

# DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES EN LOS MODOS GEOMÉTRICO Y ANALÍTICO DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES <sup>1</sup>

Ma. Carina Ramírez Palacios,\* Asuman Oktaç,\* Carlos García\* \*

\*Cinvestav-IPN, México, \*\*Universidad Autónoma de Guerrero, México

[mramirez@cinvestav.mx](mailto:mramirez@cinvestav.mx), [oktac@cinvestav.mx](mailto:oktac@cinvestav.mx), [carlos\\_agp@hotmail.com](mailto:carlos_agp@hotmail.com)

Campo de investigación: Pensamiento algebraico; Nivel educativo: Superior

## Resumen

En este trabajo presentamos algunas dificultades que tienen los estudiantes en la representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Para ello se diseñó una entrevista basándonos en el acercamiento teórico de los modos de pensamiento geométrico y analítico en álgebra lineal. Reportamos acerca del desempeño de los estudiantes ante situaciones presentadas en un modo geométrico.

## 1. Introducción

Como parte de un proyecto de investigación que tiene como propósito identificar y analizar las dificultades que tienen los estudiantes en los conceptos de álgebra lineal, en este trabajo nos enfocamos en los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. En particular elegimos dos preguntas que fueron aplicadas, como parte de una entrevista, a 5 estudiantes de nivel superior, como representativas para mostrar los tipos de pensamiento que se manifiestan, reportando los resultados obtenidos.

## 2. Los sistemas de ecuaciones lineales en la investigación

Este tema ha sido investigado recientemente en sus diversos aspectos por nuestro grupo de trabajo, así como por otros investigadores. En esta sección reportamos los trabajos que se relacionan con los sistemas lineales con dos variables, centrando nuestra atención en los resultados sobre las concepciones detectadas en los estudiantes entorno a este tópico.

Eslava y Villegas (1998) observan las relaciones entre pensamiento sintético y analítico, así como las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de uno a otro, al tratar de interpretar la posición que guardan entre sí tres rectas en el plano. A través de una entrevista a cuatro estudiantes del nivel medio superior, reportan sobre ciertas dificultades que presentan los estudiantes para imaginarse las siete diferentes categorías que se presentan con tres rectas en el plano. Asimismo reportan sobre la dificultad que tienen los estudiantes acerca del concepto ‘solución’ en su interpretación geométrica. En particular, llama la atención que los estudiantes tienden a relacionar la solución con los puntos de intersección de las rectas, tomándolas por pares.

Panizza et al. (1999) pretenden identificar las condiciones de apropiación del álgebra elemental en alumnos de la escuela media. Usando como instrumento de análisis una entrevista que llevaron a cabo con 6 alumnos, observaron que algunos estudiantes, al llegar a expresiones como  $0 = 0$  o  $y = y$ , declaran que la ecuación no tiene solución. También identifican que los alumnos no reconocen la ecuación lineal con dos variables como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números. Asimismo, en la

---

<sup>1</sup> Este trabajo forma parte del proyecto CONACYT 2002-C01-41726.

ecuación de una recta, los alumnos no pueden establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

En Mora (2001), se pretende observar la conexión en los estudiantes en los modos de pensamiento analítico y sintético-geométrico a través de una secuencia de problemas, reportando los resultados de una entrevista que fue aplicado a siete estudiantes de nivel licenciatura. El investigador observó que un sistema de ecuaciones que da lugar a una igualdad de tipo  $0 = 0$  causa dificultad para los estudiantes. También reporta que para los estudiantes, la representación geométrica de tres rectas donde cada par de rectas se intersecan en un punto formando un triángulo, significa que el sistema tiene “tres soluciones”. El investigador concluye que en general, los estudiantes no logran asociar los diferentes modos de pensamiento.

Segura (2004) realiza una investigación sobre la influencia de una secuencia didáctica en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. La secuencia se diseñó tomando en cuenta dificultades anteriormente observadas en los estudiantes; en particular se incluyeron situaciones donde el estudiante tendría que proporcionar sistemas de ecuaciones lineales a partir de sus soluciones. Fue presentada a 29 alumnas de 15 años (tercer año de enseñanza media en el sistema escolar argentino). La investigadora afirma que las alumnas pudieron realizar un pasaje del registro gráfico al algebraico y mostraron un aprendizaje satisfactorio.

### **3. Modos de pensamiento en álgebra lineal**

Para abordar nuestra problemática nos basamos en el acercamiento teórico de los modos de pensamiento en álgebra lineal, desarrollado por Sierpiska (2000): sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, los cuáles son tres modos de razonar en el álgebra lineal que pueden verse como el resultado de una superación de dos obstáculos o dos posiciones dogmáticas opuestas: una que rechaza los números dentro de la geometría y la otra que rechaza que la “intuición geométrica” pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético.

La diferencia principal entre los modos sintético y analítico es que en el modo sintético los objetos son dados directamente para ser descritos por la mente, donde únicamente son construidos por definición de las propiedades de sus elementos, mientras que en el modo analítico ellos se dan indirectamente. En el pensamiento analítico-aritmético un objeto es definido por una fórmula que permite calcularlo; en el pensamiento analítico-estructural un objeto es definido por un grupo de determinadas propiedades (Sierpiska, 2000).

