TEORIA DOS NÚMEROS E O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Claudia Lisete O Groenwald, Lisandra de O Sauer, Rosvita F Franke
Universidade Luterana do Brasil – Brasil
claudiag@ulbra.br, licasauer@terra.com.br, rosvitafranke@ig.com.br

Campo de investigación: Pensamiento algebraico; Nivel educativo: Medio

Resumo

Com a corrente da Matemática “Moderna”, tanto a Geometria como a Teoria dos Números ficaram relegadas a segundo plano nos currículos da Matemática no Brasil, nos últimos anos a Geometria voltou a recuperar sua força e importância, porém não ocorreu o mesmo com a Teoria dos Números, talvez por não ter se encontrado um meio termo para sua apresentação como simples receituário ou, porque, seu ensino mais profundo apresenta muitas dificuldades de compreensão, tanto para os professores como para os alunos. O trabalho aqui proposto objetiva analisar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos elementares da Teoria dos Números.

Palavras chave: Teoria dos Números, Educação Matemática, Ensino e aprendizagem.

Introdução

Assim como houve um enorme desenvolvimento da Matemática nas últimas décadas, também cresceram as dificuldades em ensinar Matemática. Um dos problemas apresentados pelos alunos está em aplicar os conceitos de aritmética, principalmente os tópicos de divisibilidade, máximo divisor comum e congruência com números inteiros.

Entre os obstáculos encontrados pelos professores de Matemática na transposição didática dos conceitos citados, e que são importantes para o desenvolvimento do pensamento aritmético, podemos destacar a falta de modelos, pois cada problema se resolve de um modo, além disso, é muito raro encontrar atividades didáticas aplicáveis no Ensino Básico.

Para Lins e Gimenez (1997) a aritmética escolar não muda porque o currículo tradicional indica o que se deve ensinar na escola e os professores são submetidos a uma enorme pressão dessa tradição. Afirmam também, os autores, que a aritmética propõe um sentido integrador que permite resolver problemas diversos, assim as técnicas e regras deveriam servir para solucionar problemas.

Mobilizados e motivados por essa necessidade, investigamos e elaboramos atividades didáticas referentes à Teoria dos Números, área da Matemática que estuda a relação entre os Números Inteiros. Essas relações podem ser desenvolvidas de forma a estimular nos alunos o interesse pela Matemática, aprimorando o raciocínio lógico e ampliando a compreensão dos conceitos básicos para o refinamento do pensamento aritmético, fazendo com que os mesmos desenvolvam a capacidade de manipular conceitos e propriedades de forma clara e objetiva.

Porém, para que a Teoria dos Números ganhe espaço nos currículos escolares torna-se de fundamental importância que haja um espaço de discussão e reflexão nos cursos de Licenciatura de Matemática, possibilitando que os futuros professores desenvolvam a capacidade de realizar a transposição didática necessária de tais conceitos para o Ensino Básico.

Teoria dos Números

A aritmética é uma ciência de todos os tempos, provêm do vocábulo ARITHMOS, que significa número. É a ciência na qual se estudam as propriedades e relações entre os números. O objetivo central dessa teoria é o estudo das propriedades dos números inteiros. Essa Teoria aparece como ferramenta em diversas áreas da Matemática, como: Probabilidade, Álgebra, Sistemas Dinâmicos, etc., servindo de alicerce para resultados significativos.

Muitos resultados dentro dos campos, da Matemática, citados acima, que eram bastante complexos, obtiveram caminhos abreviados com a utilização dos principais conceitos da Teoria dos Números. São três os principais ramos em que se divide a Teoria dos Números: Teoria Elementar, Teoria Analítica e Teoria Algébrica.

Um pouco da história da Teoria dos Números

É na Grécia que primeiro identificamos a Teoria dos Números tal como a entendemos hoje em dia. Foram os pitagóricos que estudaram as relações entre números do ponto de vista que hoje chamamos Teoria dos Números, a aritmética era o estudo das propriedades fundamentais dos Números Inteiros, domínio dos comerciantes e profissionais da época e a logística é o que chamamos de aritmética nos dias de hoje.

