LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN LA EDUCACIÓN POLIMODAL Y EN LA UNIVERSIDAD. DIAGNÓSTICO SOBRE NÚMEROS REALES.

E. GüichaL; G. Guala; A. Malet; V. Oscherov
Universidad Nacional del Sur. Argentina
eguichal@uns.edu.ar

Campo de investigación: Didáctica de la Matemática; Nivel Educativo: Medio y Superior

RESUMEN

Los alumnos ingresantes a nuestra universidad muestran déficit en lo referido a competencias y a contenidos disciplinares básicos de Matemática. Considerando esta realidad y la importancia que tiene el Cálculo como materia básica, nos propusimos llevar a cabo el Proyecto: *La Enseñanza del Cálculo. Articulación entre el Nivel Polimodal y el Nivel Universitario*,[1] con el fin de identificar obstáculos, que dificultan la comprensión de los conceptos fundamentales de este campo conceptual, para generar estrategias que contribuyan al mejoramiento de su enseñanza y de su aprendizaje. Como metodología de investigación y para guiar tanto las experiencias en clase como para estudiar los resultados de enseñanza, utilizaremos una ingeniería didáctica. En el marco de la etapa de análisis preliminar que estamos transitando, nos referiremos al análisis e interpretación de los datos obtenidos en una de las instancias de diagnóstico en la que abordamos el contenido: Números Reales.

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN LA EDUCACIÓN POLIMODAL Y EN LA UNIVERSIDAD.
DIAGNÓSTICO SOBRE NÚMEROS REALES.

INTRODUCCIÓN

El desempeño de los alumnos que ingresan a la Universidad Nacional del Sur (UNS), específicamente en el transcurso de los últimos períodos lectivos, ha mostrado déficit en lo referido a las competencias y en contenidos disciplinares básicos de Matemática. Este déficit se observó en cuestiones tales como representaciones parciales y fragmentadas del significado de un concepto, dificultades para relacionar diferentes registros de representación, dificultades para sobrepasar los modos de pensamiento numérico y algebraico. Esta situación sería una de las causas que provoca abandono y deserción en el primer año de las carreras universitarias que incluyen estudios matemáticos en la UNS. Considerando esta realidad y la importancia que tiene el Cálculo[2] como materia básica, nos hemos propuesto identificar obstáculos que dificultan la comprensión de sus conceptos fundamentales a fin de generar estrategias para un mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje.

---

[1] Proyecto de Grupo de Investigación (PGI) subsidiado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UNS.
[2] En todo este trabajo, al referirnos al Cálculo, entendemos "Cálculo Diferencial e Integral", con funciones de una variable real.

Entendemos que la situación a la que hacemos referencia es un problema tanto para las previsiones de desarrollo universitario como para las autoridades del nivel educativo previo al universitario (Educación Polimodal) que determinan la necesidad de un trabajo conjunto de articulación entre ambos niveles que faciliten la generación de instancias superadoras de la situación presente.

REFERENTES TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En nuestro proyecto de investigación enfocamos un problema complejo, multidimensional, como es el enseñar, el aprender y sus resultados. Trabajamos sobre los problemas de articulación entre la escuela media y la universidad en el área de matemática dentro de una aproximación didáctica. Centramos la investigación sobre un dominio que desempeña un importante papel en esta articulación y que es el Cálculo, en particular sobre las nociones básicas alrededor de las que este campo se estructura: Números reales; Funciones; Límites de sucesiones numéricas y funciones; Continuidad; Derivada e Integral. (Artigue, M. 1991)
Esta particularidad nos remite a la formulación de referentes epistemológicos con respecto a una de las dimensiones de nuestro objeto de estudio. En este sentido consideramos para este trabajo la siguiente hipótesis: *Las nociones de número real y las funciones son conceptos en construcción al momento de cursar el primer año universitario, entonces el aprendizaje del Cálculo es un motor para su conceptualización.* (Artigue, M. 1995 a)
Como metodología de investigación y para guiar tanto las experiencias en clase como para estudiar los resultados de enseñanza utilizamos una ingeniería didáctica (Artigue, M. 1995 b). En el marco de esta propuesta la etapa del Análisis Preliminar abarcó:

- Diagnóstico sobre el estado actual de la enseñanza del tema.
- Análisis de documentación referida al tema en ambos niveles.
- Análisis de programas de Educación Polimodal y del de las asignaturas del primer año universitario.
- Análisis de textos de Matemática de Educación Polimodal y de Cálculo para alumnos de primer año universitario.
- Diagnóstico sobre los conocimientos de que disponen los alumnos ingresantes en la Universidad para abordar los contenidos del Cálculo.
- Indagación acerca de las dificultades con el aprendizaje de alumnos recursantes y de las hipótesis que los mismos tienen con respecto a sus dificultades.
- Estudio de las concepciones de los docentes y de las concepciones de los alumnos de ambos niveles, antes de participar en experiencias y después de estas.

El avance referido al Análisis Preliminar que presentamos en este caso se centra en el *Diagnóstico sobre los conocimientos que disponen los alumnos ingresantes en la Universidad para abordar los contenidos del Cálculo* y en ese contexto, el caso particular del *Diagnóstico sobre Números Reales.* A partir del mismo esperamos disponer de hipótesis sobre las dificultades de los alumnos y de un conjunto de datos para el diseño de la ingeniería a utilizar en el aula.

