre definiciones (grupos B-D) (Tabla 1).

Grupo	Curso	Estudiantes
A	2	16
B	2	9
C	3	6
D	4	6

Tabla 1: Descripción de la muestra

Algunos resultados en la comparación de cardinales

El análisis de las respuestas incorrectas permite identificar algunos obstáculos identificados por Arrigo y D'Amore (2004), como la *dependencia* de los cardinales infinitos o el *aplastamiento*. En la figura 3 el estudiante utiliza una imagen visual en la argumentación, marcando una cuestión de tamaños ("los dobla en cantidad a los de los naturales").

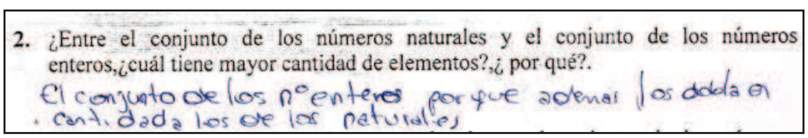
2. ¿Entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros,¿cuál tiene mayor cantidad de elementos?,¿ por qué?.
El conjunto de los nº enteros porque además los dobla en cantidad a los de los naturales

Figura 3: Dependencia de los cardinales infinitos

El mismo estudiante no distingue el infinito numerable del continuo ("$\mathbb{Q}$ y [0,1] tienen igual número de elementos"). La *asimetría de cardinales infinitos por inclusión*, es decir, la noción conjuntista de inclusión utilizada para determinar si un conjunto tiene mayor cantidad de elementos que otro, se erige en *obstáculo* para la adquisición de la noción de numerabilidad de un conjunto o la de coordinabilidad con el conjunto $\mathbb{N}$ (figura 4).

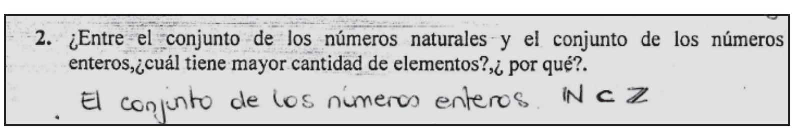
2. ¿Entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros,¿cuál tiene mayor cantidad de elementos?,¿ por qué?.
El conjunto de los números enteros. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Figura 4: Asimetría de cardinales infinitos por inclusión

En la tabla 2 se presentan los fenómenos observados en el ítem 2 (ver figura 4) por grupos. En el grupo D, es visible el fenómeno de *asimetría de cardinales infinitos por inclusión*.

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
Fenómeno de aplastamiento	4	0	5	1
Fenómeno de dependencia	2	2	0	0
Fenómeno de asimetría de cardinales por inclusión	8	7	0	5
Respuesta correcta	2	0	1	0

Tabla 2: Aparición de fenómenos en el ítem 2, por grupos

En las respuestas 3-6, se manifiesta de forma variable la alternancia de los fenómenos descritos anteriormente. Al comparar el conjunto de los números irracionales con el intervalo [0,1], un estudiante afirma que "aunque en el intervalo haya infinitos (números) no supera al gran conjunto (en referencia al conjunto de los números irracionales)". El ítem 10 muestra el grado de conocimiento de la definición de conjunto infinito entre los estudiantes de los grupos C y D. El conocimiento no es estable en el grupo (tabla 3).

	Grupo C			Grupo D		
Ítem 10	No	Si	NC	No	Si	NC
¿Conoce la definición de cardinal de un conjunto infinito?	2	1	3	2	2	2

Tabla 3: Conocimiento de la definición de conjunto infinito

Algunos resultados de las cuestiones teóricas

Las respuestas sobre la densidad de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ son incorrectas en su práctica totalidad, a excepción de un único estudiante del grupo D (tabla 4).

No es denso porque:	Grupo B	Grupo C	Grupo D
Existen otros números en la recta real que no son irracionales	1	0	1
Porque es no acotado	1	0	0
Porque no es cerrado	0	1	0
Porque no es cerrado ni acotado	0	1	0
No es denso (no argumenta)	1	1	0
Sí es denso porque:			
Es un conjunto infinito	1	3	1
Porque no se pueden convertir nunca en fracción	1	0	0
No sabe / no contesta	4	0	2

Tabla 4: Respuestas al ítem 9, grupos B, C y D

Estas respuestas muestran una conceptualización inestable de la noción de densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, junto con serios conflictos epistémicos en los cuales una correcta intuición se argumenta a través de una noción improcedente (figura 5).

9. ¿Es denso el conjunto de los números irracionales? ¿Por qué? ¿Podría dar un argumento matemático?

