

## SISTEMAS LINEARES: DO ENSINO MÉDIO ÀS ENGENHARIAS

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza y Larissa Martins Simmer  
 Instituto Federal do Espírito Santo  
 alicevfs@hotmail.com, mariaalice@ifes.edu.br, lsimmer05@hotmail.com

Brasil

**Resumen.** Sistemas lineares integram conteúdos programáticos do Ensino Fundamental e se constituem em importante ferramenta descritiva e de decisão em diferentes situações no âmbito do ensino superior. Foi estudado o conceito de sistemas lineares de estudantes do ensino médio e superior das Engenharias (N=245), além de verificar a extensão da produção de significados e seus desempenhos quando aplicam tal conceito em problemas analíticos e de suas áreas de atuação, por meio de análise qualitativa e quantitativa, à luz, principalmente, de teorias sócio-históricas, do discurso e de solução de problemas. O estudo revelou, principalmente, que 89% dos estudantes do ensino médio não responderam ou responderam erradamente sobre o que era um sistema linear, contra 76% dos estudantes do Ensino Superior. 42% dos estudantes resolveram o problema proposto corretamente, sendo que quase a metade destes, o interpretaram erradamente.

**Palabras clave:** sistemas lineares, engenharia, solução de problemas, significados

**Abstract.** Linear systems integrate programmatic contents of Middle School and are an important descriptive tool and decision in different situations in higher education. The concept of linear systems of students in secondary and higher education of Engineering (N = 245) was studied, and verify the extent of production of meanings and and their performance when they implement this concept in analytical problems and their areas of expertise through qualitative and quantitative analysis, the light mainly from socio-historical theories of discourse and problem solving. The study revealed mainly that 89% of high school students did not respond or responded incorrectly on what was a linear system, compared to 76% of higher education students. 42% of students correctly solved the proposed problem, and almost a half of these, misinterpreted it.

**Key words:** linear systems, engineering, problem solving, meanings

### O problema

Sistema linear é um conteúdo escolar aplicado em problemas da Matemática de Ensino Médio e Superior, tendo, no entanto, início de seu estudo no Ensino Fundamental. Seus usos são exigidos em diferentes contextos educacionais e científicos porque envolvem a solução de problemas.

No contexto do Ensino Superior encontra-se a necessidade do uso desses conteúdos escolares, por exemplo, para o estudo do fluxo de gás em um gasoduto repleto de ramificações; quando precisamos controlar o escoamento de veículos em entroncamentos de vias; quando controlamos a elaboração de um produto que demande diferentes etapas e insumos. Particularmente, são os sistemas lineares que auxiliam na obtenção de respostas para situações desse tipo.

Mas, a solução de problemas, em geral, está no final de uma série de etapas - não lineares e que se autoinfluenciam - que se iniciam com a construção do conceito científico de determinada ferramenta matemática quando se quer valorizar a produção de significados pelo estudante. É o que diz Vygotsky (2008), ao declarar que o desenvolvimento de um conceito científico geralmente começa com sua definição verbal e com sua aplicação em operações que ele chamou de não-espontâneas, pois necessitam de atitude mediada em relação ao seu objeto. Os conceitos

científicos se desenvolvem até chegarem em um nível elementar e concreto, ao contrário dos conceitos espontâneos.

Nesse sentido, cresce a importância de se conhecer a produção de significados pelos estudantes dos conceitos até então desenvolvidos, de ferramentas que irão auxiliá-los em respostas a problemas mais avançados, como é o caso de sistemas lineares. De início, é preciso compreender o que seja uma equação, uma equação linear, um sistema de equações, saber manipulá-los matematicamente, conhecer seus significados para que, posteriormente, se possa utilizá-los adequadamente na solução de problemas. Espera-se que estudantes de Ensino Médio e Superior estejam com esses conceitos em nível avançado, uma vez que seus estudos têm início no Ensino Fundamental e integram paulatinamente conteúdos que o tenham como pré-requisito.

Dada essa relevância para a Matemática, estudou-se o conceito de equações e sistemas lineares de estudantes de Ensino Médio e das Engenharias e a correta aplicação dessas ferramentas matemáticas em problema analítico e cotidiano.

Para isso, tiveram-se como objetivos:

- 1) Verificar os conceitos de equações e sistemas lineares de estudantes de Ensino Médio e Superior;
- 2) Verificar os significados produzidos pelos estudantes ao aplicarem a ferramenta de sistemas lineares em problema com linguagem matemática analítica e cotidiana.