Entre os problemas da Teoria dos Números abordados pelos gregos antigos estão:

- cálculo do máximo divisor comum entre dois números;
- a determinação dos números primos menores que um inteiro dado;
- a demonstração de que há uma infinidade de números primos.

Entre os principais estudiosos dessa teoria podemos citar Euclides de Alexandria (330 -275 a.C), geômetra grego, professor de Matemática a convite do então imperador da parte egípcia da Grécia Antiga: Ptolomeu I. Organizou a obra monumental "Os Elementos", composta de 13 livros. Os livros VII, VIII e IX estão dedicados a Teoria dos Números. Os conceitos numéricos estão expressos em uma linguagem geométrica, Euclides se refere a um número como um segmento $\overline{AB}$, utilizando expressões do tipo "mede A" ou "está medido por" no lugar de é "divisor de" ou é "múltiplo de".

Vários outros matemáticos gregos estudaram problemas da Teoria dos Números. Destes o mais importante foi sem dúvida Diofanto. Sua A*ritmética*, escrita por volta de 250 d.C., trata principalmente da solução de equações indeterminadas com coeficientes inteiros.

Embora a Matemática tenha sido intensamente estudada por outros autores gregos, e posteriormente árabes, indianos e europeus; a Teoria dos Números caiu em esquecimento até o século XVII.

Bachet, em 1612, publicou o texto original em grego da *Aritmética de Diofanto*, juntamente com uma tradução latina, que era a língua usada pelos eruditos europeus da época.

Entre 1621 e 1636 o francês Pierre de Fermat, magistrado da corte de Toulouse, adquiriu uma cópia deste livro. Fermat leu o texto de Diofanto, anotando na margem as idéias que lhe ocorriam. Isto marcou o início do interesse de Fermat em Teoria dos Números, que posteriormente se expressou em uma torrente de resultados importantes.

Fermat nasceu em 1601, e era um magistrado por profissão e não matemático. Na verdade poucas pessoas viviam de Matemática naquela época. A comunicação entre os matemáticos também era precária, não haviam revistas especializadas. A primeira revista dedicada à Matemática só foi criada em 1794. A comunicação era conduzida principalmente através de cartas, com algumas pessoas servindo de centros difusores dos novos resultados.

O mais famoso divulgador dos resultados obtidos na Matemática foi o frade francês Marin Mersenne. Muito amigo de alguns dos maiores matemáticos da época, como Descartes, Pascal e o próprio Fermat, Mersenne logo comunicava a toda a "*República de Letras*" as novidades matemáticas que chegavam ao seu conhecimento.

Foi na forma de cartas enviadas a Mersenne e a outros matemáticos contemporâneos que boa parte da obra de Fermat ficou conhecida. Depois da morte de Fermat em 1665, coube a Samuel Fermat, filho de Fermat, coletar e publicar a obra de seu pai, dispersa em cartas e anotações. Ele começou com a publicação da *Aritmética de Diofanto*, incluindo todas as anotações feitas por Fermat à margem da sua cópia. Destas anotações a mais famosa é o chamado *Último Teorema de Fermat*: Não existe solução não nula, para a equação $x^n + y^n = z^n$, onde $n \geq 3$ e x, y e z números inteiros. Este resultado só foi provado em 1995, pelo inglês Andrew Wiles, mais de 300 anos depois de ser anunciado por Fermat.

O sucessor de Fermat foi o suíço Leonhard Euler, que nasceu em 1707, quarenta e dois anos depois da morte de Fermat. Euler publicou uma obra matemática imensa, tendo contribuído para quase todas as áreas da Matemática pura e aplicada existentes no século XVIII. Euler não foi professor de nenhuma universidade, mas esteve ligado a academias científicas na Alemanha e na Rússia. Essas academias eram, na verdade, instituições de pesquisa, cujas atas publicavam primordialmente as contribuições científicas de seus membros.

