

MODELACIÓN MATEMÁTICA Y ONTOLOGÍA

Leônia Gabardo Negrelli

Universidad Federal de Paraná – UFPR, Brasil

leoniagn@yahoo.com.br

Campo de Investigación: Modelación matemática; Nivel Educativo: Medio y Superior

RESUMEN

El objetivo de este estudio es identificar y discutir componentes de la modelación matemática procurando constituir una base teórica de carácter histórico-filosófico y epistemológico para actividades de modelación en la enseñanza. De entre esos componentes está la concepción ontológica de ‘realidad’. Tratamientos dados a la modelación matemática en diversos niveles de enseñanza, de modo especial en la enseñanza superior y en cursos de formación de profesores, presentan la realidad como punto de partida para la elaboración de problemas a ser resueltos matemáticamente. Pero, ¿en qué consiste esa realidad? Cuando se aprehende parte de la realidad en un modelo matemático lo que se obtiene es una nueva realidad (matemática), no dada, sino de alguna forma construida. Luego, la actividad de modelación no comenzaría en la realidad en sí, mas en el sujeto que la percibe.

PALABRAS-CLAVE: modelos matemáticos – modelación – realidad – representación.

1. Introducción

La modelación matemática puede ser considerada, por un lado, como un método científico de investigación que “relaciona teoría y práctica, motiva a su usuario en la búsqueda del entendimiento de la realidad que lo cerca y en la búsqueda de medios para actuar sobre ella y transformarla” (BASSANEZI, 2002, p.17). Esa es la visión proveniente de la matemática aplicada. Por otro lado, en el ámbito de la educación matemática, como método de enseñanza de la matemática (BIENBENGUT; HEIN, 2003) la modelación está siendo empleada en varios niveles de enseñanza porque se cree que ella promueve la adquisición de conocimientos matemáticos y la habilidad de utilizar esos conocimientos para la resolución de problemas formulados a partir de una realidad en la cual se insieren profesores, alumnos y los demás individuos con los cuales éstos conviven.

Por no dar importancia solamente a conceptos y técnicas puramente matemáticos, desconsiderando la utilización de los mismos en el estudio de otras áreas del conocimiento, créese también que ese método puede disminuir las dificultades de aprendizaje y aumentar el interés de los estudiantes por la matemática. Otro motivo de uso y defensa de la modelación en la enseñanza es que ella contribuye para transferir el enfoque de una matemática ya construida y acabada, cuyo funcionamiento se debe aprender por medio de la práctica de ejercicios, para una matemática que puede ser utilizada, identificada, reconstruida, o inclusive construida, cuando se objetiva conocer, comprender y actuar sobre la realidad de la cual se forma parte.

Hay, de hecho, una tercera interpretación de modelación en el contexto de la matemática pura y en íntima conexión con la lógica matemática, en la cual la palabra “modelo”, importante para las tres interpretaciones, es tomada en otro sentido. El modelo usado en el sentido de la lógica matemática no es otra cosa sino la realidad que una cierta teoría matemática, usualmente dada en forma axiomática, pretende describir.

Cuando es usada en el sentido de la matemática aplicada, el modelo es aquella teoría muchas veces expresada a través de ecuaciones.

Como puede ser observado, en las tres interpretaciones de modelación hay una noción de ‘realidad’ para la que es necesario elaborar una teoría matemática, es decir, un modelo matemático que la describa. Ese modelo puede ser dado, como es sugerido antes, por medio de ecuaciones de diversos tipos o por medio de sistemas axiomáticos, como en muchos casos de la matemática pura.

Empleada en la enseñanza, la modelación matemática recibe diversas denominaciones como, por ejemplo, ambiente de aprendizaje, estrategia, metodología o proceso de enseñanza, entre otras. Esas denominaciones revelan una visión de la modelación matemática como elemento integrante de una didáctica general. No es nuestro interés explorar particularidades de los diferentes enfoques que esas denominaciones traen. Nuestro foco es direccionado a un elemento característico que todas ellas, de una manera o de otra, poseen: la realidad como punto de partida del proceso de modelación. Mas, ¿en qué consiste esa realidad?, es decir, ¿cual es la ontología de la modelación matemática?

