EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA Y SUS REFERENCIAS SEMIÓTICAS

María Rosa Rodríguez y Jesús Alberto Zeballos
Universidad Nacional de Tucumán Argentina
mrrodriguez@face.unt.edu.ar , jesuszeballos@tucbbs.com.ar

Resumen. Las ciencias fácticas tienen contenido existencial que se corresponde con la realidad. En cambio, las ciencias formales, desde el siglo XIX, sostienen una dimensión sintáctico-formalista, sin contenidos semántico y pragmático. Por lo cual la simbología matemática se presenta como vacía, o sea que no habla de nada. Esto daría derecho al alumno a cuestionar "Y... aprender este lenguaje que no habla de nada, ¿de qué me sirve?" El profesor se verá obligado a demostrar que este lenguaje es fecundo, que puede hablar de todo y que se constituye en la estructura del lenguaje científico porque, precisamente, no habla de nada específico.
En este trabajo reflexionamos acerca de las relaciones semánticas y pragmáticas que encierra la Matemática pura y que nos conduce a consideraciones de la Ontología matemática, correlacionando genéticamente el pensamiento concreto y el abstracto.
Palabras clave: Existencia, Semiótica, Cuantificadores
Abstract. Factual sciences have existential content which corresponds to reality. On the other hand, the formal sciences, since the 19th century, argue a sintactico-formalista dimension, without semantic and pragmatic content. So the mathematical symbolism presents how empty, or does not speak of anything. This entitles the student to question "And… learn this language that does not speak at all, what do I use?" The teacher will be forced to show that this language is fruitful, that we can talk about everything and that it constitutes the structure of scientific language because, precisely, do not speak of anything specific.
In this paper we reflect on the semantic and pragmatic relations contained in pure mathematics and that leads to considerations of mathematical ontology, genetically correlating the abstract and concrete thought
Key words: Existence, Semiotics, Quantifiers

Introducción

En el desarrollo cognoscitivo aparece un nivel imprescindible a la supervivencia humana: la abstracción y la generalización. En atención a ello, las leyes científicas y las nociones generalizadas tienen contenidos que se corresponden con la realidad. ¿Puede afirmarse lo mismo de la Matemática, cuya validez se fundamenta más en su naturaleza formal y en la incorporación a un sistema de ideas, enunciados, principios e hipótesis, que en su correlación con fenómenos reales?

En el nacimiento de las ciencias formales no se daba el problema de la existencia de los entes matemáticos. Para Platón existían en el mundo de las ideas, mientras que para Aristóteles, eran simultáneamente leyes del ser, del actuar y del pensar.

Durante el siglo XIX los matemáticos se liberan de la relación semántica con una realidad extramatemática. Para George Boole (1854) eran "leyes del pensamiento, en las que se funda la teoría matemática de la lógica y la probabilidad".

En el siglo XX, continúa esta orientación sintáctico-formalista, privando al lenguaje lógico-matemático de toda dimensión semántica o pragmática. Para el Positivismo Lógico la Matemática no tiene relación con el pensamiento sino con el lenguaje; y de él sólo atiende su dimensión formal-sintáctica y la considera como una convención lingüística universalmente aceptada.

Bertrand Russell (1919), escribe: "Lo más importante del siglo pasado es el descubrimiento de la Matemática pura" y afirma que "... es una ciencia en la que no sabemos de qué hablamos, ni si lo que decimos es verdad". Luego, uniendo la Lógica y la Matemática, la define como "La clase de todas las proposiciones que contienen una o más variables, 'p', 'q'… combinadas por medio de constantes lógicas, que sólo representan operaciones entre símbolos. En esta concepción, la simbología matemática es vacía, no habla de nada.

Desde este punto de vista, sería un interesante desafío para el alumno que el profesor proponga en la clase inaugural de Matemática: "Ahora vamos a aprender a utilizar un lenguaje especial, el lenguaje matemático, que, en realidad, no habla de nada".

Si el aprendizaje de la Matemática enseña a pensar, vale el desafío. Si es sólo un conjunto de reglas mecánicas de transformación, este problema es pura excrecencia filosófica y el alumno tendrá derecho a pensar: "Y... aprender este lenguaje que no habla de nada, ¿de qué me sirve?"

Es derecho del alumno y obligación del profesor demostrar que este lenguaje es fecundo y puede hablar de todo, constituyéndose así en la estructura de todo lenguaje científico porque, precisamente, no habla de nada.