O interesse de Euler em Teoria dos Números teve início em sua correspondência com Christian Goldbach, foi através dele que Euler chegou à obra de Fermat. Em sua primeira carta a Euler em 1729, Goldbach acrescenta o seguinte PS: *Você conhece a observação de Fermat de que todos os números* $2^{2^n} + 1$ *são primos? Ele disse que não sabia prová-la; nem ninguém conseguiu fazê-lo, que eu tenha conhecimento.*

Euler reage com ceticismo e não demonstra muito interesse, mas Goldbach não desiste e volta ao assunto. Em 1730, Euler começa finalmente a ler a obra de Fermat. Nos anos seguintes ele provaria e estenderia grande parte dos resultados enunciados por Fermat, resolvendo inclusive a questão proposta por Goldbach.

Através de seus trabalhos Euler popularizou a Teoria dos Números como Fermat não havia conseguido.

Podemos destacar dos estudos de Goldbach a famosa conjectura que afirma: "*Todo número par maior que 2 pode ser decomposto na soma de dois números primos*". Este resultado não foi provado até os dias de hoje.

Porém o desenvolvimento sistemático da Teoria dos Números só teve início com a obra *Disquisitiones arithmeticae* do alemão C. F. Gauss, publicada em 1801.

Objetivos

Os objetivos deste trabalho foram: investigar atividades didáticas com os conceitos iniciais da Teoria dos Números; analisar o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos, investigando como realizar a transposição didática para o Ensino Básico.

Exemplos de atividades para o Ensino Básico

Com o objetivo de que a Teoria dos Números ganhe espaço nos currículos escolares, apresentamos exemplos da utilização dessa teoria no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

1 Adivinhando o algarismo suprimido

Pede-se para alguém pensar em um número de vários algarismos e somar esses algarismos. Em seguida pede-se que a pessoa subtraia a soma do número pensado. A pessoa deve então ocultar um algarismo desse último resultado obtido e informar o valor da soma dos algarismos restantes. Com isso o proponente da brincadeira "adivinha" o algarismo que foi ocultado.

Exemplo: Número pensado, $A = 5436789$

$A - S = 5436789 - (5+4+3+6+7+8+9) = 5436789 - 42 = 5436747$

A pessoa oculta, por exemplo, o algarismo 7 e fornece a soma dos outros que é $5+4+3+6+7+4$ = 29. Como a soma de todos os algarismos deve ser um múltiplo de 9, "adivinha-se"que o algarismo ocultado é 7, uma vez que 29 + 7 = 36.

Justificamos o fato acima através da seguinte proposição:

Proposição: Seja A um número natural formado pelos algarismos $a_1, a_2, ..., a_n$ então A– S é um múltiplo de 9, onde $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Demonstração: A prova utiliza a representação decimal do número A:

$A = 10^{n\text{-}1} a_1 + 10^{n\text{-}2} a_2 + ... + 10a_{n\text{-}1} + a_n$, logo,

$A\text{-}S = 10^{n\text{-}1} a_1 + 10^{n\text{-}2} a_2 + ... + 10a_{n\text{-}1} + a_n - (a_1 + a_2 + ... + a_{n\text{-}1} + a_n)$,

$A\text{-}S = (10^{n\text{-}1} - 1)a_1 + (10^{n\text{-}2} - 1)a_2 + ... + 9a_{n\text{-}1}$, que é um múltiplo de 9.

2 Escrevendo o número 20

Solicita-se ao aluno que escreva o número vinte, usando as quatro operações e os algarismos, um de cada vez. Por exemplo: 4 + 4+ 4 + 4 + 4 = 20.