Nuestro propósito en este estudio es buscar un mejor entendimiento de los varios componentes de la modelación matemática en las tres interpretaciones esbozadas anteriormente procurando obtener una fundamentación de carácter histórico-filosófico y epistemológico para las actividades de modelación matemática en la enseñanza, y no producir una respuesta cerrada para la cuestión formulada. Lo que pretendemos, de hecho, es formular y presentar adecuadamente la cuestión relativa a las concepciones de realidad que permean actividades de modelación matemática e indicar otros problemas de carácter epistemológico e histórico-filosófico relacionados a esa cuestión.

2. Modelación Matemática y Realidad

Podemos entonces comenzar por reformular la cuestión expuesta anteriormente de la siguiente forma: ¿de qué realidad parte el proceso de modelación matemática?

En un primer momento, dependiendo del contexto, podemos entender que ella parte de una realidad compuesta por elementos de naturaleza económica, física, social, política, psicológica, etc., de la cual se “transpone un *problema* (...) para la Matemática donde será tratado a través de teorías y técnicas propias de esta Ciencia.” (BASSANEZI, 2002, p.25, grifo nuestro). Pero, ¿donde reside el problema que será transpuesto para la matemática: en la realidad de la que se parte? Probablemente não. Hay un momento intermediario que consiste en una problematización que implica otra realidad que aún no es la matemática. Una especie de recorte de una situación de la realidad inicial a partir del cual se formulará un problema. Para que la problematización ocurra son necesarias abstracciones, situando el problema en otro plano que ya no es el de la realidad de la cual se trató inicialmente, haciendo con que la acción de *transponer* un problema supuestamente de la realidad para la matemática no sea legítima.

La transposición sugerida en la citación de Bassanezi presupone una selección de elementos de aquella realidad que sería compuesta por elementos existentes fuera de la mente del individuo y que son pasibles de ser captados por él de alguna forma con el auxilio de los sentidos. Creemos que la percepción de la realidad viene acompañada de ciertos parámetros de selección que, en el fondo, tienen un carácter matemático: homogeneidad, simplicidad, regularidad, entre otros. Para POINCARÉ (1946) esa selección puede ser guiada por una preferencia a los elementos más rápidamente percibidos, que se revelan más frecuentes y, debido a éso, nos parecerían más simples por el hecho de estar acostumbrados a ellos. Esos elementos se destacarían en un primer

vistazo sugiriendo homogeneidad en un ambiente naturalmente complejo y podrían entonces revelar regularidades que permitirán hacer previsiones.

Esa selección de elementos es el paso inicial en la elaboración de esa realidad intermediaria mencionada anteriormente, lo que implica una simplificación de la realidad enfocada inicialmente, destacando elementos esenciales y descartando los periféricos, para que se pueda componer una representación en lenguaje matemático. Ese proceso de simplificación, que involucra abstracción, tanto puede generar una simple eliminación de algunos elementos como puede resultar en una permanencia y también evidencia de elementos que van a permitir, de un punto de vista realista, el trabajo con la esencia. Ese punto de vista presupone la existencia de una esencia que contiene esos elementos, lo que habilita su desvelamento. De otro punto de vista, el positivista por ejemplo, en el cual no se considera la existencia de una esencia que independe de nuestra observación, esos elementos serán el resultado de la suma de nuestras percepciones (JAPIASSÚ, 1981). Más aún, el proceso de simplificación mencionado puede implicar, de un punto de vista estructuralista, la explicitación de estructuras dadas por las relaciones involucradas en los fenómenos. La modelación puede entonces ser una actividad creadora, bien como, esencialmente descriptiva.

