

UNA DIDÁCTICA PARA EL TRATAMIENTO DE LAS SITUACIONES DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA CON UN ENFOQUE DINÁMICO EN LA ESCUELA

Celia Rizo Cabrera, Luis Campistrous Pérez

luis.campistrous@infomed.sld.cu

Investigadores. SEAC. Academia de Ciencias de Cuba.

Metodólogos. Vicerrectoría Académica del ISCF Manuel Fajardo. (Cuba)

Campo de investigación: pensamiento geométrico. Nivel educativo: básico, medio

Palabras clave: situaciones de aprendizaje, geometría dinámica, estrategias heurísticas

Resumen

En el artículo se pretende promover una reflexión acerca de la polémica entre las formas clásicas y las modernas de dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela, y se presentan algunos puntos de vista sobre los posibles cambios. En particular, se ejemplifican las relaciones entre geometría dinámica y tecnología y el papel que puede jugar la heurística en esta nueva concepción. Lo anterior se sustenta y ejemplifica mediante una concepción didáctica para el tratamiento de la geometría, mediante situaciones de aprendizaje. Las referidas situaciones de aprendizaje favorecen en los alumnos las actividades de exploración y búsqueda de nuevas propiedades de las figuras dadas, convirtiéndose su proceso de aprendizaje en una actividad rica en experiencias personales, dándole un carácter muy activo y significativo a dicho aprendizaje, que debe ser socializado en el grupo.

Introducción

Uno de los campos más notorios para la aplicación de la tecnología en la escuela, aunque no el único, es la geometría. En la actualidad, un enfoque de la geometría susceptible de ser trabajado con recursos tecnológicos lo es la denominada *geometría dinámica*, concebida esta como un enfoque de la Geometría, es decir, no es una Geometría en el sentido de propiedades invariantes a un grupo de transformaciones.

En el anterior enfoque, los objetos geométricos elementales se desplazan respecto a otros objetos con lo que la integridad de las figuras, así como su forma y otras propiedades puede afectarse. Un medio adecuado para trabajar en la escuela con este enfoque es el diseño de *situaciones de aprendizaje* con ese fin.

Las *situaciones de aprendizaje*, tal como se conciben en este trabajo, son actividades de exploración para el alumno, que en el caso de la geometría se concretan en un sistema de tareas sobre figuras geométricas, que representan una situación lo suficientemente abierta para no inhibir la búsqueda por parte del mismo, y en la que es posible realizar transformaciones con el fin de explorar cómo cambian dichas figuras y sus propiedades y que les permite analizar el nuevo objeto de aprendizaje.

Por ejemplo una situación de aprendizaje puede ser:

Situación Número 1. Relaciones de posición de dos rectas en un plano.

1. Analiza las diferentes posiciones que se pueden presentar si se tienen dos rectas cualesquiera en un plano, y analiza en cada caso si se forman nuevos objetos geométricos y decir cuáles son.
2. Investiga, en el caso del surgimiento de nuevos objetos geométricos, si éstos tienen alguna o algunas propiedades especiales. Formula hipótesis sobre ello.
3. Analiza las diferentes posiciones que se pueden presentar si se tienen dos rectas cualesquiera en un plano, y analiza en cada caso si se forman nuevos objetos geométricos y decir cuáles son.
4. Investiga, en el caso del surgimiento de nuevos objetos geométricos, si éstos tienen alguna o algunas propiedades especiales. Formula hipótesis sobre ello.

Dichas situaciones favorecen en los alumnos las actividades de exploración y búsqueda de nuevas propiedades de las figuras dadas, convirtiéndose su proceso de aprendizaje en una actividad rica en experiencias personales, que deben ser socializadas en el grupo. En este proceso la participación del alumno es activa y protagónica, elabora lo nuevo por sí mismo y en la actividad y la comunicación con los restantes pero, a la vez, la dirección del maestro es muy importante pues debe propiciar un aprendizaje significativo dentro de una actividad rica en experiencias personales y sociales.

En este trabajo se darán algunos elementos de la didáctica del tratamiento de estas situaciones de aprendizaje en la escuela, a partir del modelo de la geometría dinámica y del empleo de la heurística como vía idónea para la concepción que se propone, en un soporte teórico apropiado para ello, en el orden psicopedagógico. Se enmarca desde el punto de vista teórico dentro del paradigma histórico cultural en lo relativo al papel de la actividad y la comunicación en el proceso de aprendizaje, con un enfoque desarrollador (Silvestre, 1997).

