

DISEÑO DE UNA ACTIVIDAD COOPERATIVA PARA EL TRATAMIENTO DEL CONCEPTO DE ASÍNTOTA

Cecilia Gaita Iparraguirre

Pontificia Universidad Católica del Perú- Perú

cgaita@pucp.edu.pe

Campo de investigación: Aprendizaje cooperativo – Gráfica y funciones

Resumen

El presente trabajo resulta de la experiencia realizada con un grupo de estudiantes universitarios de las especialidades de ingeniería en un primer curso de cálculo diferencial. Responde a una inquietud por garantizar un aprendizaje significativo del concepto de asíntota horizontal y vertical de una función real de variable real ya que en experiencias previas se observó que los estudiantes eran capaces de aplicar el algoritmo descrito en los libros de texto para hallarlas pero no mostraban una comprensión real de dicho concepto. Se optó por el diseño de una actividad cooperativa ya que ésta permitiría desarrollar en los alumnos la habilidad de argumentar ante sus compañeros sus respuestas a las preguntas que se formularan, antes de escribirlas en la hoja de trabajo.

I. Problemática

Pese a que la diferencia fundamental entre la Matemática Elemental, llámense cursos de precálculo, y el curso de Cálculo Diferencial radica en que mientras en la primera se tratan procesos finitos, en los otros se tratan procesos infinitos, no es esta idea la que trasciende para los estudiantes luego de llevar estos cursos de Matemática Superior. Según reportes de varios investigadores, los resultados que se obtienen al evaluar a los alumnos al finalizar los cursos mencionados, muestran que en general existe un buen manejo de algoritmos para calcular límites y derivadas pero que existen dificultades significativas para entender los procesos de límite, derivada e incluso entender que estos conceptos se relacionan con la cuantificación de la variación de una variable cuando otra varía.

En particular, en el tratamiento que se da al concepto de asíntota en los textos de cálculo no se propicia que los estudiantes puedan comprender lo esencial de este concepto. Y si además se considera que en la enseñanza de la matemática existen tres metas centrales: la retención, la comprensión y el uso o la aplicación de los conceptos en la resolución de problemas, entonces los procesos que se llevan a cabo en el aula resultan insuficientes para conseguir estos objetivos.

II. Características de la propuesta

- a) Se consideraron actividades que ponían énfasis en clarificar el concepto de asíntota mediante la exploración con distintas funciones, la construcción de ejemplos y contraejemplos, y sobre todo con la interpretación gráfica.
- b) Se plantearon preguntas que correspondían a distintos niveles de aprendizaje. Así, el alumno debía conocer el concepto de asíntota, comprenderlo, aplicarlo, analizar situaciones en las que éste estaba presente y finalmente sintetizar lo aprendido en la creación de funciones no triviales

que cumplieran determinadas condiciones referidas a asíntotas verticales y horizontales.

- c) Las actividades propuestas requerían un trabajo cooperativo. Se consideraron tres etapas:
- en la primera, el trabajo era individual con la finalidad de explorar sobre los conocimientos previos de los estudiantes.
 - en la segunda, el trabajo se realizó en parejas en donde cada par se concentraría en el estudio de un tipo de asíntota, y
 - en la tercera etapa, el trabajo fue en grupos de 4 alumnos en donde debían resolver un problema complejo que requería del aporte de las dos parejas.

III. Presentación de la propuesta trabajada

Parte I: Trabajo individual

- a) Graficar una función que tenga simultáneamente asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.
- b) Expresar empleando límites lo graficado en a).

Parte II: Trabajo de la pareja 1

Tiempo: 30 minutos

Graficar una función definida por tramos, cuyo dominio sea todos los reales y que verifique las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$$

Luego dar su regla de correspondencia.

Parte II: Trabajo de la pareja 2

Tiempo: 30 minutos

Analizar si la siguiente función posee asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. Si la respuesta es afirmativa, encontrarlas.