NOUVEL (1991) discute el concepto de modelo en relación al de metáfora, destacando la primera visión. En las palabras de ese autor:

“El modelo no surge mas, al contrario, se construye.[...] ¿Para qué sirve el modelo, efectivamente? No para *ver como*, mas para negligenciar una gran cantidad de *aspectos* a fin de dirigir la atención solamente a uno, o a un pequeño número de ellos. [...] Para entender alguna cosa es preciso negligenciar muchas otras, y el modelo es la expresión de esa operación, operación controlada de una negligencia. ‘*No mire esto, mire solamente aquello, y así las cosas se tornan claras*’. Una estrategia de la negligencia, por tanto, que está relacionada al *comprender*. No se trata de hacer aparecer aspectos, mas, al contrario, de hacerlos desaparecer. El modelo es visto así como la operación inversa de la metáfora.” (p.143-4).

Siguiendo esa operación de negligencia, el proceso de simplificación como fue colocado anteriormente, una representación de lo que se captó de la realidad inicial es elaborada en lenguaje natural. A partir de esa representación de lo que se focó, una nueva representación será obtenida al ‘substituirse’ el lenguaje natural por un lenguaje matemático coherente. En esa etapa de transición de lenguajes las relaciones y reglas empleadas son también las de la matemática y no solamente las sugeridas por la realidad inicialmente considerada. Tenemos aquí el lenguaje natural enriquecido con el lenguaje matemático. La representación en lenguaje matemático constituirá un modelo matemático para la situación focalizada.

La atención entonces es desviada de aquella realidad inicial para una representación de la misma, más precisamente, para un modelo matemático elaborado a partir de ella y formulado en el lenguaje natural enriquecido. Esa representación constituye una nueva realidad sobre la cual diversas informaciones serán explicitadas, varios problemas serán elaborados y resueltos. La resolución de un problema en esa nueva realidad puede no implicar en la solución de un problema de la representación de la realidad inicial, pues “los problemas como son tratados normalmente, son proposiciones sobre representaciones y no sobre el hecho real.” (D’AMBRÓSIO,1999).

3. Manipulación de Modelos

Una vez elaborado un modelo matemático, en él son explotadas relaciones matemáticas conocidas de situaciones anteriormente vivenciadas, son desveladas relaciones aún encubiertas y otras, que se muestren pertinentes, pueden ser establecidas. Se obtienen así elementos de una teoría matemática que puede auxiliar en el estudio de la realidad inicial. Elementos de esa teoría pueden haber sido motivados por esa realidad. Otros, sin embargo, pueden tener su origen en conjeturas resultantes de la manipulación del lenguaje matemático utilizado, como es el caso de las hipótesis simplificadoras, por ejemplo. Esas conjeturas pueden ser válidas en el ámbito de la realidad matemática en la cual ellas fueron creadas, y no lo ser en la realidad en la cual ellas serán interpretadas.

Eso significa que la manipulación del modelo, que es una de las actividades que componen la modelación matemática, especialmente en la enseñanza, puede ser desvinculada, en parte, de la realidad modelada. Aunque sea enfatizado que la modelación es un proceso que “culmina con la solución efectiva del problema real y no con la simple resolución formal de un problema artificial” (D’AMBRÓSIO, 1986, p. 11), ella también precisa valorizar el tratamiento de problemas puramente matemáticos, que pueden no tener relación con la realidad inicial. Resolver un problema de esa realidad demanda una cierta comprensión de su funcionamiento y el conocimiento de sus componentes. Lo mismo ocurre con la manipulación de modelos matemáticos, con la resolución de problemas formulados a partir de esos modelos, lo que demanda un cierto conocimiento de cómo funciona la matemática. El acceso a ese conocimiento que incluye, por ejemplo, el conocimiento aproximado, es una de las funciones de la modelación matemática en la enseñanza, que no puede, por tanto, preocuparse en sólo ayudar a resolver problemas ‘reales’, como indicado anteriormente. Por medio de la modelación el alumno puede aprender matemática, aprender a pensar matemáticamente, además de conocer la fecundidad y las limitaciones de conceptos y métodos de esa ciencia. Puede aprender sobre su aplicabilidad no solamente a otras áreas del conocimiento sino también en la propia matemática, cuando, por ejemplo, el modelo elaborado a partir de una realidad matemática inicial puede ser utilizado para describir otras realidades matemáticas.