1. Geometría Dinámica y Heurística

Una condición previa para el trabajo con estas situaciones de aprendizaje dentro de un enfoque dinámico de la geometría es el desarrollo en los alumnos de la capacidad de emplear procedimientos de búsqueda, de exploración, para lo cual son muy útiles los denominados *procedimientos heurísticos (o estrategias)* (Müller, 1986). Entre ellos el mover en una figura (variar las condiciones de la misma), mover figuras sobre otras, considerar casos particulares o especiales y casos límite, medir y comparar, buscar relaciones y dependencias, hacer conjeturas, realizar analogías y reducir el problema nuevo a un problema conocido.

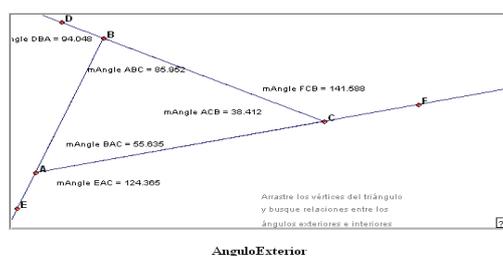
Esta concepción permite hacer la introducción de la tecnología, en este caso el empleo de calculadoras, supercalculadoras (calculadoras programables que admiten software de geometría dinámica entre otros) y computadoras, en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, pues con un software adecuado existe la posibilidad de mover las figuras, es decir, variarlas de modo que adquieren *dinamismo*. Esto marca diferencias esenciales pues durante siglos, la enseñanza de la Geometría consistió en la repetición de cadenas deductivas que “demostraban” teoremas sin que supiesen por qué lo demostraban ni cuál era el origen de esa afirmación que supuestamente habían demostrado.

2. Las situaciones de aprendizaje y los medios de enseñanza en un enfoque dinámico de la geometría

En esta propuesta se van a utilizar como medios *importantes el papel cuadriculado, los geoplanos con ligas, los geoplanos electrónicos y los applets* (Campistrous & Rizo, 1999, 2001, 2003; López & Campistrous, 2001). Las etapas de trabajo se comienzan a realizar desde los primeros grados de la escuela primaria, y paulatinamente se van elevando las exigencias en cuanto al desarrollo de habilidades según las posibilidades de los alumnos y la existencia de medios. La estructuración del empleo de medios para el desarrollo de habilidades parte de que hay que lograr el desarrollo de las habilidades manuales propias de los dos primeros grados (rasgar, recortar, trazar, medir y comparar con transportadores de papel o con reglas) que se complementan con la de trazar figuras mediante la determinación primaria de puntos característicos en papel cuadriculado (*primer nivel* en el desarrollo de la habilidad de trazar y variar figuras), y dar paso al uso del *geoplano concreto* como entrenador, el de madera o plástico y ligas, (*segundo nivel* en las habilidades para el desarrollo de la habilidad de trazar y variar figuras) reproduciendo en él lo hecho en papel cuadriculado y viceversa. Lo expresado anteriormente ilustra el modo que se puede ir produciendo, en una *primera etapa del trabajo* en la dirección de lograr este desarrollo, el desarrollo de la habilidad de “mover” en una figura, a la vez que superponen, miden y comparan, y se inicia el trabajo con el geoplano como entrenador. Un *tercer nivel* en el desarrollo de las de las habilidades que son básicas para un trabajo

posterior con las supercalculadoras y computadoras, que marca un *segundo estadio o etapa en el trabajo* es la incorporación del *geoplano electrónico* que lo pueden encontrar en el sitio de la NCTM (Consejo Nacional de Profesores de Matemática) en la sección de los ejemplos electrónicos de los estándares norteamericanos.