Citamos el siguiente ejemplo como ilustrativo de las diferencias entre los distintos modos de pensamiento:

Si uno está pensando en las posibles soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables por visualización de las posibles posiciones de tres planos en el espacio, uno está en el modo sintético-geométrico. Si uno piensa en el mismo problema en términos de los posibles resultados de una reducción por filas de una matriz de  $3 \times 4$ , uno está en el modo analítico-aritmético. Pensar en términos de matrices singulares y no singulares, podría ser un síntoma del modo analítico-estructural. (Sierpiska 2000).

Los objetos matemáticos adquieren diferentes características según el modo de pensamiento que se emplea. El modo sintético-geométrico se relaciona más con la intuición por su inmediatez. El uso de los símbolos en el modo analítico implica una interpretación de significados de manera indirecta.

#### **4. Aspectos metodológicos**

Considerando el marco teórico mencionado en la sección anterior, aplicamos un cuestionario diagnóstico a un grupo de nuevos ingresados de una universidad, en el área de ingeniería. El análisis del cuestionario nos permitió observar las dificultades que tienen los estudiantes con el concepto de solución y el vínculo entre los distintos modos.

Basándonos en estos resultados seleccionamos a cinco estudiantes y les aplicamos una entrevista para conocer con mayor profundidad las causas de sus dificultades.

En el momento de ser entrevistados, los estudiantes habían terminado un curso de matemáticas una parte del cual fue dedicado al Álgebra Lineal (aproximadamente 6 semanas), en donde les impartieron los temas de números complejos, vectores, sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes.

La entrevista se aplicó en forma individual. Cada una de las preguntas de la entrevista se planteó una a una a los estudiantes, conforme las iban contestando. Los estudiantes disponían de hojas y plumones, para el caso de que los necesitaran. Se contó con una cámara de video fija con la que se grabaron todas las entrevistas así como con una grabadora de audio. Cuando los estudiantes tenían dificultades para expresar sus ideas, el entrevistador iniciaba una interacción verbal con ellos mediante preguntas, teniendo cuidado de no sugerirles la respuesta.

#### **5. Las preguntas**

Las dos preguntas que a continuación presentamos y analizamos forman parte de la entrevista que se aplicó al grupo de estudiantes antes mencionado. Consideramos que estas preguntas son ilustrativas para mostrar la naturaleza del pensamiento sintético-geométrico tal como se emplea por los estudiantes.

##### Pregunta 1.

Grafica las posibles posiciones que tienen dos rectas en el plano.

##### Pregunta 2.

- a) Representa dos rectas que tengan un solo punto en común en el plano.
- b) Representa un par de rectas que no tengan puntos en común.
- c) Representa un par de rectas que tengan más de un punto en común.

Para la segunda pregunta, se les proporcionó a los estudiantes, ejes cartesianos para cada inciso.

Las dos preguntas están hechas en un modo geométrico, refiriéndonos a las rectas como objetos geométricos sin hacer mención de sus propiedades analíticas. Asimismo en la segunda pregunta no se hace referencia a ecuaciones o sistemas de ecuaciones, sino que se mencionan rectas y puntos.

La primera pregunta pide al estudiante imaginar las tres diferentes posiciones de dos rectas en el plano (rectas que se cortan en un punto, rectas paralelas y rectas encimadas). Parte de nuestro propósito fue identificar si hay algún caso que se omita regularmente por los estudiantes. Nosotros consideramos antes de la entrevista que el caso de dos rectas que coinciden, probablemente se omitiría con más frecuencia. También nos interesaba ver cómo los estudiantes interpretarían “las posibles posiciones”. Consideramos que las categorías que nosotros teníamos en mente pueden ser diferentes a las que manejan los estudiantes y moviendo en el plano dos rectas que corresponden una categoría particular, ellos pueden crear otras posiciones que visualmente se ven diferentes. Es decir, ellos pueden no dar importancia al criterio de conjunto solución, sino concentrar su atención en la percepción visual de los objetos geométricos.

Los tres incisos de la segunda pregunta corresponden a las tres posibles posiciones de dos rectas en el plano. En este caso nosotros verbalmente describimos la posición y pedimos al estudiante graficarla. De esta manera queremos observar en caso de haber omitido algún caso en la primera pregunta, si el estudiante lo recordará, o de plano lo rechaza como una posibilidad factible. Para el inciso (c) elegimos usar la expresión “más de un punto” en lugar de “infinitud de puntos”, para ver cómo se interpreta esta expresión.

## **6. Análisis de la entrevista**

En la primera pregunta, todos los estudiantes identificaron el caso de rectas paralelas, mientras que solo uno de los 5 estudiantes identificó el caso de dos rectas equivalentes. En la representación gráfica de dos rectas intersecadas en un punto, 4 estudiantes muestran que para ellos cuando las rectas son perpendiculares, esto se considera como una posición diferente a los demás casos donde el ángulo de intersección puede ser cualquier valor distinto de  $90^\circ$ . Esto puede deberse a la importancia que se le acuerda al caso perpendicular en cualquier representación visual en la enseñanza. También muestra que las decisiones de los estudiantes se basan en la percepción visual (una característica del pensamiento geométrico) y no 100% en las propiedades de los objetos matemáticos.