$$g(x) = \frac{x^3(x+1)}{x(x-2)^2}$$

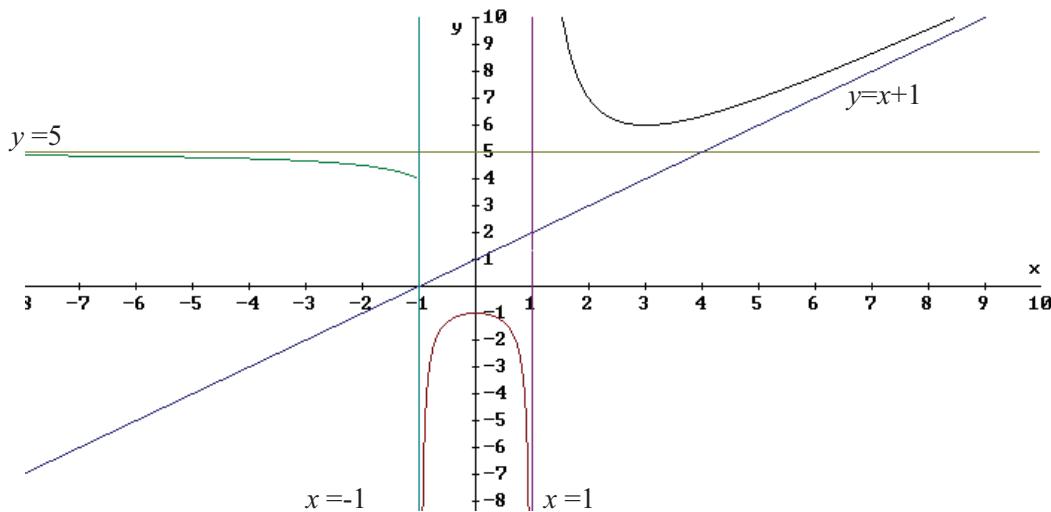
Luego, hacer un esbozo de su gráfica teniendo en cuenta el resultado anterior.

Parte III: Grupo de 4 estudiantes

Tiempo: 50 minutos

La siguiente es la gráfica de la función f y las rectas mostradas son las asíntotas de dicha función. Encontrar una posible regla de correspondencia para f .

Nota: f se puede definir a través de una función definida por tramos.



Evaluación individual final

Dar la regla de correspondencia de una función racional f (cociente de dos polinomios) que cumpla las siguientes condiciones:

- i) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3; -2; 2; 3\}$
- ii) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{9}{2}$.
- iii) El $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ es un número real.
- iv) Las rectas $x = -3$ y $x = 2$ son asíntotas verticales de su gráfico.

Respuestas de los alumnos:

(alumno 1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{-90(x^2 - x - 6)}{(x^2 - 9)(x^2 - 4)} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{9}{x - 2} = +\infty$

(alumno 2) $y = \frac{9x + 9}{(x + 3)(x - 2)}$

(alumno 3) $f(x) = \frac{-90(x^2 - x - 6)}{(x^2 - 9)(x^2 - 4)}$ Pero no cumple que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{9}{2}$

(alumno 4) Antes que nada f debe tener $x+2$ en el numerador para que se elimine con el denominador ya que -2 no pertenece al dominio.

Numerador de $f(x) = (x-3)(x+2)(x^3+4x-2)$

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)(x^3+4x-2)}{(x+3)(x-2)(x-3)(x+2)}$$

- i) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3; -2; 3; 2\}$ cumple
- ii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-3)(x+2)(x^3+4x-2)}{(x+3)(x-2)(x-3)(x+2)} = \frac{(-5)(-18)}{(-5)(-4)} = \frac{9}{2}$ cumple
- iii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)(x^3+4x-2)}{(x+3)(x-2)(x-3)(x+2)} = \frac{(27+12-2)}{(6)(5)} = \frac{37}{30}$ cumple
- iv) y las asíntotas también son $x = -3, x = 2, x = -2$ y $x = 3$.

IV. Resultados obtenidos

Durante el trabajo en aula los resultados obtenidos fueron satisfactorios; se observó un gran nivel de interactividad por parte de todos los estudiantes, se notaba un alto grado de motivación al resolver los problemas planteados.

En la evaluación individual posterior, el 70% de los alumnos resolvió exitosamente la situación problemática presentada pese a que ella realmente era nueva para los estudiantes pero aplicaron adecuadamente los conceptos trabajados en la actividad en grupo nueva que involucraba el concepto de asíntota horizontal y vertical.

V. Bibliografía

Almeida, et al. (1994). *Metodología de la enseñanza de la matemática* (Tomo I). México: Universidad Autónoma de Sinaloa. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, Ciudad de la Habana, Cuba.

Artigue, M. (2000). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? En R. Cantoral, *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 93-116). Sevilla, España. Grupo Editorial Iberoamérica.

Perkins, D. (1992). *Smart schools*. Nueva York: Basic Books.

Stewart, J. (1999). *Cálculo: Conceptos y contextos*. México: International Thomson Editores.