(Grupo B) "Sí, porque es infinito. Porque no existe intervalo natural inicial con el cual se pueda dar una función inyectiva, o sea, finito."

(Gr. B) "Sí, porque no se pueden convertir nunca en fracción".

(Gr. C) "No es denso, porque el conjunto de los números irracionales no es cerrado".

(Gr. D) "Entre un intervalo [1,2] hay infinitos."

(Gr. D) "No es denso, ya que existen números en la recta que no son irracionales."

(Gr. D) "No, porque para que un conjunto sea denso debe haber entre dos números infinitos números."

Figura 5: Respuestas al ítem 9

Así, algunas de las respuestas dadas por los estudiantes, representativas del significado personal atribuido por éstos a los objetos matemáticos involucrados en las tareas propuestas, son las siguientes:

- *Densidad e infinito matemático*. La cardinalidad del conjunto infinito es equiparable a las nociones de densidad e infinito matemático: "conjunto infinito equivale a conjunto denso".
- *Densidad y definición de racional.* La densidad como una propiedad de los números no racionales ("es denso porque no se pueden convertir nunca en fracción").
- *Densidad y completitud.* La completitud de $\mathbb{R}$ y la manipulación del modelo gráfico lineal es problemática: "no es denso porque existen números en la recta que no son irracionales".
- *Densidad y conjunto cerrado.* Las nociones de conjunto acotado y conjunto cerrado interfieren en la noción de densidad: "no es denso porque no es cerrado", "hay infinitos en [1,2]".

Síntesis e implicaciones para la enseñanza

Los futuros profesores necesitan conocer con profundidad las propiedades del número irracional para poder enseñar su construcción viable y eficaz. La emergencia de errores reproducibles y en muchos casos recurrentes, plantea la necesidad de un tratamiento a largo plazo. En el estudio, se observa, además de los fenómenos de aplanamiento y dependencia, el de "asimetría de cardinales infinitos por inclusión".

La fundamentación teórica y el contraste experimental permite concluir que:

- Los significados personales de los estudiantes sobre el concepto de cardinalidad de un conjunto infinito se presenta inestable o no se presentan; en general, tales significados se hallan ligados a la problemática del infinito actual.

- La noción de cardinalidad es la que mayores dificultades presenta. La manifestación de conflictos epistémicos y cognitivos, en las respuestas de los estudiantes, introduce una gama de errores que atraviesa las respuestas de los estudiantes.
- Los futuros profesores no lograron un conocimiento que les permitiera zanjar el problema de la distinción entre las cardinalidades de los conjuntos infinitos, seña de esto último es la manifestación de fenómenos de tipo didáctico como los de dependencia, aplastamiento y asimetría de cardinales infinitos por inclusión.
- La noción de infinito potencial parece actuar en forma resistente ya que no permite emerger la noción de infinito actual presente en la cardinalidad del conjunto de los números irracionales.
- La noción de densidad se presenta también inestable o no es parte de la significación personal de los alumnos, siendo un problema para la construcción de la noción de número irracional.

Referencias bibliográficas

Apostol, T. (1996). *Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté.

Arrigo G. y D'Amore B. (1999). 'Lo veo, pero no lo creo'. Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*, 11(1), 5–24.

Arrigo G. y D'Amore B. (2002). "Lo vedo, ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica* e *la sua didattica*, *1*, 4-57.

Arrigo G. y D'Amore B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas. *Educación Matemática*, *16* (002), 5-19.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221-252.

Iaffei B. (2008). *Los números irracionales como objeto de saber. Curso para profesores*. XXXI Reunión de Educación Matemática. (pp. 1–33) Cuyo, ARG: Unión Matemática Argentina y Universidad Nacional de Cuyo.

Merenluoto, K. (2004). Problems of conceptual change: continuity of a function. In Kaarina Merenluoto & Mirjamaija Mikkilä-Erdmann (Ed.), *Learning research challenges the domain specific approaches in teaching* (pp. 100–108). Turku: University of Turku.

Reina, L., Wilhelmi, M. R. y Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. *Educación Matemática*, *24*(3), 67–97. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525846003.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers : a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*, 453–467.

Wilhelmi, M. R. (2009). Didáctica de las Matemáticas para profesores. Las fracciones: un caso práctico. En C. Gaita, *Enseñanza de las Matemáticas IV*. (pp. 1-22) Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú – Departamento de Ciencias. Recuperado de http://www.pucp.edu.pe/departamento/ciencias/matematicas/ irem/index.html.