En este trabajo reflexionamos acerca de las relaciones semióticas que encierra la Matemática pura. Dichas consideraciones son:

a) Sintácticas: Relación de símbolos y fórmulas entre sí. Reglas de formación y de transformación. Deducción de teoremas a partir de axiomas.

b) Semánticas: Relación entre símbolos y objetos. ¿Los objetos matemáticos son reales o ideales? ¿Qué tipo de existencia se atribuye cuando se dice: A todo número real le corresponde un punto en la recta real o Todas las cónicas son curvas en el plano?

c) Pragmáticas: Relación entre símbolos y sus intérpretes. ¿Son operaciones que se corresponden con funciones propias de los sujetos humanos? ¿Representan conexiones neurológicas-cognitivas o expresiones lingüísticas?

Como se puede apreciar, la existencia de los entes matemáticos es un problema que excede los límites lógico – matemáticos para introducirse en el ámbito de la Semiótica y, a través de ella, en la Ontología Matemática. ¿Cómo existen los objetos lógico-matemáticos? ¿Son meramente conceptos originados en la mente? ¿Cómo se relacionan con la realidad extramatemática? La "prueba de existencia" en Matemática, cuando establece la "Condición de existencia de la inversa de una matriz" o la "Condición de existencia de la integral definida" ¿Es ontológicamente válida?, ¿Cómo se caracterizan estas condiciones?

Génesis de las Operaciones Lógico-matemáticas

La Epistemología genética da una respuesta razonable a estas cuestiones, cuando establece que las operaciones lógico-matemáticas proceden de las acciones más generales que ejercemos sobre objetos o grupos de objetos: reunir, disociar, ordenar, modificar el orden,.... Es decir, se originan en la Semántica y en la Pragmática. Por un lado, estas acciones comportan un aspecto físico en función de los objetos mismos; y por otro, intervienen coordinaciones generales (subjetivas) de esos actos.

La raíz de las operaciones lógico-matemáticas y su posible aplicación al mundo físico-real se encuentra en esta actividad, coordinadora de las acciones físicas mismas, lo que denominamos "el pensamiento concreto". En las fases ulteriores, se observa una diferenciación creciente entre las operaciones físicas y las operaciones lógico-matemáticas, dando nacimiento al "pensamiento abstracto". Finalmente, las construcciones axiomáticas son elaboradas de un modo absolutamente independiente de la realidad física.

De este modo, es posible que los sistemas axiomáticos, puramente sintácticos, adquieran dimensiones semánticas y pragmáticas y puedan modelar el conocimiento de todas las ciencias empíricas, dándonos un conocimiento verdadero del mundo real, con el que en principio no tenían nada que ver.

Ya Carl Gauss (1801) caracterizó la Matemática como el trabajo del espíritu humano, destinado tanto a estudiar como a conocer, tanto a buscar la verdad como a encontrarla, reivindicando así el lema galileano (Galilei, 1610): "El universo está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es totalmente imposible entender humanamente una palabra y nos agitamos vanamente en un oscuro laberinto". Idea ilustrada por Isaac Newton (1678) y Gotfried Leibniz (1675) en el cálculo infinitesimal. Newton crea el cálculo infinitesimal para explicar la mecánica universal y las relaciones de fuerza en el universo; mientras que Leibniz se centraba en el problema teológico de la compatibilidad de la omnisciencia de Dios con su libertad ¿Cómo un cálculo matemático modela realidades tan distintas?

Del mismo modo, Newton encontró un marco teórico para su *Philosophia Naturalis Principia Mathematica* en la Geometría euclideana. En tanto que, Albert Einstein recurre a las Geometrías no euclideanas, consideradas por sus mismos autores como juegos imaginarios inaplicables al espacio físico real, para la construcción de la teoría de la relatividad.

Perspectiva Lógica de la Existencia Real

El término “real” deriva del término latino ‘res - i’ que significa cosa, objeto. ‘Objectum’, a su vez, significa ‘arrojado fuera’ del sujeto ¿Un número y todos los objetos matemáticos existen realmente o son meros conceptos?

Para la Lógica tradicional aristotélico-tomista, la existencia no constituía un problema. Se suponía que la verdad y la validez implicaban la existencia de los objetos-sujetos de los cuales se hablaba en las proposiciones.

En este sentido, tienen contenido existencial las cuatro formas típicas de las proposiciones: Universal afirmativa (A: Todos los S son P), Universal negativa (E: Ningún S es P), Particular afirmativa (I: Algunos S son P) y Particular negativa (O: Algún S no es P).

