

ELEMENTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS DE LAS CONDICIONES INICIALES EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES¹

Erivan Velasco Núñez-Gabriela Buendía Abalos
Cimate-Unach, Chiapas, México.
erivel79@hotmail.com

Campo de Investigación: Socioepistemología; Nivel Educativo: Superior

RESUMEN O ABSTRACT

La disciplina Matemática Educativa atiende problemáticas relacionadas con la transmisión de saberes en área del conocimiento de las matemáticas. Una de ellas, consiste en haber reconocido que en el nivel superior, se privilegia a ultranza el contexto analítico en la resolución de un problema de ecuaciones diferenciales de valores iniciales de orden n . Buendía y García (2000), señalan, después de un análisis del discurso escolar a través de los libros de texto de ecuaciones diferenciales, que los significados de las condiciones iniciales se plantean principalmente en un escenario algorítmico, en donde solamente se ve involucrado un proceso analítico. Por ello, convenimos en abordar tal problemática a través del análisis de los elementos socioepistemológicos que existen en dicha relación tomando en cuenta el tránsito entre tres contextos: el contexto analítico, el contexto gráfico y el contexto físico.

PROBLEMÁTICA

La disciplina Matemática Educativa atiende problemáticas relacionadas con la transmisión de saberes en área del conocimiento de las matemáticas. Con ese marco se han identificado fenómenos didácticos que tienen que ver con la enseñanza del cálculo en el nivel superior, en particular, la enseñanza de las condiciones iniciales de una ecuación diferencial lineal. En los libros de texto de ecuaciones diferenciales de la matemática escolar, un problema de condiciones iniciales de orden n para una ecuación diferencial lineal se refiere a

$$\text{Resolver: } a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\text{Sujeta a: } y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Un problema de este tipo busca una función definida en algún intervalo I que contenga a x_0 , y satisfaga la ecuación diferencial y las n condiciones iniciales especificadas para ese punto. De hecho, se espera que la función resultante sea única². Si particularizamos para

¹ Esta investigación se desarrolla bajo el apoyo del proyecto PROMEP “Estudio del desarrollo del saber matemático en un marco socioepistemológico”. Folio UACHIS-PTC-39. Carta de liberación: PROMEP/103.5/94/2927

² Siempre y cuando se cumplan las condiciones establecidas por el teorema de existencia y unicidad: “ Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I , y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x del intervalo. Si $x = x_0$ es

algunos valores de n , y con coeficientes iguales a uno, tenemos que, al abordar un problema de condición inicial para una ecuación de diferencial de primer orden, habrá una única condición que cumplir; para una ecuación de segundo orden, habrá dos condiciones iniciales, y así sucesivamente:

$$\begin{array}{lll} y' + y = f(x) & y'' + y' + y = f(x) & y'''' + y'' + y' + y = f(x) \\ \text{sujeta a } y(x_0) = y_0 & \text{sujeta a } \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{array} & \text{sujeta a } \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \end{array} \end{array}$$

Según la estructura del enunciado al presentar este tipo de problema, podríamos suponer, sin ningún otro tipo de cuestionamiento, que en cada uno de los casos anteriores hallaremos una única solución y que las condiciones iniciales vienen establecidas según la algoritmización del proceso anterior. Pero ¿Qué significado tienen esas condiciones iniciales?

ESTADO DEL ARTE

En nuestro estado del arte hablaremos de tres contextos, en los cuales podemos visualizar que las condiciones iniciales tienen significados propios de cada contexto, estos significados son los que tomaremos en cuenta para formular una secuencia, los contextos son los siguientes:

- Contexto Analítico
- Contexto Gráfico
- Contexto Físico

CONTEXTO ANALÍTICO

Cuando resolvemos una ecuación diferencial sujeta a condiciones iniciales, que son las condiciones que se imponen a $y(x)$ o a sus derivadas, éstas vienen dadas con respecto al orden de la ecuación diferencial.

Es en la parte final de la resolución analítica, cuando se obtiene la solución particular, donde se forma un sistema de ecuaciones cuadrado, así para una ecuación diferencial de primer orden el sistema es de una ecuación con una incógnita, para el caso de una ecuación diferencial de segundo orden, el sistema es de dos ecuaciones con dos incógnitas.

CONTEXTO GRÁFICO

En el marco de la disciplina de la Matemática Educativa se ha realizado un estudio sobre la problemática, Buendía y García (2002), buscan dar respuesta a la pregunta ¿Por qué son necesarias n condiciones iniciales para una ecuación de n -ésimo orden?

cualquier punto del intervalo, existe una solución en dicho intervalo $y(x)$ del problema de valores iniciales representado por las ecuaciones $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ que es única», (Zill, 1997).