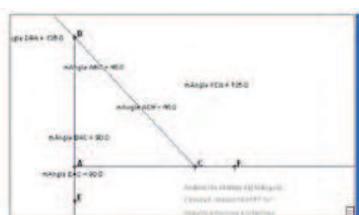
Una *tercera etapa* en el trabajo para el desarrollo de las habilidades que son básicas para el uso de softwares de geometría dinámica es la de la utilización de los *applets*, que puede ser a partir del cuarto o quinto grado de la primaria. Le hemos denominado *applets* en esta concepción, a determinados recursos que tienen los software de geometría dinámica que permiten construir “a conveniencia” actividades que sirven de base a las situaciones de aprendizaje, y que pueden ser transportadas fácilmente en cualquier soporte magnético (diskette, memorias flash, discos compactos, etc.) y ser utilizados por los docentes y los alumnos en las clases. Estos applets tienen la ventaja que conservan la posibilidad de mover a conveniencia, o sea son dinámicos. Por ejemplo, en el caso de los ángulos en un triángulo, se puede llegar a conjeturar a partir de un applet especialmente construido por el docente o modelado en la supercalculadora por el alumno de grados superiores, mediante la construcción de tres rectas que se corten dos a dos, y “medir” los ángulos que se forman en los puntos de intersección, o sea en los vértices como se ilustra en la figura siguiente.



Como se puede apreciar, una ventaja de la geometría dinámica es que permite aprovechar plenamente las *estrategias heurísticas*, en especial una de estas estrategias en la solución de problemas geométricos como lo es de “*mover la figura*”.

De esta manera el alumno puede mover la figura y conservar ciertas propiedades, y puede formarse una imagen de qué cosa es lo que ocurre al hacer las variaciones y así tener ideas de cómo resolver el problema. Lo mismo ocurre con la estrategia heurística de “*considerar casos particulares*”, “*considerar casos límites*”, y “*medir y comparar*”.

Para conducir el proceso de exploración es conveniente mover el pensamiento de los alumnos, a través de impulsos, a analizar el caso particular de que las rectas formen un triángulo rectángulo isósceles, como se ilustra en la figura.



En el análisis de este caso límite, y en general para desarrollar los procesos de exploración, es conveniente organizar a los alumnos por dúos o tríos de modo que se puedan producir las relaciones interpersonales iniciales en el proceso de aprendizaje. En este caso los alumnos van a descubrir una

serie de relaciones que involucran a los ángulos del triángulo, tanto interiores como exteriores, que las convertirán en conjeturas iniciales y de las cuales algunas serán verdaderas y otras falsas.

3. *Conceptualización en el campo psicopedagógico y didáctico*

En esta propuesta se parte de la consideración de que los cambios que hay que producir, tienen que estar dirigidos a una nueva manera de trabajar estos contenidos donde se pueda explotar más y mejor los recursos tecnológicos actuales y poner a los alumnos en situación activa de aprendizaje y donde se enfrenten a procesos de búsqueda, planteo de conjeturas, comprobación experimental de ellas, entre otras formas de actuación.

En el trabajo de los docentes, se debe tener en cuenta que su misión es *dirigir el proceso de modo que pueda garantizar la actividad protagónica de sus alumnos*, de manera individual inicialmente, y *en pequeños grupos de discusión* que les permita socializar sus primeras ideas y arribar en colectivo a mejores conjeturas después de un proceso intenso de análisis y discusión. De igual modo los procesos de autocontrol y control colectivo de lo realizado deben ser garantizados por el maestro, sin influir explícitamente en los alumnos. En este contexto, se asume que la didáctica a emplear debe tener un carácter *desarrollador*, en la cual el aprendizaje debe producirse de una manera muy activa y significativa, es decir, debe propiciar el desarrollo integral de la personalidad del alumno. Un aspecto importante en esta dirección, es considerar que *el alumno que aprende tiene que poner en relación los nuevos conocimientos con los que ya posee*, es decir, con los conocimientos precedentes que ya aprendió, esto permitirá la reestructuración y el surgimiento de un nuevo nivel, para lo cual de especial importancia resulta *el significado que tenga para él el nuevo conocimiento*, las relaciones que pueda establecer entre los conocimientos que aprende y sus motivaciones, sus vivencias afectivas, las relaciones con la vida y los contextos sociales que le rodean.

En el plano didáctico surge la necesidad de *organizar a los alumnos durante las actividades de que se programen de modo que puedan producirse las necesarias interacciones entre ellos*, aunque sin descuidar las necesarias reflexiones previas que debe producirse de manera personal por cada uno de ellos, de modo que puedan ubicarse en la tarea a la que se enfrentan, y de igual modo en las reflexiones al finalizar las mismas, de modo que interioricen que han comprendido lo hecho en acciones colectivas.

