ESTRATEGIAS PARA EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN MATEMÁTICA

Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco. (Argentina)
lmilevicich@ciudad.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@ciudad.com.ar
Categoría: estrategias de aprendizaje, Nivel educativo: superior
Palabras clave: estrategias de aprendizaje, resolución de problema, analogías, recursos informáticos

Resumen
Esta comunicación forma parte de las conclusiones elaboradas al concluir la etapa exploratoria sobre las estrategias más favorecedoras para superar las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático en alumnos universitarios de primer y segundo año, en el marco del Proyecto "Los errores en el aprendizaje del Análisis Matemático" de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Pacheco.
Consideramos que tales estrategias están vinculadas a *los modos de abordar la resolución de problemas*, a la *utilización de analogías* con el propósito de establecer un puente entre las ideas previas de los alumnos y los nuevos conocimientos, y a la *utilización del ordenador* como herramienta facilitadora en la simulación de experiencias y en el intercambio entre diferentes sistemas de representación.

La utilización del ordenador

Los primeros trabajos en un entorno informático se remontan a la década del cincuenta, con el diseño e instrumentación de sistemas educativos basados en los principios conductistas de Skinner. Luego surge la concepción de instrucción asistida por computadoras, considerando que puede simularse en computación el proceso tutorial del ser humano. A finales de la década del sesenta y principios de los años setenta se desarrollaron una serie de proyectos, dirigidos por S. Papert, donde se deja de un lado el enfoque conductual y desde una perspectiva influida por Piaget se pone el énfasis en los procesos creativas (del niño) en contraposición a la memorización de contenidos programáticos, y se plantea la necesidad de una comunicación niño-máquina; aunque su implementación estaba limitada por la tecnología existente. A finales de los años setenta aparece la computadora personal, equipo que resulta independiente, de pequeño tamaño, de fácil manejo y de menor costo. Es a partir de este momento que se inicia una revolución en el uso de esos medios en las clases de cualquier asignatura y con mucho más énfasis en las de Ciencias y genera un ambiente propicio para la realización de diversos trabajos de investigación que dan origen a diferentes perspectivas sobre los modos de utilización del ordenador como herramienta facilitadora en los procesos de enseñanza y aprendizaje. (Jiménez, 1992; Escalona Reyes, 2004; Torres, 1997 y 2001).
Es así como se comienza a valorar el ordenador como recurso didáctico facilitador en los procesos de conocer, analizar e investigar la realidad, actuando sobre ella; como contenido curricular; como recurso de la organización escolar: se concibe su uso para mejorar los procesos de comunicación, gestión y administración de las escuelas; como instrumento al servicio de la evaluación: se utilizan como un potente instrumento para facilitar y mejorar el proceso evaluativo respecto al análisis de las relaciones profesor-profesor, profesor-alumno y alumno-alumno; en la evaluación del funcionamiento de la institución y como recurso de desarrollo comunitario.
Hemos focalizado nuestro interés en las posibilidades de este medio como facilitador del tránsito de lo concreto a lo abstracto y viceversa a través de diferentes representaciones y manipulaciones de ellas.
La mayoría de las veces la búsqueda de la solución de un problema conduce a la elaboración de un modelo matemático. Si el modelo incluye ecuaciones o sistemas muy sencillos, seguramente el alumno podrá utilizar los algoritmos básicos de resolución.

Sin embargo, en la mayoría de los problemas, aún los más sencillos, que se plantean en ingeniería, los alumnos llegan a concebir un modelo que incluyen ecuaciones polinómicas cúbicas o de orden superior, ecuaciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales. La resolución algorítmica tradicional es sumamente engorrosa debido a que se involucran muchos cálculos y procesos iterativos, de tal modo que se termina por desvirtuar el propósito por el cual se planteó el problema.
En ese sentido nuestro trabajo consistió en el desarrollo de diferentes experiencias en el ámbito de primer año de un curso de cálculo con utilización del ordenador como recurso didáctico. Se utilizó para tales fines un software, diseñado sobre *Mathemática*, que permite obtener diferentes visualizaciones de la función que resulta del modelo planteado, analizar la existencia de una o más raíces reales y calcular numéricamente, mediante iteraciones, su valor aproximado en cada caso, con el error deseado.
La utilización del entorno descripto:

- no sólo facilitó, sino que dinamizó la interacción entre los modos de representación gráfica, algebraica y numérica,
- permitió a los alumno interactuar con objetos matemáticos de forma simple y natural, lo que favoreció su autonomía en el aprendizaje, además de permitirles un mayor acercamiento a la matemática, siéndole ésta más familiar,
- facilitó la construcción de objetos matemáticos, conjeturar hipótesis, comprobar propiedades, simular y descubrir regularidades,
- permitió ampliar el abanico de ejemplos y enriquecer la propuesta,
- permitió minimizan los cálculos tediosos.