Retomando elementos del desarrollo histórico de la propia matemática podemos visualizar una fase de desvinculación entre una realidad tomada inicialmente y una realidad matemática, fase que juzgamos existir en el proceso de modelación matemática, en particular cuando es empleado en la enseñanza, conforme lo expuesto hasta aquí.

Si tomamos el concepto de modelo teniendo como base los trabajos de los matemáticos griegos, en especial los *Elementos* de Euclides, pero no excluyendo otras caracterizaciones de ese concepto hasta mediados del siglo XVIII, vemos que había una creencia en la isomorfía entre la realidad observable y la matemática que la describía. Fue con la creación de las geometrías no euclidianas que la matemática despegó “no como algo necesariamente dictado a nosotros por el mundo en que vivimos” (EVES, 2004, p.545), mas también como una creación del espíritu humano. Hoy lo que se cree tener son aproximaciones en vez de un isomorfismo entre la matemática y la realidad. Como bien resaltó BASSANEZI (2002), la actividad de modelación en la enseñanza será eficiente para el aprendizaje de la matemática “a partir del momento en que nos concientizamos que estamos siempre trabajando con aproximaciones de la realidad, o sea, que estamos elaborando sobre representaciones de un sistema o parte de él.” (p.31)

Con referencia a lo que se conoce de los trabajos de la época de los griegos, un modelo matemático puede ser visto como una representación de la realidad captable por los sentidos, hecha por medio de un lenguaje geométrico o hasta algébrico. Esa visión no se aparta mucho de las expuestas por los diversos autores citados en este texto sobre lo que es un modelo matemático. En ese sentido también son caracterizados los modelos utilizados y elaborados en situaciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Con el descubrimiento de las geometrías no euclidianas en el siglo XIX, muchos cuestionamientos surgieron acerca de la posibilidad de que las estructuras matemáticas que se conocían representen adecuadamente lo real, pues un hecho comunmente aceptado desde la época de los griegos antiguos era que la geometría de Euclides reflejaba, de cierto modo, el espacio real.

A partir de esos cuestionamientos los fundamentos de la matemática pasaron por un profundo análisis crítico que provocó la búsqueda de nuevas fundamentaciones para la matemática, para el modo como se construían o como surgían los entes matemáticos, como se estructuraban sus teorías y como se validaban sus proposiciones. Uno de los resultados de esos esfuerzos fue una especie de separación de los aspectos formales de la matemática de aquellos que podemos llamar intuitivos, porque están relacionados a nuestra capacidad de percibirlos en el mundo en que vivimos.

En su obra titulada *Fundamentos de la Geometría*, publicada en 1899, David Hilbert presenta la geometría euclidiana sin conexión con la realidad. Lo que se sabía es que las relaciones presentadas y demostradas eran coherentes. La noción de ‘verdadero’ o ‘falso’ solo tendría sentido cuando tales relaciones fuesen interpretadas en algún contexto. Para saber si una afirmación dada de una teoría es verdadera recurrimos a una interpretación de esa teoría. Esa interpretación puede ser realizada, por ejemplo, en nuestra realidad observable. Pero también puede ser realizada en otro campo de la misma matemática. La verdad es entonces relativizada de modo que algo que se presente como verdadero en un contexto puede no serlo en otro.

Esa separación de los aspectos formales e intuitivos de la matemática se mostró necesaria de cierta forma para que se pudiese justificar la validez de diferentes abordajes matemáticos de las diversas geometrías que fueron creadas, algunas adecuándose a la realidad observable y otras no, siendo justificables por ese medio. Éso nos lleva a una reflexión sobre la naturaleza de la relación entre lo real e lo posible de ser construido formalmente, considerando los límites y las posibilidades proporcionadas por el conocimiento que se tiene y por el lenguaje que se utiliza en esa construcción, es decir, el lenguaje matemático. En el caso de la modelación matemática en la enseñanza, esa relación es discutida en la siguiente citación:

“En verdad, el lenguaje convencionado permite una simulación de la realidad, contenido implícitamente una simplificación de la realidad. Es esencial que el alumno sienta lo que se gana y lo que se pierde en la adopción del lenguaje convencionado, y que mantenga siempre en foco la realidad delante de la cual adoptamos una actitud simplificadora al formular la situación en el nuevo lenguaje. Por otro lado, la formulación simplificada del contexto real global permite formular detalles que serían difíciles, casi imposibles de ser destacados en un lenguaje natural. El juego de dos aspectos aparentemente contradictorios en la reformulación del problema (...) está en la esencia del método científico y (...) debe ser uno de los principales componentes del proceso educativo.”(D’AMBRÓSIO, 1986, p.65)

4. Conclusión: la Realidad Matemática

Con lo expuesto en la sección anterior hemos resaltado que en la modelación matemática los conceptos y métodos estudiados pueden, en varios momentos, no estar relacionados con una realidad captable solamente por los sentidos, pero sí con una realidad matemática sobre la cual también es importante adquirir conocimientos y buscar la comprensión.

Es importante percibir que cuando se aprehende parte de la realidad en un modelo matemático lo que se pasa a tener es una nueva realidad (matemática), que posee alguna correspondencia con la realidad de la que se partió, pero que funciona según reglas que en ella pueden ser válidas o no. También en el inicio lo que se tiene es la realidad que se consiguió captar, y no la totalidad de la realidad existente. O sea, una realidad no dada, mas de alguna forma construida. Según D'AMBRÓSIO (1999) las representaciones ya son el resultado de una acción subjetiva de quien primero recibió/captó la información de la realidad. El alumno, por ejemplo, capta o concibe la realidad y la representa a partir de lo que él entiende y consigue expresar. En ese sentido la actividad de modelación no comenzaría en la realidad en sí, mas en el sujeto que la percibe. Esa percepción, conforme Bachelard, puede ser dada por las concepciones y teorías en las cuales el individuo se apoya. Para que exista una realidad a ser representada, modelada, sería preciso la acción racional en el individuo que la concibe. "La ciencia suscita un mundo, no más por un impulso mágico inmanente a la realidad, y sí por un impulso racional, inmanente al espíritu." (BACHELARD, 1988, p.8).

A partir de lo expuesto vemos que las concepciones de 'realidad' relacionadas a la modelación matemática demandan un estudio más profundo para lo que este texto contribuye con algunas provocaciones.

5. Referencias Bibliográficas

- Abbagnano, N. (1970). *Dicionário de filosofia*. São Paulo: Editora Mestre Jou.
- Bachelard, G. (1988). *O novo espírito científico*. São Paulo: Nova Cultural (Os pensadores).
- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.
- Biembengut, M. y Hein, N. (2003). *Modelagem matemática no ensino*. 3. ed. São Paulo: Contexto.
- Bunge, M. (1974). *Teoria e realidade*. Trad. Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva.
- Davis, P. y Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Trad. Fernando Miguel Louro e Ruy Miguel Ribeiro. Lisboa: Gradiva.
- D'Ambrósio, U. (1986). *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. 4. ed. São Paulo: Summus.
- _____. *Dos fatos reais à modelagem: uma proposta de conhecimento matemático*. Disponível em: <http://vello.sites.uol.com.br/modelos.htm>. Acesso em 07/2004.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP.

Japiassu, H. (1981). *Questões Epistemológicas*. Rio de Janeiro: Imago.

Machado, N. (2001). *Matemática e realidade*. 5. ed. São Paulo: Cortes.

Negrelli, L. (2000). *A consideração de procedimentos dedutivos e indutivos na formação de professores de matemática*. (Dissertação) Mestrado em Educação. UFPR.

Nouvel, P. (2001). *A arte de amar a ciência: psicologia do espírito científico*. Trad. Fernando Jacques Althoff. São Leopoldo: Ed. UNISINOS.

Poincaré, J. (1946). *Ciência y Método*. 2. ed. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina, S. A.