No primeiro momento o aluno deve buscar alternativas de resposta sozinho ou com seu colega, depois o professor deve solicitar que busque uma generalização para a atividade. O que se percebe é que:

Utilizando o número 1 temos: (11 + 11 – 1 – 1) : 1 = 20
Utilizando o número 2 temos: (22 + 22 – 2 – 2) : 2 = 20
Utilizando o número 3 temos: (33 + 33 – 3 -3) : 3 = 20
Utilizando o número 4 temos: (44 + 44 – 4 - 4) : 4 = 20
Utilizando o número 5 temos: (55 + 55 – 5 - 5) : 5 = 20
Utilizando o número 6 temos: (66 + 66 – 6 - 6) : 6 = 20
Utilizando o número 7 temos: (77 + 77 – 7 - 7) : 7 = 20
Utilizando o número 8 temos: (88 + 88 – 8 - 8) : 8 = 20
Utilizando o número 9 temos: (99 + 99 – 9 - 9) : 9 = 20

Verifica-se que é possível escrever a seguinte generalização: dado o algarismo "a" temos: (aa + aa – a – a) : a = 20.

3 Números de Fibonacci

A seqüência de Fibonacci é definida pela fórmula de recorrência $f_1 = f_2 = 1$, $f_k = f_{k\text{-}2} + f_{k\text{-}1}$ para todo $k > 2$, formando a seqüência 1,1,2,3,5,8,13,21,34,...

$f_1 = f_2 = 1$

$f_3 = f_1 + f_2$

$f_4 = f_2 + f_3$

$f_5 = f_3 + f_4$

M

$f_k = f_{k\text{-}2} + f_{k\text{-}1}, k > 2$

Os termos da seqüência de Fibonacci chamam-se números de Fibonacci. Os números de Fibonacci possuem muitas propriedades importantes e aqui vamos apresentar duas delas.

3.1 A soma dos n primeiros números de Fibonacci é igual a $f_{n+2}-1$, ou seja, $f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+f_n=f_{n+2}-1$.

Temos

$f_1=f_3-f_2$;

$f_2=f_4-f_3$;

$\vdots$

$f_{n-1}=f_{n+1}-f_n$;

$f_n=f_{n+2}-f_{n+1}$.

Somando as n igualdades temos:

$f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+f_n=f_3-f_2+f_4-f_3+\ldots+f_{n+1}-f_n+f_{n+2}-f_{n+1}$;

$f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+f_n=f_{n+2}-f_2$;

$f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+f_n=f_{n+2}-1$.

Aplicação Geométrica

Uma possível interpretação geométrica para essa identidade é a decomposição de um retângulo de lados f_n e f_{n+1} em n quadrados de lados $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$. Conforme figura 1.

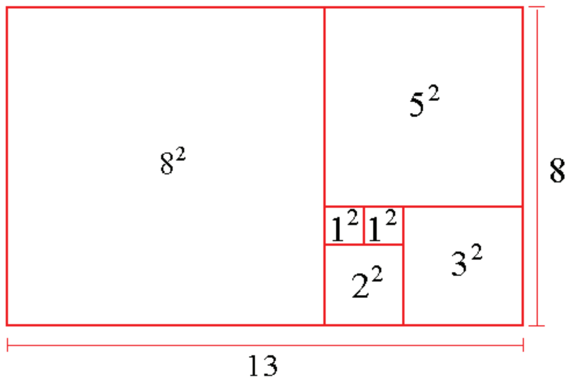

Figura 1

3.2 A soma dos quadrados dos n primeiros números da seqüência de Fibonacci é igual a $f_n f_{n+1}$, ou seja, $f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots+f_{n-1}^2+f_n^2=f_n f_{n+1}$.

Como $f_1=f_2=1$, temos $f_1^2=f_1 f_2$, e para $k>1$, temos: $f_k f_{k+1}-f_k f_{k-1}=f_k\left(f_{k+1}-f_{k-1}\right)=f_k^2$, fazendo $k=2,3,\ldots,n$.

Considerando:

$f_2=f_3-f_1$;

$f_3=f_4-f_2$;

$f_4=f_5-f_3$;

$\vdots$

$f_k=f_{k+1}-f_{k-1}$.

