

## PENSAMIENTO ALGORÍTMICO, TECNOLOGÍA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA NUMÉRICA

Eugenio Carlos Rodríguez

Instituto Superior Politécnico José A. Echeverría (Cujae). (Cuba)

[ecarlos@ind.cujae.edu.cu](mailto:ecarlos@ind.cujae.edu.cu), [ecarlos48@yahoo.com](mailto:ecarlos48@yahoo.com)

Campo de investigación: pensamiento lógico, tecnología avanzada. Nivel educativo: superior

Palabras clave: matemática numérica, pensamiento algorítmico, tecnología

### Resumen

La Matemática Numérica tiene un carácter especial, por ser la rama de la Matemática que se dedica al estudio de métodos eficientes de cálculo para resolver problemas con un grado de precisión “aceptable” (Álvarez, Guerra y Lau, 2004). Estos métodos utilizan algoritmos que describen los procedimientos de cálculo, mientras más eficientes son los algoritmos utilizados, más rápido se producirá la convergencia del método en cuestión hacia la solución exacta del problema. Muchos obstáculos se pueden encontrar en el aprendizaje de estos temas (Carlos y Ansola, 2003), entre ellos, dos de los más importantes son la falta de un desarrollo adecuado del pensamiento algorítmico en los estudiantes y el conocimiento poco preciso del concepto de convergencia. En este trabajo se muestra cómo el uso de la tecnología puede contribuir a salvar estos obstáculos.

### La matemática numérica. Reseña histórica

La Matemática Numérica es la teoría y la práctica del cálculo eficiente y la estimación del error de la solución aproximada de muchos problemas de aplicación de la Matemática, sus métodos utilizan algoritmos que describen los procedimientos de cálculo, mientras más eficientes son los algoritmos utilizados, más rápido se producirá la convergencia del método en cuestión hacia la solución exacta del problema.

Sus orígenes datan de miles de años atrás, desde que los babilonios, 2000 años a.n.e, construyeran tablas matemáticas y elaboraron efemérides astronómicas. Arquímedes, en el año 200 a.n.e., usó los polígonos regulares como aproximaciones del círculo. En 1614 Neper publicó la primera tabla de logaritmos, y en 1620 los logaritmos de las funciones seno y tangente fueron tabulados con siete cifras decimales. A fines del siglo XVII comenzó a desarrollarse el cálculo con series, siendo fundamentales las contribuciones de Newton (1642-1727), llegando a su punto culminante con los trabajos de Euler, sus algoritmos infinitos aparecen con frecuencia en la forma de desarrollos en series. A principios del siglo XVIII, James Stirling (1692-1770) y Brook Taylor (1685-1731) sentaron los fundamentos del cálculo de diferencias finitas. Posteriormente están los importantes aportes de Gauss (1777-1855): solución de sistemas de ecuaciones lineales, cuadratura numérica, aproximación de funciones. También Lagrange aportó un método para la aproximación de funciones. En el siglo XIX se destacan los trabajos de Jacobi (1804-1851): método para la determinación de valores propios; Seidel (1821-1851): método para la solución de sistemas de ecuaciones lineales; Lobachevski (1793-1856): aproximación de todas las raíces de una ecuación polinomial; Runge (1895): solución de ecuaciones diferenciales, y otros. En el siglo XX, gracias al impetuoso desarrollo de las computadoras, las Matemáticas Numéricas alcanzaron tal desarrollo, que resulta interminable la enumeración de los Matemáticos que se dedicaron y que actualmente en el siglo XXI se dedican a ella. No obstante sus profundas raíces históricas, la Matemática Numérica, como disciplina independiente, surgió, según algunos autores, entre los años 1945 y 1950. El desarrollo sin precedentes de las computadoras imprimió su ritmo al desarrollo de la Matemática Numérica moderna, baste con señalar que en sólo treinta años la velocidad de cálculo

aumentó de una operación por segundo, utilizando la regla de cálculo, hasta 3 000 000 de operaciones por segundo, o sea  $3 \times 10^6$  veces (Álvarez, Guerra y Lau, 2004).

### **Enseñanza y aprendizaje de la matemática numérica en carreras de ingeniería**

Muchos obstáculos se pueden encontrar en el aprendizaje de la Matemática Numérica, entre ellos, dos de los más importantes son la falta de un desarrollo adecuado del pensamiento algorítmico en los estudiantes y el conocimiento poco preciso del concepto de convergencia. El uso de la tecnología como soporte didáctico puede contribuir a salvar estos obstáculos. La enseñanza y el aprendizaje de los métodos numéricos han pasado, en los últimos años, desde el uso de las calculadoras electrónicas más elementales hasta el uso de modernas computadoras y potentes softwares profesionales (Carlos y Pérez, 2003).