Situación I (Primer orden)

Se parte de la ecuación diferencial lineal de primer orden $ay' + y = x$, cuya familia de soluciones es: $y(x) = x - 1 + ke^{-x}$. Se puede observar en la figura 1, que su comportamiento tiende a la recta $y = x - 1$

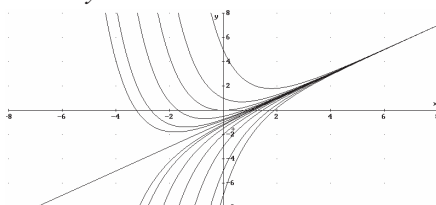


Figura 1

Se puede observar que en este caso las curvas que conforman la familia de soluciones de la ecuación diferencial no se cruzan entre ellas, es decir, no se cruzan entre sí. Entonces, por esta razón, para determinar una solución particular, es suficiente con una única condición inicial, que nos indica por qué punto (par ordenado) pasa la curva que representa la solución buscada.

Situación II (Segundo orden)

Como ejemplo, la ecuación diferencial, $y'' + y' + y = x$, tiene como solución la siguiente familia de curvas:

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

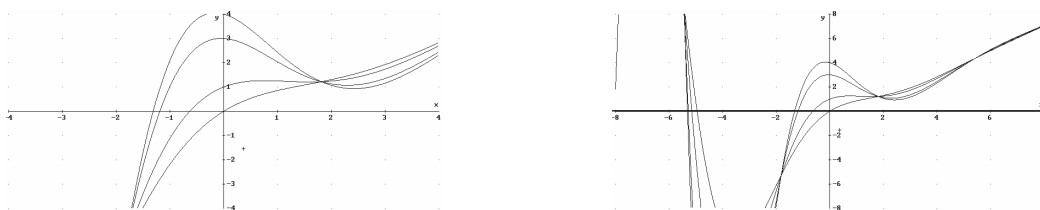
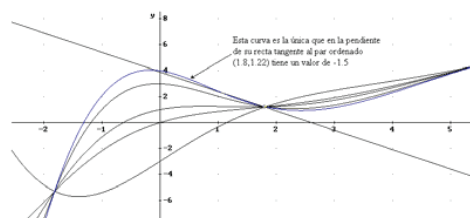


Figura 2

Se puede observar en la figuras anteriores, que no es suficiente determinar un punto por donde pasa la curva, puesto que por un punto puede pasar más de una curva, tal y como se ve en el acercamiento.

Esto implica la necesidad de establecer cómo es la forma de la curva cuando llega a dicho punto. Por ello, la pendiente de la recta tangente nos sirve para poder determinar a cuál curva del dicho conjunto de curvas, nos estamos refiriendo. Por esto, las condiciones iniciales para obtener una única solución deben ser del tipo $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.



CONTEXTO FÍSICO

En nuestro medio ambiente, existen fenómenos y cuerpos que su comportamiento se modela a través de ecuaciones diferenciales, tal es el caso del enfriamiento (modelado por ecuación diferencial lineal de primer orden) y de los resortes (modelado por una ecuación diferencial lineal de segundo orden). Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la temperatura ambiente. Si $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el momento t , T_m es la temperatura constante del medio que lo rodea y dT/dt es la rapidez con que se enfría el objeto, la ley de Newton del enfriamiento se traduce en el enunciado matemático

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \quad \text{o sea} \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m),$$

en donde k es una constante de proporcionalidad. Si planteamos la situación en donde se mide el enfriamiento de un material o una sustancia que ha sido calentada en un tiempo determinado, por ejemplo 15 minutos, y si dicho experimento se realizará más de una vez y con distintas sustancias o materiales, necesitaríamos conocer la temperatura inicial de cada sustancia o material para saber a cual de ellas nos estamos refiriendo, debido a que por tener diferente conductividad térmica alcanzan distinta temperatura inicial al ser calentadas. Y al hablar de temperatura inicial, estaríamos refiriéndonos a una condición inicial del tipo $y(t) = T_0$.