O interesse pelo estudo de sistemas lineares se justifica não apenas pela abrangência e importância no estudo de Ciências, como pelo alto índice de reprovação e abandono registrado na disciplina de Álgebra Linear. Instituições de ensino superior do estado do Espírito Santo apresentaram índices de reprovação maiores que 50% nessa disciplina, chegando a quase 90%. Essa disciplina compõe geralmente o ciclo básico da estrutura curricular de cursos superiores justamente por servir de apoio a ferramentas mais técnicas e específicas que virão no futuro de cada um.

Para além do fracasso escolar na aprendizagem dos referidos conteúdos, pesquisas (Souza, 2001) indicam que os professores devem ser sensíveis ao fato de que o conceito inicialmente apreendido pelos estudantes deve sofrer aprimoramentos conforme o nível de exigência cresça e, por isso, se torna fundamental sua intervenção nesse processo, tal como afirmam Coimbra (2008) e Vygotsky (2008).

### **Fundamentação teórica**

A presente pesquisa explorou o conceito e a produção de significados de estudantes no conteúdo matemático de equações e sistemas lineares. Para isso, contou-se com o apoio teórico de Vygotsky (1988) por estudar o pensamento e a linguagem de pessoas em meio a tarefas específicas. Essa teoria explora o signo, a linguagem e a construção de significados de conceitos escolares em um contexto sócio-histórico. Vygotsky procurou explicar o processo de internalização, passagem de funções elementares para superiores e as relações entre pensamento e linguagem. Para ele, a construção do psiquismo é realizada a partir do social e, assim sendo, adultos ou pessoas mais experientes contribuem significativamente para a interiorização das funções psíquicas.

Para Vygotsky, em meio ao social, a linguagem funciona como instrumento essencial para formação das funções psíquicas. A escola é um ambiente social por excelência e, por isso, espera-se que o conceito de sistemas lineares seja ali desenvolvido, com a mediação do professor ou de sujeitos mais experientes. Os estudos de Vygotsky revelaram a importância da aproximação dos conceitos espontâneo e científico. Essa não aproximação pode ser um dos fatores responsáveis pelos fracassos no estudo de sistemas lineares.

Além do apoio teórico sobre conceito, estudou-se a solução de problemas que usem o sistema linear como ferramenta, e, para isso, optou-se pelos estudos de Johnson-Laird (1992) para esse suporte. Para este autor, a solução de um problema deve cumprir quatro estágios: 1- compreensão do problema; 2- planejamento; 3- execução; 4- verificação da resposta encontrada. Problemas cotidianos, em geral, não exigem grande trabalho mental para solucioná-los. Já os praticados em graduações e que requerem o uso de ferramentas matemáticas, costumam requerer estratégias mais elaboradas.

Para Johnson-Laird (1983; 1992) inferir sobre um problema, seria como construir um modelo mental (ou modelos) do estado de coisas ali descritas, para então, buscar-se variantes desse modelo para descobrir se existiriam quaisquer conclusões que pudessem ser feitas. Seus estudos foram mais profundos para raciocínio dedutivo, no entanto, sua teoria é suficientemente abrangente (Eysenck & Keane, 1994) para estudos do raciocínio em meio à solução de problemas de maneira geral.

### Sujeitos, instrumentos e procedimentos

O estudo qualitativo, com respaldo quantitativo, contou com a análise dos conceitos de equações e sistemas lineares de 245 estudantes (N=245), sendo 45 do Ensino Médio e 200 graduandos de Engenharia de instituições de ensino do Estado do Espírito Santo. Todos declararam já ter estudado esses conteúdos em séries passadas.

A coleta de dados foi levada a cabo por meio de um questionário que explorou a compreensão do que sejam equações lineares, sistemas lineares, bem como o desempenho na sua aplicação em um problema com linguagem analítica e outro que envolveu a compreensão, o cálculo e a interpretação no uso dessas ferramentas.

As perguntas eram:

- 1) como você reconhece uma expressão como sendo de uma equação linear?;
- 2) o que você entende por um sistema linear?;
- 3) para que valores da constante  $k$  o sistema de equações lineares não admite solução? ( $x-y=3$ ;  $2x-2y=k$ );
- 4) uma ração para canários é composta por dois tipos de sementes, A e B. Cada uma delas contém três nutrientes importantes,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , em quantidades diferentes: na ração A foram usadas 5 unidades de um nutriente  $x$ ; 3 unidades de um nutriente  $y$ ; 1 unidade de um nutriente  $z$ . Na ração B foram usadas 4 unidades de um nutriente  $x$ ; 6 unidades de um nutriente  $y$ ; 2 unidade de um nutriente  $z$ . Se a ração for preparada com 2 sementes A e 3 da semente B, qual a quantidade que encontraremos para cada um dos três nutrientes?