### **Pensamiento algorítmico**

La Matemática está llena de algoritmos: el de la multiplicación, el de la división, el algoritmo de Euclides o el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones, son ejemplos, entre otros (Fernández, 2005). Si tuviéramos que crear un algoritmo para conseguir un determinado objetivo en la vida real, deberíamos hacer un buen uso de la observación y del sentido común, anotando los pasos que, mediante la experimentación, nos permitieran obtener la secuencia de operaciones a realizar. A nivel científico, el proceso de creación de un algoritmo es más o menos parecido, sin separarse mucho de la idea anterior, también necesita de la observación, la experimentación y la lógica. Sin razonamiento lógico sería imposible crear algoritmo alguno, es vital, pero también lo es un gran dominio de la materia y un pensamiento creativo

La Matemática es una actividad mental y el pensamiento matemático se desarrolla cuando se hace Matemática. Hacer Matemática implica ante todo establecer relaciones. El rigor va unido a la Matemática desde las primeras experiencias que el niño tiene para conseguir conocimiento. Pero rigor no es abuso de formalización y simbología sin significado, rigor es, ante todo, claridad mental. El desarrollo del pensamiento, en particular el pensamiento algorítmico, no se consigue sólo cuando trabajamos actividades de un contenido específico, sino en el momento en el que una acción o un conjunto de acciones se esfuerzan por conquistar la construcción de una idea. La Matemática Numérica es una de las ramas de la Matemática que más contribuye al desarrollo del pensamiento algorítmico. El uso de la tecnología en la enseñanza de la Matemática Numérica contribuye notablemente al aprendizaje de los algoritmos numéricos de cada método, pero es imprescindible un diseño adecuado del proceso para utilizar la tecnología como un medio didáctico, que contribuya al mejor aprendizaje de los estudiantes.

### **El concepto de convergencia**

Cualquier concepto matemático tiene muchos caminos para llegar a él, uno de estos caminos, el más usual, para llegar al concepto de convergencia es a través del estudio de los conceptos de: sucesiones y límite de sucesiones, series numéricas y suma de una serie, y series de funciones y función suma. El concepto de límite es la base para la comprensión del de convergencia, pero el

límite es uno de los conceptos más abstractos y difíciles para los estudiantes, y el énfasis fundamental se hace en calcular límites y no en comprender e interpretar el concepto.

El concepto de límite, fundamentalmente el límite de una sucesión, y en particular el concepto de suma de una serie, contribuyen notablemente a conceptualizar el concepto de convergencia (Lehmann, 1995). Sin embargo, el énfasis fundamental se hace en la convergencia y las pruebas de convergencia, se dedica mucho tiempo a determinar si una Serie converge o no, pero muy poco, o ninguno, a determinar hacia qué valor converge la Serie, vuelve a quedar oculto el concepto en la aplicación de procedimientos de cálculo. El concepto de convergencia se retoma en el estudio de las integrales impropias y su convergencia, “si el límite existe y es finito”. Por último, aparece con mucha fuerza en la Matemática Numérica, con mayor complejidad en los métodos iterativos de Jacobi y Seidel para resolver sistemas de ecuaciones lineales, por tratarse de la convergencia de una sucesión de vectores.

### La calculadora y el “esquema de cálculo”

Con cualquier herramienta de cálculo, la enseñanza de la Matemática Numérica ha partido del análisis del conjunto completo de procedimientos que conducen a la solución del problema matemático que es objeto de estudio, o sea el algoritmo, pasando por la prueba de la convergencia del método o, al menos, mostrando la convergencia en los ejemplos y ejercicios resueltos. Uno de los recursos que se utilizó para el estudio de los algoritmos fue el esquema de cálculo, con el cual se podía mostrar al estudiante, mediante la realización de varios pasos, el desarrollo del algoritmo y la convergencia de un método.

Un ejemplo típico se muestra con la solución de una ecuación por el método de Newton-Raphson. Dada la ecuación  $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$  se puede calcular la raíz en el intervalo  $[2,4 ; 2,5]$  mediante la fórmula de Newton-Raphson, después de probar que para  $x_0 = 2,5$  esta fórmula converge a dicha raíz. Se utiliza entonces el siguiente esquema de cálculo, el cual, además de organizar los cálculos manuales, ayuda al profesor a mostrar el proceso de convergencia del método:

$n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$	$x_{n+1}$
0	2,375	28,75	0,0826089	2.4173931
1	0,0843686	27,3043304	0,0031035	2,4142878
2	0,0019769	26,6292347	0,000742	2,4142136
3	0,000010	26,6274179	0.000000	2,4142136

Se observa como  $f(x_n)$  converge a cero, lo que implica que el término corrector se haga también prácticamente cero. Las formas más rápidas de cálculo se lograron con la introducción de las calculadoras electrónicas, desde las más elementales hasta las calculadoras científicas más modernas.