Sus relaciones lógicas son las siguientes:

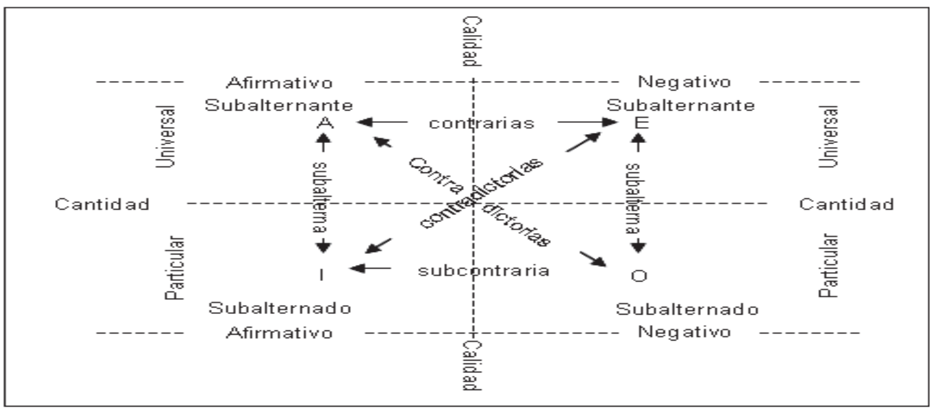

Figura N° 1: Cuadrado Tradicional de Oposición

Este cuadro tuvo vigencia indiscutible hasta el nacimiento de la Lógica Matemática, con George Boole, Gottlob Frege, Bertrand Russell, David Hilbert, …

En la actual simbolización, las cuatro formas típicas del cuadro de oposición adquieren las siguientes expresiones:

$(\forall x)(F x \supset G x)$	**A**	**E**	$(\forall x)(F x \supset - G x)$
$(\exists x)(F x . G x)$	**I**	**O**	$(\exists x)(F x . - G x)$

Inferencias Silogísticas

Sobre la base de las inferencias inmediatas del cuadrado de oposición se construyó la Teoría del Silogismo, como un sistema axiomático deductivo.

Con la aparición de la Lógica matemática, cambiaron las reglas de inferencia.

La Lógica cuantificacional, con la distinción entre operadores universales y existenciales, y la Lógica de clases, con sus conceptos de conjunto nulo y universo vacío, evidenciaron la invalidez de cuatro modos silogísticos: *Darapti, Felapton, Bamalip, y Fesapo,* válidos en base al cuadro tradicional de oposición.

DARAPTI - 3ª Figura	FELAPTON - 3ª Figura	BAMALIP - 4ª Figura	FESAPO - 4ª. Figura
$(\forall x)\ (M x \supset P x)$	$(\forall x)\ (M x \supset - P x)$	$(\forall x)\ (P x \supset M x)$	$(\forall x)\ (P x \supset - M x)$
$(\forall x)\ (M x \supset S x)$	$(\forall x)\ (M x \supset S x)$	$(\forall x)\ (M x \supset S x)$	$(\forall x)\ (M x \supset S x)$
$(\exists x)\ (S x \,.\, P x)$	$(\exists x)\ (S x \,.\, - P x)$	$(\exists x)\ (S x \,.\, P x)$	$(\exists x)\ (S x \,.\, - P x)$

Obsérvese que en estos silogismos ambas premisas son proposiciones universales; en tanto que la conclusión es una proposición particular. La razón por la que se impugna su validez estriba en el hecho de que las premisas no tienen contenido existencial, esto es, no afirman la existencia de los sujetos, mientras que la conclusión sí lo asegura. En los silogismos nombrados se agrega nada menos que la existencia de los individuos.

El Contenido Existencial en la Lógica-Matemática

La explicación está dada en el hecho de que las proposiciones universales son 'condicionales generalizados'. Cuando expresamos "$(\forall x)\ (F x \supset G x)$" no se afirma que existan **x** que sean F o G, sino que para cualquiera que sea el **x**, si es F entonces es G.

Los enunciados "Todos los determinantes tienen como resultado un número real" y "Todas las cónicas son curvas en el plano" tienen idéntica estructura lógica y en consecuencia, tienen las mismas características hipotéticas: no afirman la existencia de los determinantes ni de las cónicas, sino que, si existieran, los primeros tendrían como resultado un número real y las segundas serían curvas en el plano.

Los matemáticos aseguran que los determinantes y las cónicas existen en el mundo ideal y son igualmente representables por una cierta simbología.

Los enunciados particulares o existenciales son, en cambio, categóricos y afirman la existencia de por lo menos uno de los sujetos a los que se refiere.