4. *Elementos didácticos para la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje*

En el trabajo con situaciones de aprendizaje hay tres momentos esenciales, o también pudieran considerarse acciones desde el punto de vista didáctico, en lo que respecta a la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje. Estos momentos son: la exploración, la conjeturación y la validación.

La *exploración* es una etapa inicial, muy importante, en la cual el alumno de manera individual o en colaboración con otros y a partir de los impulsos que el maestro le da si fuera necesario, comienza un proceso de búsqueda de relaciones en una actividad en la cual experimenta de manera variada. La misma debe hacerse siguiendo un proceder sistemático de búsqueda de nuevas relaciones, o de relaciones ya conocidas de situaciones anteriores y que pudieran ser transferidas a la nueva situación. Estas posibles relaciones se van “anotando”, socializando con el resto de los alumnos, hasta llegar a una lista de relaciones posibles que se convierten en conjeturas. Esta es la *etapa de la conjeturación*. Las conjeturas hechas se van procesando, en primer lugar para determinar si alguna puede ser rechazada de inmediato mediante un contraejemplo. Ya estamos entrando en la *etapa de validación* y las que sucumben con un contraejemplo se desechan de inmediato. Las que no pueden ser rechazadas fácilmente con un contraejemplo, en dependencia del grado en que el alumno esté, deben ser argumentadas con otras afirmaciones ya aceptadas y conocidas por el alumno, o demostradas siguiendo un proceso deductivo que lo permita. De no ser posible, esa conjetura “se

guarda” para momentos más oportunos en los cuales el sistema de conocimientos del alumno se amplíe y pueda llegar a demostrarla o a rechazarla.

No obstante, estos tres momentos o etapas tienen algunas exigencias didácticas que no deben desconocerse, pues el alumno no las puede ejecutar si no está debidamente preparado para ello. Una de ellas es la necesaria *creación de condiciones previas* en cuanto al desarrollo en los alumnos de la capacidad de emplear procedimientos de búsqueda, de exploración, para lo cual son muy útiles los denominados procedimientos heurísticos.

Otra de estas exigencias es la *formación de acciones de orientación, búsqueda sistemática de lo nuevo, valoración y control*. Para ello es necesario que se tenga en cuenta las etapas por la que toda actividad humana transcurre según el enfoque histórico cultural y que son las de *orientación, ejecución y control*. En estas tareas enmarcadas en situaciones de aprendizaje, no es tan obvia la separación de la actividad del alumno en estas tres etapas, pues la ejecución se da desde el inicio, en la medida en que el alumno se orienta y comienza la exploración. Esta exploración se debe hacer, siempre que sea posible, de manera organizada y con cierta búsqueda sistemática de lo nuevo, pero a la vez se ve enmarcada en un proceso de exploración sin una planificación preconcebida, pues no siempre es posible planificar en este tipo de actividad de búsqueda. No obstante esta imposibilidad de aislar cada etapa en su desarrollo daremos algunas ideas del tratamiento de dichas etapas por separado, solo para facilitar la comprensión. En la *etapa de orientación*, el docente tiene que poner en contacto al alumno con la nueva situación de aprendizaje, de modo que se produzca en él deseos de aprender y comprenda en qué dirección debe encaminarse para lograrlo. *Comprende la motivación y la orientación propiamente dicha*. La *orientación* es una de las etapas fundamentales, y se pone de manifiesto cuando mediante la dirección del maestro se logra que el alumno interiorice qué es lo nuevo que se va a aprender y en qué se diferencia de lo que ya han aprendido y el alumno puede establecer nexos entre lo conocido y lo nuevo que va a aprender de una forma muy clara para él.