A análise dos conteúdos dos questionários foi realizada segundo a teoria de Bardin (1998, pp. 31-38) que se resume em um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens. Para ela, a análise de conteúdo tem como objetivo estudar relações entre as estruturas semântico-linguísticas com as estruturas psicológicas e sociológicas envolvidas.

### Resultados e discussão

Os resultados apresentados pelos 245 estudantes foram categorizados segundo as informações dadas por eles, para cada questionamento.

Observamos do primeiro questionamento - como você reconhece uma expressão como sendo de uma equação linear? – que ninguém respondeu de forma completa, ou seja, informando as cinco exigências, conforme Poole (2004): todas as variáveis devem estar elevadas a um, não pode haver

argumentos trigonométricos, logarítmicos ou exponenciais e não pode existir produto de variáveis.

Categoria	N(%)	Nível superior/ (%)	Nível médio/(%)
Não respondeu	93 (38)	59 (29)	34 (76)
Respondeu com base em aspectos da expressão analítica	129 (53)	123 (61)	6 (13)
Respondeu com base geométrica	17 (7)	17 (9)	-
Respondeu erradamente ou sem sentido	6 (2)	1 (1)	5 (11)
TOTAL	245 (100)	200 (100)	45 (100)

Tabela 1: Resultados sobre o reconhecimento de uma expressão como sendo de uma equação linear: ensino médio mais as engenharias (N=245) e estratificados por nível escolar.

Conforme a Tabela 1, as respostas com base em aspectos da expressão analítica deixaram pistas de que os estudantes tinham alguma noção, mesmo que mínima, sobre o reconhecimento da expressão. De qualquer modo, há confusão ainda quanto aos significados dos termos. Seis estudantes responderam com sentenças sem sentido ou erradas, tal como, “não é necessário e quase nunca irá ter os valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ”.

A análise também é possível em termos de nível médio e superior. Observou-se da Tabela 1 que quase todas as respostas desconexas ou erradas vieram dos estudantes de Ensino Médio (11%). 76% nesse nível de ensino não responderam à pergunta, contra somente 29% do Ensino Superior. Pelo lado das Engenharias, 70% dos estudantes responderam com base em algum aspecto correto da ferramenta, mesmo que de maneira incompleta. Seria um indício de evolução.

Em relação ao segundo questionamento - o que você entende por um sistema linear?- foram criadas as categorias a partir das respostas dos estudantes, conforme a Tabela 2

Categoria	N (%)	Nível superior/ (%)	Nível médio/(%)
Não respondeu	100 (41)	65 (33)	35 (78)
Respondeu com base no gráfico	7 (3)	4 (2)	3 (7)
Respondeu corretamente	47 (19)	45 (22)	2 (4)
Respondeu erradamente ou sem sentido ou de forma analítica incompleta	91 (37)	86 (43)	5 (11)
TOTAL	245 (100)	200 (100)	45 (100)

Tabela 2: Resultados sobre o que se entende por um sistema linear: ensino médio mais as engenharias (N=245) e estratificados por nível escolar.

Comparando-se os resultados da tabela 1 e 2, infere-se que, apesar de 47 estudantes responderem corretamente ao que seja um sistema linear, não há clareza do que seja uma equação linear. Para esses estudantes, seja lá o que for uma equação linear, há compreensão do

que seja um sistema linear. Apesar desse resultado, 78% dos estudantes não souberam responder ou responderam erradamente, sem sentido ou de forma incompleta a esse questionamento.

Agrupando-se os dados pelo nível escolar, é possível concluir haver maior quantidade de estudantes respondendo corretamente no Ensino Superior (22%) do que no Ensino Médio (4%), o que confirma a teoria de Vygotsky de que os conceitos evoluem à medida que se agregam conhecimento à estrutura cognitiva dos sujeitos. Outras teorias declaram o mesmo fato, em termos diferentes, como a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (2002). Esse autor pontua que a aprendizagem se dá em um movimento dinâmico a partir de conteúdos prévios já internalizados na estrutura cognitiva. Esses conteúdos receberão novos elementos que, por sua vez, poderão modificar e dar outras significações àqueles pré-existentes. É nesse sentido que os conceitos vão se tornando complexos e mais avançados.