También observamos que existe una desmedida confianza en los resultados obtenidos a partir del uso del software, cuestión que debe alertarnos sobre una adecuada propuesta de actividades y las conclusiones rápidas que obtienen los alumnos habitualmente.

La resolución de problemas

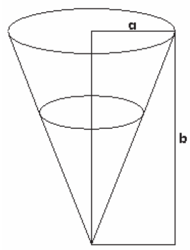
Uno de los principales objetivos a conseguir en el área de las matemáticas universitarias, consensuado por gran parte de los docentes, es que los alumnos sean *competentes en la resolución de problemas*, con el propósito de mejorar la significatividad del aprendizaje de contenidos matemáticos, tanto de tipo conceptual, como en lo procedimental y en lo actitudinal.
Para resolver un problema, se requiere del uso de pausas, reflexiones y hasta es posible que surjan propuestas originales que el docente no había tenido en cuenta en anteriores oportunidades. Esta característica de dar una especie de *paso creativo* en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio. Sin embargo, es prudente aclarar que esta distinción es relativa al nivel instruccional desde el que se aborda. Para un niño pequeño puede ser un problema encontrar cuánto es 3 + 2. O bien, para niños de los primeros grados de primaria responder a la pregunta ¿Cómo repartes 96 lápices entre 16 niños de modo que a cada uno le toque la misma cantidad?, mientras que para un alumno avanzado de escuela primaria constituye un ejercicio rutinario.
De la misma manera, el modo en que fluye agua hacia fuera de un tanque, puede constituir un problema para alumnos de escuela media o preuniversitarios y un ejercicio sencillo de razón de cambio de la velocidad de salida, para un alumno universitario que haya transitado por las materias de ciencias básicas.

Entre las cuestiones que inciden en conseguir que los alumnos aprendan a resolver problemas, Pifarré y Sanuy, (2001) señalan cuatro diferentes variables que hacen referencia tanto a la dimensión del aprendizaje como a la dimensión de la enseñanza. Ellas son: a) la importancia del conocimiento declarativo sobre el contenido específico del problema; b) el repertorio de estrategias generales y específicas que es capaz de poner en marcha el sujeto para resolver el problema concreto; c) el papel de las estrategias metacognitivas; y d) la influencia de los componentes individuales y afectivos.
Nuestra experiencia incluyó la resolución, por parte de un grupo de alumnos de 1º año de ingeniería, de varios problemas relacionados con las razones de cambio aplicados a la física, a la química y a la biología. A modo de ejemplo, presentamos el enunciado y la secuencia de resolución de uno de ellos.

Problema (Stewart, 1999)

> *Se vierte agua en un recipiente de forma cónica con una rapidez "r". El radio de la base del cono es "a "y su altura es "b". Determinar la velocidad a la que la superficie del agua se eleva cuando la profundidad del agua es "y".*

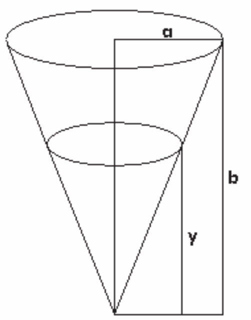
La primera dificultad fue lograr una adecuada representación del cono. Luego, en el reconocimiento de los datos, los alumnos no tuvieron problemas en identificar radio *a* y la altura *b*, pero sí con *la rapidez con que entra el agua.*



Si bien habían desarrollado otros problemas dónde la razón de cambio estaba asociada a la velocidad de movimiento respecto del tiempo, les resultó difícil vincularlo, en este caso, a la variación de volumen respecto del tiempo y más aún identificar que se trata de un radio variable, al cual denominaron *r*.
Una vez identificada la incógnita (denominaron *y* a la altura variable), se les solicitó que rescribieran el problema simbólica y gráfica mente.