## Las computadoras y los paquetes profesionales

El surgimiento de las computadoras ha revolucionado el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (Castro, 2001), introduciendo nuevos paradigmas que han transformado al docente, al estudiante y a las instituciones. Una de las ramas de las Matemáticas que primero recibió este impacto fue la Matemática Numérica. El surgimiento de los llamados Asistentes Matemáticos ha sido la solución para la mayoría de los que enseñan Matemática Numérica. Los Asistentes Matemáticos, como DERIVE, MATLAB, etc, no son paquetes didácticos, ni están hechos para enseñar Matemática, luego, su uso debe estar acompañado de un diseño metodológico que garantice su uso racional y el aprendizaje de los estudiantes. Algunos Asistentes Matemáticos, como el MATLAB, traen cajas de herramientas con los algoritmos numéricos ya programados para distintos métodos y además dan facilidades de programación al usuario.

## Un software didáctico

Un grupo de docentes del Departamento de Matemática General, en la Facultad de Ingeniería Industrial de la Cujae, desarrollaron un software especialmente dirigido a su uso para la enseñanza de la Matemática Numérica, que en su última versión lleva el nombre de MN-2000 (Álvarez, 1998). En este software la ejecución de todos los procesos iterativos se realiza paso a paso, de modo que puede apreciarse la forma en que se produce la convergencia, e incluso se puede trabajar en problemas en que no hay convergencia, contribuyendo así, notablemente, al aprendizaje de la Matemática Numérica.

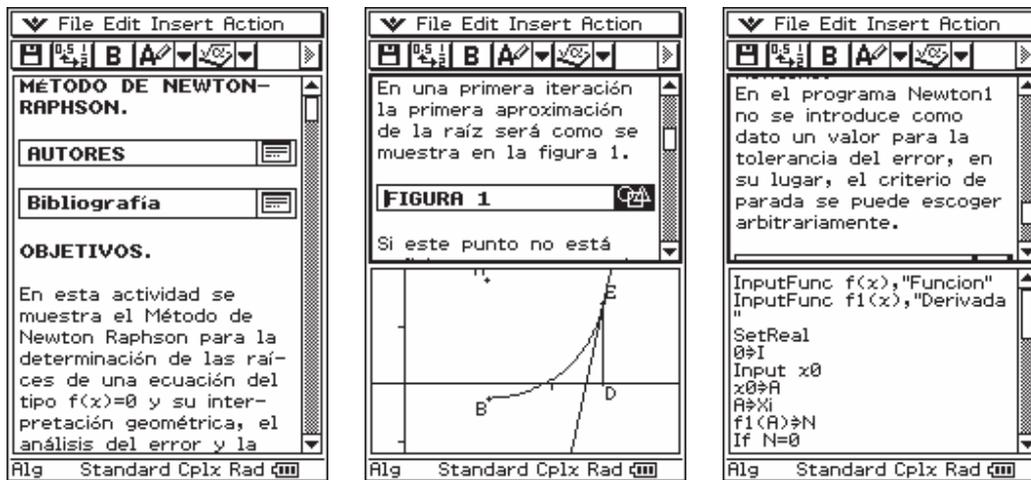
## La calculadora graficadora

Durante mucho tiempo se ha utilizado la computadora como una herramienta muy útil en la enseñanza de estos temas, generalmente se asocia “el uso de la tecnología” al empleo de la computadora. El desarrollo más reciente de calculadoras graficadoras con importantes prestaciones gráficas, de programación y de edición de textos, permiten su uso como una herramienta potente para los mismos propósitos (Preiss, 2002), veamos un ejemplo.

Se puede utilizar la calculadora *CASIO ALGEBRA FX 2.0* para resolver una ecuación del tipo  $f(x)=0$ , en un intervalo  $[a, b]$  dado (Ansola y Carlos, 2005) mediante el método de Bisección. Las posibilidades de programación de la calculadora permiten desarrollar programas, que en el aprendizaje de algoritmos numéricos resultan ser una herramienta de un valor incalculable, puesto que contribuyen al desarrollo del pensamiento algorítmico del estudiante, al mismo tiempo que facilitan el aprendizaje del algoritmo numérico.