A pesquisa também revelou alto índice ( $78\% + 11\% = 89\%$ ) de não respondentes e respondentes que apresentaram conceitos errados, sem sentido ou incompletos de estudantes de Ensino Médio. Esse fato é preocupante, pois tende a comprometer a evolução da estrutura cognitiva do estudante quando for requerido o uso dessas ferramentas em situações concretas, como no caso do Ensino Superior. Essa constatação pode ser forte indício para os fracassos observados em disciplinas de Álgebra Linear em graduações, quando se deseja a produção de significados para os objetos matemáticos. Essa linha de pensamento é reforçada ao se constatar o índice de 76% nas mesmas categorias pelos estudantes do Ensino Superior.

Outro item de destaque da Tabela 2 é a baixa tendência em se entender sistemas lineares pelo modo gráfico, tanto no Ensino Médio (7%) quanto no Ensino Superior (2%). Apesar de os protocolos desses estudantes não expressarem corretamente o que seja um sistema linear, estes podem ser sujeitos que tenham tendência a pensar de modo imagético, conforme nos informam teóricos da Psicologia Cognitiva: Krutetskii (1976), Johnson-Laird (1992) e Sternberg (2000), para citar alguns. Por isso, os docentes devem estar atentos à diversificação de seus discursos para alcançar todos os tipos de mentes.

No que diz respeito ao terceiro questionamento “para que valores da constante K o sistema de equações lineares não admite solução?”, desejou-se conhecer a interpretação dada pelos estudantes ao resolverem um sistema linear analiticamente. Para essas respostas foram criadas quatro categorias, conforme Tabela 3.

Categoria	N (%)	Ensino Superior/(%)	Ensino Médio/(%)
Não soube resolver	89 (36)	55 (27,5)	34 (76)
Acertou: $k \neq 6$	55 (22,5)	55 (27,5)	-
Encontrou: $k=6$	55 (22,5)	54 (27)	1 (2)
Encontrou respostas erradas/absurdas	46 (19)	36 (18)	10 (22)
TOTAL	245 (100)	200 (100)	45 (100)

Tabela 3: Resultados da resolução de um sistema linear e a correspondente interpretação aos 245 estudantes: ensino médio mais as engenharias (N=245) e estratificados por nível escolar.

Da Tabela 3, constata-se que, na verdade, 45% dos estudantes souberam resolver o sistema linear corretamente. A diferença entre a segunda e a terceira categorias é que 55 de 110 estudantes não interpretaram o resultado obtido, ou seja, não cumpriram com a quarta etapa descrita por Johnson-Laird quando da solução de problemas. Pediram-se os valores de  $k$  que tornariam o sistema impossível. Quando  $k=6$  resulta em infinitas soluções. O que contraria esse resultado é exatamente o contrário, ou seja, quando  $k \neq 6$ , obtém-se nenhuma solução porque retira de  $k$  a multiplicidade ocorrida entre os coeficientes das variáveis  $x$  e  $y$  das duas equações. Daí, qualquer valor diferente de 6 tornará o sistema impossível. Esse fenômeno – da não interpretação do resultado obtido na solução de problemas – foi também verificado por Schoenfeld (1996). Ao perguntar a seus alunos quantos veículos com capacidade de 36 pessoas são necessários para transportar 1128 soldados, 29% disseram “31, resto 12”, 18% responderam “31”, e somente 23% declararam “32”, corretamente.

Apesar da ausência de interpretação de alguns estudantes, o índice dos que não souberam resolver ou que encontraram respostas erradas ou absurdas foi maior (55%). Esse resultado reforça o cenário de altas reprovações em Álgebra Linear verificadas no Ensino Superior.

A Tabela 3 revela que a maior parte dos que não souberam resolver concentra-se no Ensino Médio (76%). Em contrapartida, 54,5% dos estudantes de Ensino Superior resolveram corretamente o sistema, apesar de, aproximadamente, metade não ter realizado a interpretação corretamente – quarta etapa da solução descrita por Johnson-Laird. Esse resultado leva a crer em progresso, no que diz respeito à manipulação algébrica do sistema, da passagem de estudantes de Ensino Médio para o Ensino Superior.

Por fim, foi proposto aos 245 estudantes resolverem um problema cotidiano que fizesse uso da ferramenta de sistemas lineares. As respostas permitiram formular três categorias, conforme Tabela 4.

Categoria	N (%)	Ensino Superior/(%)	Ensino Médio/(%)
Não soube resolver	77 (31)	53 (27)	24 (53)
Acertou a solução: (22, 24, 8)	102 (42)	96 (48)	6 (13)
Encontrou respostas erradas/absurdas	66 (27)	51 (25)	15 (34)
<b>TOTAL</b>	<b>245 (100)</b>	<b>200 (100)</b>	<b>45 (100)</b>

Tabela 4: Resultados da proposta aos 245 estudantes de resolução de um problema cotidiano que fizesse uso de sistemas lineares: ensino médio mais as engenharias (N=245) e estratificados por nível escolar.

