VISUALIZANDO CONCEPTOS DE LA GEOMETRÍA MODERNA CON EL APOYO DEL SOFTWARE CABRÍ[‡]

María del Pilar Rosado Ocaña
Universidad Autónoma de Yucatán. (México)
rocana@tunku.uady.mx
Campo de investigación: visualización. Nivel educativo: superior
Palabras clave: visualización, geometría moderna, CABRI, puntos de Menelao

Resumen
Se presenta un trabajo realizado a través de un Proyecto de Servicio Social en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY). El objetivo de este trabajo consistió en elaborar un material de apoyo para el curso de Geometría Moderna, utilizando el software Cabrí, con el fin de mejorar la comprensión y visualización de conceptos de dicha asignatura por parte de los estudiantes, y de esta manera contribuir en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en el nivel superior. Para ello se elaboró un cuestionario diagnóstico que se aplicó a un grupo de 17 alumnos que ya habían cursado dicha asignatura y se trabajó en los conceptos que causan mayor dificultad de comprensión. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, ya que los índices de reprobación disminuyeron con relación a cursos anteriores y el aprovechamiento mejoró notablemente.

Problemática

“Geometría Moderna” es una asignatura obligatoria que se imparte en el segundo semestre de las licenciaturas en Enseñanza de las Matemáticas y Matemáticas en la Facultad de Matemáticas de la UADY. A lo largo de los años, se ha observado que la mayoría de los alumnos no logran comprender muchos de los conceptos que se abordan en esta asignatura, por lo que se ven limitados a “memorizarlos” y a reproducir procedimientos en la resolución de problemas que involucran a tales conceptos. Es por ello que nos interesamos en abordar esta problemática utilizando la herramienta del software Cabrí, ya que en los últimos años se han difundido ampliamente las ventajas de utilizar dicho software en las clases de Geometría en los diferentes niveles educativos; así como el contribuir con el uso de las tecnologías en la educación.

Objetivo

El objetivo de este trabajo consistió en elaborar un material de apoyo para el curso de Geometría Moderna con el uso del software Cabrí; que pueda ser utilizado por los profesores que impartan dicha asignatura, en beneficio de los estudiantes de la Facultad de Matemáticas. Y de esta manera, contribuir en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos de la Geometría Moderna en el nivel superior.

Metodología

La metodología seguida en este trabajo consistió en realizar primeramente una revisión bibliográfica para identificar los trabajos realizados alrededor de la problemática en cuestión y que contribuyeran a respaldar este proyecto. Posteriormente, el proyecto se desarrolló considerando las siguientes etapas:

[‡] Proyecto de Servicio Social realizado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán con la colaboración de la Br. Mildred Rocio Maldonado López.

1. Se realizó un diagnóstico de los temas de la asignatura Geometría Moderna, que causan más problemas de comprensión en los estudiantes.
2. Se elaboraron materiales de apoyo con el software Cabrí, sobre los temas identificados como de mayor dificultad de comprensión por parte de los estudiantes.
3. Se aplicó en las sesiones de clase de dichos temas, el material elaborado para tener elementos que puedan indicar la efectividad del material o en su caso, realizar las modificaciones convenientes.
4. Se realizó un análisis de los porcentajes de reprobación y aprovechamiento, con relación a cursos anteriores.
5. Finalmente, se elaboró un escrito que documenta el trabajo realizado, con la intención de presentarlo a profesores que impartan dicha asignatura y proponerlo como material de apoyo del curso.