Datos:
- Altura: b
- Radio: a
- Rapidez con que fluye el agua: $r = \dfrac{dV}{dt}$

Incógnita: $\dfrac{dy}{dt}$



La etapa siguiente consistió en que, recordando la relación entre el volumen del cono con su altura y radio, trataran de expresar el volumen en función de *y* solamente,

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

A partir del gráfico advirtieron con facilidad que:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow x = \dfrac{a}{b} y$ *con lo cual expresaron:* $V = \dfrac{1}{3}\pi \dfrac{a^2}{b^2} y^3$

La siguiente etapa, en la cual debieron relacionar el dato pendiente de utilización: *dV/dt* con la incógnita: *dy/dt,* no les ofreció mayor dificultad dado que, en general manejaban con bastante fluidez las técnicas de derivación. De todas maneras, resultó necesario solicitarles que establecieran las dependencias entre variables con el propósito de que advirtieran que y = y(t)

Así: $\frac{dV}{dt} = \pi \frac{a^2}{b^2} y^2 \frac{dy}{dt}$ con lo cual $\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\pi \frac{a^2}{b^2}} = \frac{r}{\pi \frac{a^2}{b^2}}$

Finalmente una visión retrospectiva sobre las etapas seguidas y su secuencialidad, incluyó las siguientes preguntas:
¿Cómo se relaciona V con x e y?, ¿Cómo se relaciona x con y?, ¿Cómo se relaciona V con y?, ¿Cómo se relaciona la variación del volumen con la variación de la altura del cono?
El análisis de los resultados obtenidos en las experiencias realizadas nos permitieron detectar algunas regularidades que creemos importante mencionar. La resolución de problemas en áreas o dominios específicos, en este caso referidos al calculo diferencial, requiere del conocimiento de la disciplina involucrada, pero la sola presencia del conocimiento almacenado en el sistema de memoria, no implica necesariamente que éste va a estar disponible en el momento de abordar la resolución. El ser capaz o no de resolver un problema depende de la adopción de un modo apropiado de encarar el problema. Específicamente en matemática, es muy valioso que el alumno, frente a una situación problemática, logre decidir eficazmente acerca cual es el sistema de representación que más le conviene. En cada una de las situaciones problemáticas propuestas, les pedimos a los alumnos que argumenten acerca de la conveniencia sobre utilizar el lenguaje geométrico, o un simple diagrama, o talvez el lenguaje algebraico, o bien comenzar por un planteo analítico de la situación.
Los patrones de razonamiento plausible, denominados *"Patrones de inferencia plausible"* por el mismo Polya, (1995) constituyen una guía muy apropiada para la secuencia de abordaje de las diferentes etapas.
Creemos que es de mucha utilidad la utilización de mecanismos de inferencia no deductivos, dado que se trata de un proceso no directo, dónde el alumno realiza varios intentos. Cada uno, en la medida que permite circunscribir más el problema, contribuye al progreso en la solución del mismo.
Frente a una situación problemática los alumnos debieran:

- Aceptar el reto de resolver el problema.
- Reescribir el problema en tus propias palabras.
- Tomarse un tiempo para explorar, reflexionar, conjeturar,...
- Abordar el problema con números simples.
- Analiza el problema desde varios ángulos.
- Revisar la propia lista de estrategias para ver si una (o más) pueden servir como punto de partida.
- Tener presente que habitualmente existen diferentes caminos para llegar a la solución.Cambiar de estrategia, volver a comenzar, es un indicio positivo cuando no se logran progresos.
- Los procesos de revisión son necesarios en más de una oportunidad, ya que la comprensión del problema aumenta a medida que se avanza en el trabajo de solución.
- *Siempre* mirar hacia atrás: Tratar de establecer con precisión cuál fue el paso clave en la solución.

- Explicitar la solución escrita con suficiente claridad de tal modo que sea posible entenderla tiempo después.

La analogía

Esta estrategia ocupa un lugar importante en el ámbito de la enseñanza, en general, y de la enseñanza de las ciencias, en particular dado que sirve para ayudar a comprender una determinada noción o fenómeno a través de las relaciones que establece con un sistema *análogo* y que resulta para el alumno más conocido y familiar.