A Tabela 4 mostra que 42% dos estudantes resolveram corretamente o problema cotidiano proposto. Este é um índice que não deve ser desprezado, pois, apesar dos altos índices de baixa compreensão dos conceitos e dos problemas encontrados, quando do reconhecimento das ferramentas, há certa compreensão do que o conteúdo de sistemas pode fazer para solucionar o problema. É possível, daí, concordar com as teorias de Vygotsky e de Ausubel que dizem que a aprendizagem não é algo linear, mas construída em meio à atividade e que, conforme se avança em conhecimento, essa estrutura se atualiza, tornando conceitos antigos, mais complexos. O fato de o conceito de um sujeito sobre determinado assunto ainda estar em construção e necessitando de aprimoramentos, não impede que ele realize outras tarefas ligadas a esse assunto. É possível que o algoritmo de solução de problemas como o proposto esteja internalizado na estrutura cognitiva dos estudantes, de forma mecânica. Conforme surgem novos elementos de aprendizagem, a estrutura se renova, aumentando o potencial de compreensão pelo sujeito. Por outro lado, também é possível que esses estudantes tenham atingido o nível de compreensão que se espera de um estudante tanto de nível Médio quanto de Superior. Somente uma pesquisa descritiva dos passos dessas soluções poderia revelar esse item.

Os dados também revelam 58% não souberam resolvê-lo ou encontraram respostas absurdas e/ou erradas. Esse índice reforça os fracassos encontrados em disciplinas como a Álgebra Linear.

Observa-se ainda da Tabela 4 que a maior parte dos que não souberam resolver ou que encontraram respostas erradas e/ou absurdas (87%) encontra-se entre os estudantes de nível médio, contra 52% dos de nível superior. Esse resultado leva a crer que o avanço da escolaridade contribuiu com a produção de significados dos estudantes, confirmando as teorias educacionais antes mencionadas. Outro fator que contribui para essa conclusão é o de que 48% dos estudantes de nível superior resolveram adequadamente o problema, contra apenas 13% dos de nível médio, o que sugere investirem-se mais esforços educacionais na aprendizagem do Ensino Médio.

## Conclusões

O estudo revelou baixa compreensão do que seja um sistema linear. Não apenas pelo “sistema”, mas também pelo “linear”. Foi investigado, por isso, os seus entendimentos sobre o que seria uma equação linear. Os conceitos declarados pelos estudantes, quando declarados, estiveram baseados, principalmente, em fragmentos de aspectos analíticos vividos por eles em aulas de Matemática. Nenhum dos 245 estudantes atingiu um nível de compreensão completo, revelando, com isso, insuficiências no ensino praticado em graus anteriores.

Apesar desse resultado, 42% dos estudantes resolveram corretamente o problema proposto, sendo que quase a metade destes, interpretaram o problema incorretamente. Esse resultado comparado aos anteriores levanta a possibilidade de o estudo de sistemas lineares ter sido desligado das compreensões do que essa ferramenta matemática significa. A aplicação de sistemas pode ter sido realizada por algoritmos pré-estabelecidos durante o curso educacional escolar, mas que não garante a evolução ou mesmo a apreensão do conceito.

### Referências Bibliográficas

- Ausubel, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento: una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Paidós.
- Bardin, L. (1998). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Coimbra, J. L. (2008). *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico da Universidade Federal do Pará.
- Eysenck, W.M. y Keane, M.T. (1994). *Psicología cognitiva: um manual introdutório*. Porto Alegre, RS: Artes Médicas.
- Johnson-Laird, N. P. (1992). A capacidade para o raciocínio dedutivo. In Sternberg (Ed.), *As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações* (pp.194-216). Porto Alegre: Artes Médicas.
- Johnson-Laird, N. P. (1983). *Mental models*. Cambridge: Harvard University Press.
- Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Poole, D. (2004). *Álgebra linear*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.
- Shoenfeld, A. (1996). Porquê toda essa agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Pontes (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp.61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Souza, M. A. V. F. de. (2001). *Uma análise de discursos no ensino e aprendizagem de função*. 19/12/2001. 258 f. (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES.

Sternberg, R. J. (2000). *Psicologia Cognitiva*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Vigotskii, L. S., Luria, A. R. e Leontiev, A. N. (1988). *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo: Ícone.

Vygotsky, L. S. (2008). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.