Por ejemplo: el enunciado "Algunas funciones son integrables" expresa que para algunas funciones existe la integral definida.

Equivalencias de Operadores

Por los teoremas de *Conversión de Operadores* se puede transformar una proposición universal en la negación de su particular relativa, que niega el segundo predicado, y viceversa. Así, una proposición de tipo **A** es equivalente a la negación de su contradictoria **O** y viceversa.

Ejemplos: "Todas las series convergentes tienen suma" es equivalente a "No existe serie convergente que no tenga suma".

En símbolos: $(\forall x)\ (F x \supset G x)\ \equiv\ -(\exists x)\ (F x \,.\, - G x)$

De la misma manera se transforman las proposiciones **E** en **I** negada, **I** en **E** negada y **O** en **A** negada. Los siguientes teoremas expresan estas relaciones:

"$(\forall x)\ (F x \supset G x)\ \equiv -(\exists x)\ (F x\ .- G x)$" (A = -O)

"$(\forall x)\ (F x \supset - G x)\ \equiv -(\exists x)\ (F x\ .\ G x)$" (E = -I)

"$(\exists x)\ (F x\ .\ G x)\ \equiv -(\forall x)\ (F x\ \supset - G x)$" (I = -E)

"$(\exists x)\ (F x\ .- G x)\ \equiv -(\forall x)\ (F x\ \supset\ G x)$" (O = -A)

La naturaleza de estas cuatro formas de proposiciones entraña curiosas consecuencias en relación a las inferencias de *contrariedad, subcontrariedad y subalternación***,** puesto que algunas de ellas pasan de proposiciones sin contenido existencial a otras que afirman la no existencia.

Se sabe que hay universos del discurso con miembros y otros sin ellos, nulos o vacíos.

La Lógica matemática advierte que la **validez** de estas inferencias depende:

- De la estructura lógica de las proposiciones (condicional en las universales, categórica en las particulares),
- Del universo del discurso (con miembros o vacío) y
- Del contenido existencial de los enunciados.

Las proposiciones universales no afirman categóricamente la existencia de los individuos, pero, pueden negarla. Las proposiciones particulares afirman o niegan categóricamente la existencia de sus sujetos.

En consecuencia, la única inferencia incontrovertible del cuadro de oposición (válida para todo universo del discurso) es la derivada de la relación de contradicción: dos proposiciones contradictorias no pueden ser ambas verdaderas ni ambas falsas al mismo tiempo y en la misma relación.

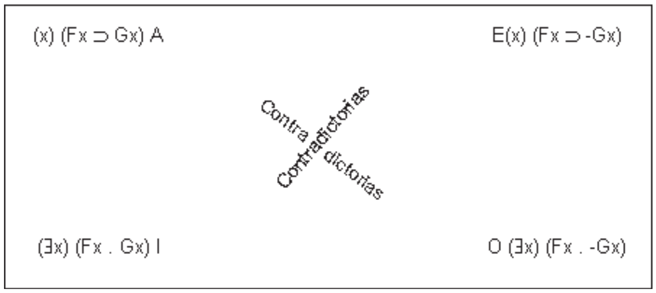

Figura N° 2: Cuadrado de Oposición de Boole

Esta conclusión, la única lógicamente válida, puede referirse a cualquier universo del discurso: nulo (o vacío) o que contenga algún elemento existente.

Acerca de la Existencia Real

En los párrafos precedentes hemos utilizado frecuentemente términos como ‘contenido existencial’, ‘que afirma (o niega) existencia’, ‘operador existencial’ y otros similares, que giran en torno al concepto común de existencia, para diferenciar lo que existe realmente de aquello que no existe o, si se prefiere, para poder distinguir la realidad de la fantasía.

Suponemos que existe un mundo exterior a la conciencia, estratificado en diversos niveles e independiente de ella. Los hombres conocen ese mundo y, por ello, sobreviven en él.

Las ciencias fácticas hablan de una realidad o irrealidad de la representación conceptual del mundo extramental. Tanto los fenómenos emocionales como los conceptuales tienen una realidad que es independiente de la existencia física que pudieran representar. Es necesario distinguir entre el mundo físico y la representación que nos hacemos de ellos.

En el nivel de abstracción y de generalización se puede comprobar que las leyes científicas y las nociones generalizadas no tienen realidad sólo como entidades lingüísticas, como enunciados nomológicos, sino que se corresponden con la realidad óntica de los fenómenos y sus relaciones legales.