Marco de referencia

En Rodríguez (2000) se obtiene un panorama del problema existente en la Geometría del nivel medio superior, suponiendo que dichas dificultades se deben a que los estudiantes no tienen la madurez matemática para ubicarse en el enfoque formal, axiomático, que este curso requiere, en el cual se espera que los estudiantes se capaciten en hacer demostraciones formales en geometría y con esto, adquieran un pensamiento deductivo formal.
Cantoral, R. et. al., (2000), reporta la percepción que tienen los investigadores de la matemática educativa, al plantear la necesidad de construir nociones nuevas que den cuenta de la forma en que las personas se relacionan con su espacio, e introducen la *visualización y percepción espacial*. Con esto, conducen a explorar la clase de habilidades visuales que se necesitan para aprender Geometría e incrementan el interés por estudiar la Geometría en ambientes computacionales. Generalmente se entiende por *visualización* la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual.
Desde el contexto de la Geometría Moderna, hemos notado carencia en la visualización de conceptos por parte de los alumnos, debido a que el curso en su mayoría es enfocado de modo analítico, pidiéndoles que desarrollen demostraciones en las que se les dificulta imaginar las representaciones de muchos de los teoremas planteados. Por lo tanto, se tiene conciencia de lo difícil que resulta a los estudiantes adquirir un aprendizaje significativo, bajo estas condiciones. Para lograrlo, se debe enfocar en atender el problema de la visualización, para lo cual hemos notado que ésta no es exclusiva de la matemática; el uso de la tecnología contribuye en la construcción de significados matemáticos a través del estudio de gráficos; los métodos visuales son efectivos para producir y sustentar generalizaciones, y que deben identificarse formas adecuadas de visualización para determinadas tareas matemáticas, por mencionar algunas (Molina, R. et. al., 2003).
Se comparte la idea de que la disponibilidad de la tecnología no le resta importancia a comprender con claridad los conceptos que sustentan las imágenes que aparecen en la pantalla, si no que cuando se usan con propiedad, las calculadoras graficadoras y las computadoras, utilizando un software matemático suelen ser herramientas poderosas para descubrir y comprender esos conceptos (Monroy, G., et. al., 2005).
Los ambientes de geometría dinámica tales como Cabrí-Géomètre, que introducen el movimiento como metáfora de la variación de los objetos geométricos, provocan cambios profundos en los modos de representación habituales y los modos de pensamiento en Geometría. La máquina no hace simplemente las cosas de manera más rápida y precisa, esta deja ver los fenómenos nuevos. El

recurso de un ambiente de Geometría dinámica puede por lo tanto modificar la actividad geométrica y las prácticas de los alumnos y de los profesores de matemáticas (Laborde, C., 2005). La docencia puede intentar llegar al siguiente objetivo: que los estudiantes aprendan a conectar los fenómenos visuales y sus hechos geométricos, para reconocer visualmente características geométricas, para interpretar dibujos en términos geométricos o para construirlos. Muchos aprendizajes permiten a los estudiantes usar dibujos o representaciones visuales de objetos geométricos como ayuda en sus razonamientos en el nivel de teoría y a través de su conocimiento, a controlar la información que toman para la representación visual. En este tipo de actividades, aprenden a reconocer los vínculos necesarios entre las propiedades visuales que se oponen a estas, las cuales son solamente circunstanciales. Éstas pueden estar basadas en la construcción de pruebas. (Laborde, C., 2001).

Desarrollo

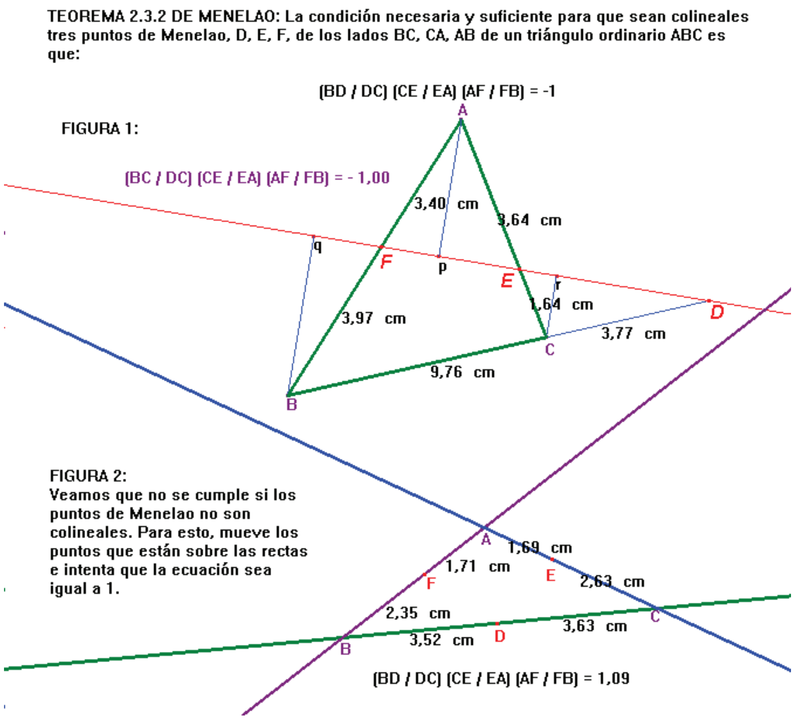
Después de la revisión bibliográfica, se realizó un diagnóstico con el fin de obtener información acerca de los temas de la asignatura Geometría Moderna que causan mayor dificultad de comprensión en los estudiantes. Dicho diagnóstico fue realizado con 17 estudiantes de cuarto semestre de las licenciaturas en Matemáticas y Enseñanza de las Matemáticas. En la primera parte del diagnóstico, se pudo observar, que conforme va transcurriendo el curso, la materia va dificultándose, ya que los primeros temas fueron considerados como accesibles (ningún tema es considerado muy fácil), la mayoría de los temas fueron catalogados como regulares, pero fue aumentando la dificultad hasta llegar a calificar a los últimos temas como difíciles. En la segunda parte, se les indicó a los estudiantes describir cada uno de los conceptos que se consideraban de mayor dificultad de comprensión, obteniendo los resultados que se presentan en el siguiente gráfico.