Temos, $f_k^2=f_k f_k=f_k\left(f_{k+1}-f_{k-1}\right)=f_k f_{k+1}-f_k f_{k-1}$;

Podemos considerar

$f_1^2 = f_1 f_2$;
$f_2^2 = f_2 f_3 - f_2 f_1$;
$f_3^2 = f_3 f_4 - f_3 f_2$;
$f_4^2 = f_4 f_5 - f_4 f_3$;
$\vdots$
$f_{n-1}^2 = f_{n-1} f_n - f_{n-1} f_{n-2}$;
$f_{n-1}^2 = f_n f_{n+1} - f_n f_{n-1}$.
Somando ordenadamente as n igualdades e simplesmente, temos:
$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_{n-1}^2 + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

Aplicação Geométrica

Considerando $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$. Multiplicando ambos os membros por π obtemos: $\pi f_1^2 + \pi f_2^2 + \ldots + \pi f_n^2 = \pi . f_n f_{n+1}$.

O lado esquerdo representa a soma das áreas de n círculos de raios $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$.

O lado direito é a área de uma elipse de semi-eixos f_n e f_{n+1}.

Conforme a figura 2.

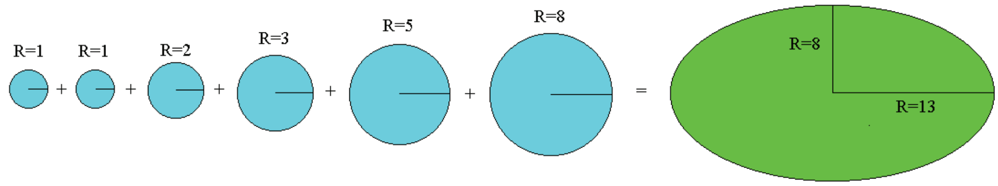

Figura 2

Conclusão

Concordamos com Lins e Gimenez (1997) que afirmam que um bom trabalho aritmético, para a prática do professor é: reconhecer a necessidade de uma mudança curricular que sirva para desenvolver um sentido numérico; integrar diversos tipos de raciocínios na produção de conjecturas; assumir o papel dos distintos cálculos, que não se reduzam a obtenção de resultados, e contribuam para aprimorar processos como planificar, desenvolver estratégias diferentes, selecionar as mais adequadas; fomentar uma avaliação que contemple a regulação e o controle constante do processo de ensino proposto.

Logo, os cursos de Licenciatura em Matemática devem primar por desenvolver um espaço para a discussão, reflexão e estudo dos conceitos aritméticos que privilegiem o desenvolvimento de estratégias para a prática docente.

Referências

Alencar, E. (1992). *Teoria Elementar dos Números*. São Paulo: Nobel.

Astudillo, M., González, M.; Acosta, M.; García, A. (1989). *Divisibilidad*. Madrid: Síntesis.

Boyer, C. (1974). *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blücher/Edusp.

García, J. e García, F. (1993). *Aprender Investigando- Una propuesta metodológica basada en la investigación.* Sevilla: DÍADA.

Gårding, L. (1997). *Encontro com a Matemática.* Brasília: UnB.

Groenwald, C.; Sauer, L.; Franke, R. (2003) *Conceitos Iniciais da Teoria dos Números no Ensino Básico.* Publicação nos Anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática (1-10), Blumenau, Brasil: FURB.

Lins, R., Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. São Paulo: PAPIRUS.

Lopes, L.(1999). *Manual de Indução Matemática*. Rio de janeiro: Interciência, 1999.

Oliveira, J. (1998). *Introdução à Teoria dos Números*. IMPA. Rio de Janeiro: CNPq.

Oliveira, Z. (1995). Uma Interpretação geométrica do MDC. *Revista do Professor de Matemática* nº 29, 3º quadrimestre.

Polya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático.* 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência.

Shokranian, S.; Soares, M., Godinho, H. (1999) *Teoria dos Números*. Brasília: UnB.

Vasconcelos, F,, Benedito, T. (1992). Congruencia, divisibilidade e adivinhações. *Revista do Professor de Matemática*. Número 22, p. 4-10.