Otra calculadora utilizada con estos fines es la *ClassPad 300*. Una de las herramientas novedosas en esta calculadora es la creación de e-activities, las cuales consisten en un conjunto de instrucciones en forma de texto, cálculos numéricos, gráficos, definiciones, construcciones geométricas, tablas, etc., en forma ordenada, para presentar cierta información que nos permita solucionar un problema, o dar una explicación sobre un tema determinado. Por esto es de esperar que puedan ser muy útiles como herramientas en la organización y distribución del material didáctico de una clase. (Moya et al, 2005). Esta calculadora también posee posibilidades de programación, que se utilizan en una e-activitie para mostrar programas y para orientar tareas de

programación de métodos. A continuación se muestran algunas pantallas del ClassPad Manager referidas a la e-activity del Método de Newton-Raphson (Ansola y Carlos, 2006; Carlos, 2006).



En ambos casos la calculadora se utiliza como herramienta para mostrar paso a paso el desarrollo de los algoritmos, contribuyendo así al aprendizaje de los mismos y al aprendizaje del proceso de convergencia, en esto radica su principal potencialidad tecnológica.

### Conclusiones

La necesidad de estudiar métodos eficientes de cálculo, preferiblemente métodos aproximados, para resolver complejos problemas de ingeniería, así como de estimar o acotar el error cometido en esta aproximación, hizo que la Matemática Numérica fuera una de las primeras ramas de la Matemática en recibir el impacto de las nuevas tecnologías

Dos de los obstáculos más importantes que se pueden encontrar en el aprendizaje de la Matemática Numérica son la falta de un desarrollo adecuado del pensamiento algorítmico en los estudiantes y el conocimiento poco preciso del concepto de convergencia. El uso de computadoras y calculadoras con prestaciones gráficas, de programación y de edición de textos posibilitan la ejecución de los procesos iterativos paso a paso, de modo que pueda apreciarse la forma en que se produce la convergencia, e incluso se puede trabajar en problemas en que no hay convergencia. Posibilitando un mejor aprendizaje de los algoritmos y del proceso de convergencia, lo que permite afirmar que el uso de la tecnología como soporte didáctico en la enseñanza de la Matemática Numérica contribuye notablemente a salvar estos obstáculos.

### Referencias bibliográficas

Álvarez, M, Guerra, A. y Lau, R. (2004). *Matemática Numérica*. La Habana. Cuba: Editorial Félix Varela.  
 Álvarez, M. (1998). Paquete didáctico de Métodos Numéricos sobre Borland Delphi. En *Memorias del Tercer Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. (Tomo II, pp. 102-105). La Habana, noviembre de 1998.

- Ansola, E. y Carlos, E. (2005). Determinación de raíces de ecuaciones utilizando la calculadora gráfica como medio de enseñanza y aprendizaje. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 18*, pp.717-721.
- Ansola, E. y Carlos, E. (2006). Experiencias en el uso de la calculadora graficadora en un curso semipresencial de Matemática Numérica. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 19*, pp. 953-961.
- Carlos, E. (2006). Enseñanza semipresencial de la Matemática utilizando como soporte tecnológico una calculadora graficadora. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 19*, pp. 948-952.
- Carlos, E. y Ansola, E. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática Numérica. Experiencias didácticas. *Ponencia invitada. Resúmenes de la Séptima Escuela y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp.147). Chilpancingo, México.
- Carlos, E. y Pérez, O. (2003). Retos de la comunidad matemática educativa ante el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones. *Ponencia invitada. Resúmenes de la Séptima Escuela y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 146). Chilpancingo, México.
- Castro, A. (2001). Incorporación de tecnología en la enseñanza de la Matemática. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 14*, pp. 277-280. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fernández, J. A. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en Matemáticas. *Unión* 4, pp. 31-46.
- Lehmann, J. P. (1995). Converging Concepts of Series: Learning from History. *LEARN FROM THE MASTERS! The mathematical Association of America*, pp. 161-180. USA 1995.
- Moya L. M. y Novoa J. F. Ejemplos de ayudas pedagógicas con calculadoras programables para el mejoramiento de la enseñanza en Matemáticas. *Revista de la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Javeriana. Volumen 10*. Bogotá, Colombia.
- Preiss, R. (2002). Modelos del Cálculo Diferencial. Programación y Proyectos con Calculadora CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS. Colección Textos de Docencia Universitaria. Universidad Diego Portales. Santiago de Chile.