En el caso de las *situaciones de aprendizaje*, en la que la actividad del alumno es determinante, es muy importante establecer una *situación inicial* clara que permita al alumno comprender la tarea que se le está planteando, que son actividades de exploración que le permite analizar el nuevo objeto de aprendizaje y realizar transformaciones que le facilite identificar los diferentes casos que se pueden presentar ante una misma orden, así como formular hipótesis sobre el comportamiento de los elementos nuevos que pueden aparecer, en los casos que se están presentando, así como la presencia de nuevas relaciones entre dichos elementos. Esta tarea debe estar claramente formulada, y estar acompañada de las indicaciones necesarias para lograr la comprensión inicial por parte del alumno, pero la dificultad estriba en que en *estas tareas deben ser lo suficientemente abiertas para que creen la necesidad de la búsqueda, la exploración*, por lo que *hay algunas intenciones que están implícitas*, de modo que los alumnos deben explorar con lo que se obtiene inicialmente y en el trabajo en grupo formular posiciones personales y de grupo, y plantear las conjeturas que le surjan de la exploración. Si es necesario, en este proceso de búsqueda el maestro le dará a los alumnos *impulsos* que en forma de sugerencias, lo suficientemente generales para que no se conviertan en barreras para la actividad independiente del alumno, favorezcan sus acciones de búsqueda. Estos impulsos, *pueden ser considerados como una especie de ayuda*, que opera como un estímulo directo para buscar dichos recursos, pero indirecto en cuanto a la solución de la situación dada. En estas situaciones de aprendizaje también se pone de manifiesto la orientación cuando el maestro propicia la creación de un *ambiente de exploración* adecuado para que el alumno se sumerja en él y pueda utilizar procedimientos heurísticos de búsqueda que le permitan “*ver*” esas nuevas relaciones y formular conjeturas consecuentemente.

Es conveniente precisar que en la medida que el alumno va desarrollando métodos propios de exploración, necesita cada vez de menos impulsos por parte del maestro, pues los que le ha ido dando inicialmente se van convirtiendo en un proceder generalizado de actuación para la búsqueda y obtención de conclusiones.

En esta etapa es importante que el maestro tenga en cuenta que, en este ambiente de exploración en el que se sumerge al alumno, pueden aparecer nuevos conceptos o relaciones no previstas para un grado dado, y que *no pueden ser ignorados*. La *valoración y el control*, son acciones que están íntimamente ligadas a la actividad grupal, *cuando se intercambian posiciones y se reflexiona sobre lo obtenido*, y el *control específicamente en este caso está asociado a las acciones de prueba sistemática de las conjeturas que se formulan*.

Esta nueva forma o tratamiento de la geometría, incluye el tratamiento de los ejercicios y problemas geométricos pues se convierten en *problemas abiertos*. Por ejemplo, los ejercicios típicos de geometría son como los siguientes:

Demuestra que las tres alturas de un triángulo cualquiera se corten en un punto (de igual modo para bisectrices, medianas y mediatrices)

Con esta nueva concepción didáctica el ejercicio podría plantearse de manera diferente, que puede ser utilizada como una situación de aprendizaje:

Traza las tres alturas de un triángulo cualquiera. Observa qué sucede. Explora con otros triángulos si sucede lo mismo que con el triángulo inicial y formula una hipótesis sobre ello. Explora si una propiedad similar a la anterior se cumple cuando se trazan las tres bisectrices (las tres medianas, las tres mediatrices).

En dependencia del grado puede pedirse también la demostración de la conjetura hecha.

A modo de conclusión queremos destacar que estamos ante una situación didáctica nueva, que cambia completamente la forma en que se enseña y aprende la geometría. Esta situación es muy importante por lo que puede significar en la búsqueda de nuevos caminos, que pueden ser trascendentes en cuanto a las variaciones que se van a producir necesariamente en la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, y que debemos atender con especial interés profesional.

Referencias bibliográficas

- Campistrous, L. y Rizo, C. (1999). Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos. Publicaciones del *Congreso Pedagogía 99*. Ciudad de la Habana.
- López, J. M. y Campistrous, L. (2001). La calculadora como herramienta heurística. *Revista Uno*. (28)
- Müller, H. (1986). *Formas del trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática*. Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. No. 6. La Habana.
- Rizo Cabrera, C. y Campistrous, L. (2001). Tecnología, Resolución de Problemas y Didáctica de la Matemática. *Ponencia Congreso Pedagogía 2001*. Ciudad de la Habana.
- Rizo Cabrera, C. y Campistrous, L. (2003). Aprendizaje y Geometría Dinámica. *Ponencia Congreso Pedagogía 2003*. Ciudad de la Habana.
- Rizo Cabrera, C. y Campistrous, L. (2003). Geometría dinámica en la escuela, ¿mito o realidad? *Ponencia Primer Congreso de aplicaciones tecnológicas en la Didáctica de las Ciencias y la Matemática*. Instituto Nacional Tecnológico de Santo Domingo.
- Silvestre M. (1997). *Concepción de una Enseñanza desarrolladora*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.