Se han colocando en el eje vertical los conceptos que fueron preguntados y en el eje horizontal la escala de puntuación que obtuvieron. La longitud de las barras representa el número de estudiantes que respondieron cada pregunta, así mismo en cada una de las barras el color azul indica el número de respuestas correctas y el color rojo indica el número de respuestas incorrectas. Recordando que fueron 17 los alumnos encuestados, se puede observar que no todos respondieron a todas las

preguntas, incluso algunos no respondieron ni una sola pregunta. Otro aspecto que podemos observar, es que aún cuando anteriormente habían calificado a la mayoría de los temas con grado de dificultad regular, realmente el porcentaje de alumnos que respondieron todas las preguntas es muy bajo y las que fueron respondidas tuvieron un alto índice de error, y tomando en cuenta que las preguntas fueron presentadas en el orden de aparición del programa de la materia, podemos notar que conforme avanzaban en las preguntas, los alumnos recordaron menos las respuestas, y a pesar de que las primeras preguntas fueron contestadas por la mayoría de los estudiantes, no fueron correctas todas las respuestas; lo cual nos confirma la falta de comprensión de dichos conceptos.
La tercera parte del diagnóstico estuvo relacionada con las opiniones y sugerencias de los alumnos con respecto al grado de dificultad de la asignatura, importancia, obstáculos para aprenderla y algunas sugerencias para mejorar el curso.
Se pudo reafirmar la sospecha que se tenía acerca de la dificultad de los temas y de comprensión de los conceptos, ya que los estudiantes opinaron que conforme avanzaba el curso, la dificultad aumentaba y reflejaron la dificultad de comprensión, al no recordar los conceptos, lo que hace notar que no hubo un aprendizaje significativo. Entre las sugerencias, los estudiantes mencionaron el uso de recursos didácticos como la computadora, para apoyo en la visualización de los teoremas.
Con base en estos resultados, se trabajó en la revisión del contenido temático del curso, identificando los conceptos, teoremas y corolarios que requirieran de la construcción de figuras para una mejor visualización. De esta manera, se construyeron aproximadamente 60 figuras pudiendo tener la representación de una gran parte de los conceptos, teoremas y corolarios, que conforman la unidad 2 del programa.

Visualización del teorema de Menelao

A continuación se describe la construcción de unas de las figuras realizadas en Cabrí; así como los movimientos que pueden realizarse en ellas.
Para visualizar el teorema de Menéalo se construyeron dos figuras: en la primera se muestran las condiciones del teorema y aunque se mueva algún punto, ya sea vértice o punto de Menelao, la construcción se adapta a las nuevas condiciones y nos permite visualizar triángulos que siempre ejemplifican el teorema; en la segunda figura, se pretende mostrar por medio de una herramienta en Cabrí (la calculadora) que es necesario y suficiente que los puntos de Menelao sean colineales para que se cumpla la relación entre los segmentos y por medio de la manipulación de los puntos se verifica el teorema. Para verificar el supuesto del teorema: $\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\right)\left(\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\right)\left(\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\right)=-1$, en la demostración se utilizan propiedades de los triángulos semejantes. Los cuales están determinados por las rectas perpendiculares a la recta de color rojo y que pasan por los vértices del triángulo. (Ver FIGURA 1).
<u>Construcción 1:</u> Se comienza con la construcción del triángulo BFD, se colocan rectas sobre los puntos B y F y se define el punto C sobre BD y el punto E sobre FD, se traza una recta que pase por los puntos C y E y se define al punto A por la intersección de las rectas BF y CE. De esta manera los puntos D, E y F son los puntos de Menelao colineales para el triángulo ABC. Se trazan rectas perpendiculares a la recta de color rojo desde los vértices de triángulo ABC, auxiliares en la demostración del teorema.