¿Podrá afirmarse lo mismo de los conceptos y teoremas matemáticos? La realidad de estas ‘abstracciones’ se basa, más que en su naturaleza conceptual, en su formulación lingüística y en la incorporación a un sistema de ideas, enunciados, principios e hipótesis, que conforman un sistema teórico.

Si los sistemas lógicos y matemáticos tienen únicamente dimensión sintáctica entonces el problema de la verdad se reduce a la coherencia interna de sus símbolos y a la consistencia deductiva entre axiomas y teoremas.

Para aplicarse a la realidad habría que agregar las dimensiones semánticas y pragmáticas al lenguaje matemático y un supuesto existencial.

Así se puede aceptar la "prueba de existencia" en Matemática, cuando se establece la "Condición de existencia de la inversa de una matriz" o la "Condición de existencia de la integral definida".

Por lo tanto, hay distintas formas de existencia real, supuestas en los diversos usos del lenguaje. Cuando dos hablantes dialogan, dan por supuesto que aquello de lo que hablan existe en un determinado universo del discurso, tal como las reglas de ese universo lo predeterminan.

Conclusiones

La existencia del mundo y de los objetos reales constituye un *supuesto ontológico indemostrable* de la ciencia.

Ya aseveramos que el lenguaje matemático "es fecundo y puede hablar de todo" ¿a qué se debe esa fecundidad? La respuesta platónico-aristotélica es ingenua porque no se plantea el problema de la existencia y la del positivismo lógico es estéril porque se reduce a meras relaciones sintácticas entre las fórmulas, que no hablan de nada. En cuanto a la propuesta de Boole, ¿Cómo es que las leyes del pensamiento pueden aplicarse a la realidad?

En el pensamiento abstracto, las operaciones matemáticas comienzan a desbordar todos los aspectos de la realidad experimental y se constituyen como sistemas axiomáticos formales, puramente sintácticos. No tienen contenido, es decir, no hacen referencia a ningún tipo de objeto u operación extralingüística. Al carecer de dimensión semántica, el problema de la verdad se reduce a la coherencia interna de sus símbolos y a la consistencia deductiva entre axiomas y teoremas, prefijada por definiciones y reglas propias del sistema mismo. De este modo se cumple el ideal hilbertiano de preservar la pureza lógico-deductiva de los sistemas axiomáticos, evitando las interferencias del mundo físico real y las incertidumbres del sujeto que elabora esos sistemas.

Sin embargo, ¿cómo es posible que estos sistemas formales, puramente sintácticos, puedan modelar el conocimiento de todas las ciencias empíricas y darnos un conocimiento verdadero del mundo real, con el que en principio no tienen nada que ver? La Epistemología genética muestra el proceso por el cual el pensamiento llega al máximo nivel de abstracción. El recorrido inverso conecta esa abstracción con el pensamiento concreto, por el cual adquiere dimensiones semánticas y pragmáticas. Las ciencias fácticas recurren al mismo método para corroborar sus hipótesis y conectar las leyes generales con las condiciones iniciales.

Esto muestra la historia de la Matemática, ya que desde Pitágoras hasta nuestros días, pasando por Galilei, Leibniz, Newton, Galois, Einstein, … pusieron en vigencia lo que afirmaba Carl Gauss:

"La Matemática es el trabajo del espíritu humano, destinado tanto a estudiar como conocer, tanto a buscar la verdad como a encontrarla".

Referencias Bibliográficas

Boole, G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theory of Logic and Probabilities*. London: Wyton & Maberley.

Gauss, C. (1966). *Disquisitiones Arithmeticae*. New Heaven: Yale Univ. Press.

Galilei, G. (1981). *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre dos Nuevas Ciencias*. Madrid: Editora Nacional.

Klimovsky, G. y Boido, G. (2005). *Las Desventuras del Conocimiento Matemático.* Bs. Aires: A-Z.

Leibniz, G. (1850). *Leibnizens Mathematische Schriften*. London-Berlin: Halle.

Newton, I. (1934). *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Berkeley: University of California Press.

Piaget J. (1975) *Introducción a la Epistemología Genética*. Tomo I. Buenos Aires. Paidós.

Quine, W. (1962). *Los Métodos de la Lógica*. Barcelona: Ariel.

Russell, B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Allen & Unwin.

Zeballos, J. A. (2003). *Lógica.* Tucumán: El Graduado.

Zeballos, J. A. (2006). *Ensayos Económico-Filosóficos.* Tucumán: Instituto de Epistemología. UNT.