Desde la perspectiva constructivista, el razonamiento analógico es la llave que permite el acceso a los procesos de aprendizaje, ya que todo nuevo conocimiento incluye una búsqueda de aspectos similares entre lo que ya se conoce y lo nuevo, lo familiar y lo no familiar y en este sentido, el efecto de las ideas previas de los alumnos es enorme.

Nuestras experiencias tuvieron el propósito de abordar algunos conceptos de cálculo en tres variables a partir de una relación analógica con los conceptos estudiados en dos variables. La estrategia seleccionada consistió en presentar el *modelo didáctico analógico (análogo base) (Paruelo, 2004)* previo al tema científico a abordar: las integrales de superficie. Para ello se estableció una analogía con el concepto de integral definida en una variable que se desarrolló en el primer curso de cálculo. La analogía se planteó introduciendo en primer lugar una revisión sobre el concepto de integral definida, a partir del problema del cálculo del área bajo una curva positiva.

Fue necesario revisar y escribir cada uno de los elementos intervinientes, secuencialmente en el proceso de reconstrucción del concepto de integral definida, los cuales no se detallan por razones de espacio. Luego se planteó el concepto a abordar (el análogo objetivo): el cálculo de la integral de una función de dos variables (x e y).

Un conjunto de preguntas fueron necesarias para guiar a los alumnos en el establecimiento de las correspondencias entre los diferentes elementos del análogo base y el análogo objeto.

Finalmente, hicimos extensiva la estrategia a la deducción de la regla del punto medio para integrales dobles.

Es importante remarcar y no perder de vista una tercera etapa relacionada con la *metacognición*, en cuanto a una toma de conciencia por parte del alumno sobre el salto cognitivo que se ha logrado en el tema. En este momento, es donde consideramos que se debe trabajar sobre un análisis riguroso para explicitar las transposiciones que operaron en los procesos de analogación: *los recortes, simplificaciones y aproximaciones* que se produjeron, las *transferencias y desplazamientos del contenido*, los *rangos de validez conceptual y operacional*, y el *conjunto de operaciones inversas* que nos permiten recuperar el modelo original. Esta etapa de metacognición, en tanto que supone un tipo de pensamiento del más alto nivel de conceptualización y la revisión de los mecanismos propios de adquisición del conocimiento, es la etapa de mayor resistencia por parte de los alumnos sin mayor experiencia en el uso de analogías, y tanto mayor es la dificultad cuanto menor es la edad. Consideramos que sobre esta tercera etapa se debe prestar fundamental atención en cuanto a no descuidar su implementación adecuada y en tiempos previamente pautados. Habitualmente, justamente por falta de tiempo, no se lleva a cabo y por ende no se completa el proceso de enseñanza adecuadamente.

Referencias bibliográficas

Escalona Reyes, M. (2004).Los ordenadores en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias. Fundamentos para su utilización. *Revista Iberoamericana de Educación.*

Guzmán, M y Colera, J. (1989). *Matemáticas I.* Madrid, España: Anaya.

Jiménez, J. A. (1992). Plan ZAHARA XXI: Una propuesta de introducción de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la enseñanza. En Pablos, J y Gotardi,C. (1992). *Las nuevas tecnologías de la información en la educación.* (pp. 158-177).Madrid, España: Alfar.

Paruelo, J y Miguel, H. (2004). Diferentes usos de la analogía en la formación en ciencias formales y en ciencias fácticas. En *V Jornadas Rolando Chuaqui Kettlun en Filosofía y Matemáticas*. Viña del Mar, Chile

Pifarré, M. y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: Un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 297-308.

Polya, G. (1995). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rinaudo, M, Chiecher, A y Donolo, D. (2003). Motivación y uso de estrategias en estudiantes universitarios. Su evaluación a partir del *Motivated Strategies Learning Questionnaire*. *Anales de Psicología*, 19 (1), 107-119

Stewart, J. (1999). *Cálculo. Conceptos y contextos*. México: International Thomson Editores.

Torres, P. (1997). *Influencias de la computación en la enseñanza de la Matemática.* Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas no publicada. Sancti Spiritus, La Habana, Cuba

Torres, P. (2001). Didáctica de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación. *Pedagogía, Curso 40*.