En el caso de la segunda pregunta, ningún estudiante tuvo dificultad con los primeros dos incisos. Cuatro estudiantes no lograron representar las rectas que tengan más de un punto en común. En el siguiente extracto, el estudiante cuyo sobrenombre es Hugo (representado por su inicial) explica la razón por la cual él piensa que dos rectas no pueden tener más de un punto en común:

*H: Porque como son líneas, como son rectas, solamente coinciden en un solo punto, en dado que sí, sería una línea curva, ya coincidirían en varios puntos, pero yo pienso que no coinciden en ningún punto, solamente en un solo punto...*

*H: Porque, este, [...] pues, porque son dos líneas, sin son rectas, vaya, al momento de intersectarse, no, solamente en un punto coinciden, porque no hay, en dado caso de que fueran líneas curvas vaya, no sé, una parábola por ejemplo y una recta en dado caso si podría coincidir en dos puntos, como cada recta se va al infinito.*

*[...]*

*Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas...*

*H: Este, y no tiene ninguna curvatura, pues yo pienso que si juntamos dos de esas, solamente en un punto coinciden, no creo que coincidan en más, de hecho no coinciden.*

Hugo piensa que dos rectas a lo más pueden tener un punto en común. Piensa que solo en el caso de las curvas puede haber más de un punto en común:

*H: No, las líneas rectas son las que tiene solamente un punto y las curvas son las que pueden coincidir en más de un punto.*

Lizbeth razona de manera similar:

*L: (Escribe: No hay rectas que tengan más de un punto en común).*

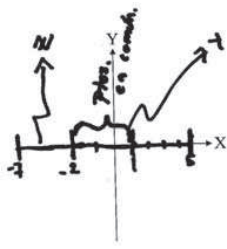
Cuando le preguntamos, “¿por qué?”, dice:

*L: Porque no se pueden cortar dos veces, porque no tienen, no se pueden regresar, no pueden hacer curvas.*

Estos dos estudiantes interpretan la expresión “más de uno” como “un número finito mayor que 1” y excluyen la posibilidad de “infinito”. Esto puede deberse al hecho que geoméricamente se ve solo una recta y el caso de dos rectas equivalentes puede verse como redundancia, aunque analíticamente la misma recta puede tener dos representaciones distintas (ecuaciones equivalentes). Más adelante durante la entrevista, cuando se les da una gráfica explicándoles que se trata de la gráfica de dos rectas, y se les pide proporcionar un sistema de ecuaciones lineales correspondiente a esa gráfica, estos dos estudiantes afirman que no sería posible asociarle un sistema y consideran que sólo pueden dar una ecuación. Hugo se justifica diciendo que “aquí hay solo un elemento”, y Lizbeth afirma que “no habría intersección”.

Otra estudiante, Martha, tratando de encontrar una respuesta a la pregunta, dibuja segmentos colineales, pero con diferentes intervalos, para que coincidan en una región en común:

*M: Pues tienen más puntos en común que sería, éste viene de acá (se refiere al segmento que va de menos dos a cinco) sería una, no sé, acá tendría otra, que vendría de acá de menos siete a uno, entonces sus puntos en común serían estos que están aquí, (marca en la gráfica anterior el segmento de menos dos a uno):*



*Esos serían sus puntos en común, que lo van a compartir.*

Martha considera las rectas como segmentos, lo que coincide con cualquier representación finita (y las representaciones geométricas necesariamente son finitas). Sin hacer un vínculo con el modo analítico, los objetos geométricos para ella son lo que exactamente se ve en la figura, sin más interpretaciones.

El cuarto estudiante insiste en que dos rectas “sólo pueden tener un punto en común”, pero no puede explicar su razonamiento.

## **7. Comentarios finales**

En esta investigación observamos que la mayoría de los estudiantes presentan dificultad en el modo de pensamiento sintético-geométrico y además no muestran un vínculo adecuado entre los modos sintético y analítico.

Nosotros creemos que en la enseñanza se debe de tomar en cuenta las características de los objetos matemáticos en cada modo de pensamiento para ayudar a los estudiantes hacer las interpretaciones necesarias y poder transitar entre los distintos modos. Asimismo consideramos que valdría la pena discutir con los estudiantes el caso de los sistemas de ecuaciones lineales que representan infinitas soluciones poniendo énfasis en ambos modos de pensamiento.

## **Bibliografía**

Eslava, M. y Villegas, M. (1998) Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano. Tesina de diplomado, Universidad Autónoma de Estado de Hidalgo.

Mora, B. (2001) Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de Maestría, Cinvestav, México.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999) La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*. **17**(3), 453-461.

Segura, S. (2004) Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. **7**(1), 49-78.

Sierpinska, A. (2000) On some aspects of students thinking in linear algebra. In J-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, pp. 209-246. Kluwer Academic Publishers.