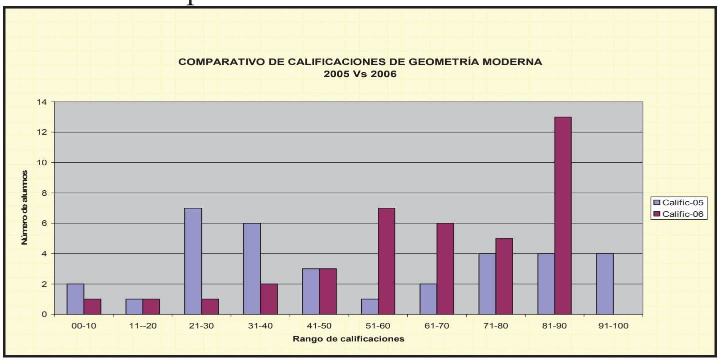
Animación de la figura 1: Por las propiedades de la figura que otorga el software Cabrí, nos permite mover los puntos B, C, D, E, F, y de esta manera poder visualizar una amplia gama de triángulos que cumplen con el teorema de Menelao ya que sin importar cómo se muevan los puntos, siempre se cumplirá la colinealidad y por tanto la relación. En esta figura, el único punto que no se puede manipular es A, ya que está definido como la intersección de dos rectas.

Construcción 2: Se comienza definiendo tres puntos cualesquiera, A, B, C y se trazan tres rectas que pasen por ellos, dos a dos y que por lo tanto formarán el triángulo ΔABC; se coloca un punto sobre cada una de las rectas, D, E y F (puntos de Menelao) respectivamente y se hallan las medidas de los segmentos, $\overline{BD}, \overline{DC}, \overline{CE}, \overline{EA}, \overline{AF}, \overline{FB},$ para poder sustituirlas en la relación que se menciona en el teorema, realizando la operación en la calculadora del programa, la cual nos arroja el resultado.

Animación de la figura 2: En esta figura se pueden mover los tres vértices del triángulo, pero el objetivo principal es manipular los puntos de Menelao, es decir, los puntos D, E y F, con la intención de corroborar los resultados del teorema. Al ir moviendo los puntos de Menelao, las medidas de los segmentos se van modificando y por tanto el resultado de la relación nos permite visualizar su cambio, mientras se mueven los puntos hasta que sean colineales y la relación sea igual a 1. Cabe aclarar que Cabrí siempre dará resultados con signo positivo, ya que manipula valores positivos por ser medidas de segmentos, es decir; no distingue segmentos dirigidos. Sin embargo, haciendo uso de las propiedades del software, podemos incluir el signo negativo en la escritura de la propiedad para el caso de las figuras construidas, de tal manera que se pueda observar lo que se quiere.

Resultados obtenidos

El material se desarrolló durante el semestre Febrero-Julio de 2006 y se aplicó durante el mismo semestre a un grupo de 39 estudiantes. Al término del curso, los resultados obtenidos fueron satisfactorios, ya que en comparación con los resultados del curso anterior (34 estudiantes), el índice de reprobación disminuyó y el de aprovechamiento mejoró notablemente, como puede observarse en la siguiente tabla comparativa.



Se puede observar que en los rangos de calificaciones aprobatorias, el número de alumnos del curso 2006 supera al número de alumnos del curso 2005 y en los rangos de calificaciones reprobatorias ocurre lo contrario, excepto en los rangos 11-20 y 41-50 en que se mantiene equilibrado y en el rango 91-100 en el que no hubo alumnos del curso 2006. Por otra parte, en opinión de los estudiantes del curso 2006, el trabajar con las presentaciones de las figuras en Cabrí les ayudó a comprender mejor los conceptos y teoremas del curso, ya que la visualización de las mismas les permitió recordar los conceptos a la hora de las evaluaciones. Además, las clases fueron llamativas e interesantes, con la manipulación de las figuras, por lo que mantuvieron el interés en el curso. Cabe mencionar que en ocasiones, las líneas en las figuras eran muy tenues por los colores utilizados, por lo que se modificaron algunas figuras en cuanto a colores y grosor de líneas para que finalmente el material sea de mayor provecho.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., et. al. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* ITESM, Universidad Virtual. México: Trillas.

Eves, H. (1997). E*studio de las Geometrías*. México: LIMUSA.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of Geometry tasks with Cabrí-Geometry. En I*nternational Journal of Computers for Mathematical Learning* 6: 283-317.

Laborde, C. (2005). Geometría Dinámica en la Enseñanza de las Matemáticas: ¿Qué cambia para los alumnos y para los profesores? *Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.* Montevideo, Uruguay.

Molina, R., et. al. (2003). El papel de la visualización en el aprendizaje de la matemática. *Resúmenes de la VII Escuela de Invierno y VII Seminario Nacional de investigación en Didáctica de las Matemáticas,* Guerrero, México.

Monroy, G., et. al. (2005). Visualización de las actividades realizadas en clase con Cabrí. *Resúmenes de la IX Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Chiapas, México.

Rodríguez, A. (2000). *La geometría y los niveles de aprendizaje*. En Desarrollo del Pensamiento Matemático, (pp. 151-155). ITESM, Universidad Virtual. México: Trillas.