Para el caso de los resortes, si planteamos la situación en donde 2 resortes están en movimiento, y lo hacen de manera simultánea, y que tienen la misma *constante del resorte* (k), ambos resortes tendrían una misma posición en un tiempo determinado, y al hablar de posición, plantearíamos tener una condición inicial del tipo $y(t) = x_0$. Es necesaria, pues, la forma que tiene un resorte a dicha posición, ya que lo puede hacer en una fase de estiramiento, en una fase de compresión dependiendo de la velocidad que se le haya imprimido al resorte. Entonces, es necesaria una segunda condición inicial que nos habla de esa velocidad para poder distinguir entre uno u otro resorte.

LA INVESTIGACIÓN

Nosotros estamos convencidos que las prácticas sociales son generadoras del conocimiento matemático, por ello consideramos que algunas prácticas sociales de las que se han dado cuenta en muchas investigaciones de la Matemática Educativa, están inmersas en las condiciones iniciales de una ecuación diferencial. Con estas prácticas nosotros creemos que resultaran *elementos socioepistemológicos* de las condiciones iniciales. Pensamos que estos

elementos socioepistemológicos permitirán una reconstrucción del significado acerca de las condiciones iniciales de una ecuación diferencial.

También hay que señalar, que en nuestra investigación trabajamos hasta el segundo orden de ecuación diferencial, ya que para el caso de la modelación de un fenómeno físico mayor del segundo orden, sería muy complejo de realizar. Las prácticas que nosotros creemos que tienen mucha importancia en las condiciones iniciales de una ecuación diferencial son los siguientes:

- *La modelación de un fenómeno,*
- *la relación lineal (linealidad),*
- *la graficación,*
- *la predicción, en el comportamiento de la gráfica.*

Creemos que con estos elementos socioepistemológicos se puede realizar un estudio socioepistemológico, que involucra los cuatro elementos propuestos por Cordero (1998; 2000). Y realizar un estudio de la *argumentación* de las condiciones iniciales. Debemos decir que por *argumentación* nosotros nos estamos refiriendo al conjunto de argumentos de tipo retórico, heurísticos, situacionales, discursivos, provocados por una *situación adidáctica*³, con lo que pensamos se resignificará el significado de las condiciones iniciales de una ecuación diferencial. El estudio de las condiciones iniciales de una ecuación diferencial a través de los cuatro elementos anteriores puede ser formulada como se presenta en la tabla 1 (Cordero, 1998; 2000) siguiente, y en conjunto estos cuatro elementos componen una situación del concepto.

Significados	Patrones de comportamientos de las soluciones de la ecuación diferencial, en relación con su orden.
Procedimientos	Análisis en el tránsito entre los contextos gráfico, analítico y físico de las soluciones de las ecuaciones diferenciales
Procesos-Objetos	La ecuación diferencial como una instrucción que organiza comportamientos en sus soluciones, en relación con el orden de las mismas.
Argumentos	Aún por definir

Tabla 1. Significados, Procedimientos, Procesos-Objetos y el Argumento de las condiciones iniciales de una ecuación diferencial.

Un marco socioepistemológico, nos obliga a estudiar:

³ Conjunto de las interacciones entre una situación matemática (específica de un conocimiento concreto) y un sujeto, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional. Dicha situación permite o provoca un cambio de estrategia por parte del sujeto para adquirir dicho conocimiento. (Chevallard, Bosh, Gascon. 1998)

- ❖ Los patrones de comportamientos de la solución que tiene una ecuación diferencial en relación con su orden. Estos patrones corresponden a fórmulas analíticas, formas específicas de las gráficas y al modelado de comportamientos de cuerpos y fenómenos físicos. Sobre estos patrones se construyen los significados de la relación.
- ❖ Este significado sugiere que se realice un análisis en el tránsito entre los tres contextos: el analítico, el gráfico y el físico, para observar que argumentaciones se generan, para reorganizarlas y confrontarlas con el argumento propuesto.
- ❖ La construcción de la relación del orden de una ecuación diferencial lineal y el número de condiciones iniciales lleva a la concepción de que una ecuación diferencial es una instrucción que organiza comportamientos en sus soluciones, en relación con el orden de las mismas, por lo que habrá diferentes construcciones mentales, como procesos y objetos.
- ❖ Generación de un argumento, extraído de las prácticas sociales, que confronte los diferentes significados de las condiciones iniciales de una E.D.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico)*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Buendía, G. y García, C. (2002). *Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 15(1), 108-113.

Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. En tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso*. México: Paidós.

Cantoral, R. (2004). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17(1), 1-9.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. En tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Reyes, A. y Cordero, F. (2003) *Estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 16(1), 105-111.

Zill, D. (1997) *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: Thomson.