CON QUÉ ALUMNOS TRABAJAMOS

Si bien aquí nos ocuparemos del Diagnóstico sobre números reales cabe aclarar que tanto éste como el referido a funciones fueron realizados por 75 alumnos ingresantes a la carrera de Ingeniería Civil. Así mismo debemos mencionar que la institución dicta un Curso de Nivelación durante el mes previo a la iniciación de las clases, optativo, con un examen obligatorio al concluir el mismo, que nuestros alumnos habían cumplimentado.

EL DIAGNÓSTICO Y SUS RESULTADOS

En principio mencionaremos que las actividades propuestas en el diagnóstico se relacionan con aspectos que tienen que ver con lo que entendemos por *sentido del número*, con el cual es necesario contar para iniciarse en el estudio de Cálculo.

Entendemos que se tiene *sentido del número* cuando se puede comprender el significado del uso de distintos tipos de números, compararlos, relacionarlos, reconocer sus magnitudes relativas, distinguir en qué situaciones es pertinente utilizarlos, operar con ellos, juzgar si un resultado numérico es razonable y expresarlo de manera conveniente. Así mismo, cuando se puede interpretar críticamente la información que se presenta en términos numéricos; por ejemplo, mediante gráficas, tablas, porcentajes, datos estadísticos; y se es capaz de percibir regularidades, extraer pautas, investigar y conocer relaciones y propiedades numéricas.

Teniendo en cuenta lo antedicho y a partir de los datos obtenidos en las entrevistas realizadas a docentes de Educación Polimodal (G. Guala et al; 2005) así como del análisis de textos de Matemática destinados a ese nivel, en el Diagnóstico se plantearon actividades relacionadas con:

- Distintas notaciones para los números reales. Notación decimal. Significado de la notación posicional. Aproximaciones.
- Notación particular para los racionales, como cocientes de enteros. Casos que llevan a expresiones decimales periódicas.
- Operaciones algebraicas. Propiedades. Porcentajes. Resolución de ecuaciones lineales.
- Orden. Representación en la recta. Densidad de los números racionales. Compatibilidad con las operaciones algebraicas.
- Completitud.

Con respecto a las habilidades cognitivas, las actividades abarcaron requerimientos acerca de: operar con distintos registros; coloquial, algebraico, gráfico, simbólico; análisis y aplicación de información y resolución de problemas.

El diagnóstico contiene nueve actividades con distintos grados de dificultad. Queremos comentar aquellos casos que consideramos más significativos.

Actividad: La afirmación: "*El resultado de dividir dos números reales en algunos casos puede ser mayor que el dividendo"* ¿Es verdadera o falsa? Explica.

El 50 % responde correctamente aportando ejemplos donde la afirmación se verifica.

De las respuestas incorrectas, 39 %, seleccionamos explicaciones que nos parecen interesantes al momento de explicar concepciones erróneas, que actúan como obstáculos cuando los alumnos operan matemáticamente.

- "Falso, porque al dividendo se lo divide por lo tanto va a ser siempre menor"
- "Falso, porque el dividendo es el número que estamos fraccionando"
- "Falso, el dividendo es el número que se "divide en partes" tantas veces como lo indica el divisor"
- "Falso, porque en una división el cociente es menor que el dividendo ya que a este se le está buscando reducirlo al dividirlo por x unidades"

La investigación nos permite reconocer que los obstáculos, en algunos casos, guardan relación con el sistema de enseñanza, al trasladar el algoritmo de la división entera al conjunto de los números reales.

Actividad: *Escribe, usando lenguaje algebraico, expresiones que describan las siguientes informaciones relativas a la base y a la altura de un rectángulo cuyas medidas expresadas en centímetros se representan como* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *respectivamente*

a) La base excede en 5 unidades a la altura
b) La altura es $\frac{2}{5}$ de la base
c) La base es a la altura como 7 es a 3
d) El área del rectángulo es 50 cm^2
e) La base y la altura difieren en 10 unidades

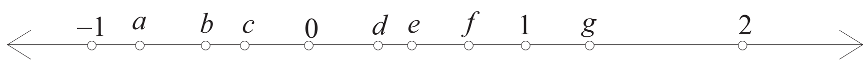
Esta actividad, en general, fue resuelta correctamente. Pero, nos parece interesante señalar el proceder de un grupo, el 24 %, que para poder pensar la solución al problema planteado necesitaron traducir el nombre de las variables, que en el enunciado son x e y, a las conocidas b y h. Esta dificultad nos permite inferir que dado que desde los primeros niveles de escolarización los elementos de un rectángulo se designan por b y h, cuando el alumno resuelve la situación problemática, aparece como dificultad la comprensión del sentido de la base y la altura del rectángulo al ser nombrados con x e y.

Actividad: Une por medio de una flecha cada enunciado con la expresión simbólica que le corresponde

a) El doble de la suma de tres números.	1) $\frac{a}{3} - b$
b) El doble de un número menos 7.	2) $d = 3x$
c) La distancia (*d*) recorrida en tres horas a	3) $x = 2x + 15$
una velocidad de *x* kilómetros por hora.	4) $2a - 7$
d) La tercera parte de un número menos otro	5) $d = \frac{x}{3}$
e) La edad actual de una persona si dentro	6) $(a+b)^2$
de 15 años se habrá duplicado	7) $2(a+b+c)$
f) El cuadrado de una suma	8) $x = 2x - 15$

Todos los items son expresiones coloquiales que suponen una traducción inmediata al registro algebraico (las respuestas correctas superan en todos los casos el 85 %) salvo el inciso e) (el 48 % responde incorrectamente) donde es necesario construir un modelo que responda a la situación problemática planteada. Es significativo que señalen como correcta la número 3 y que tampoco recurran a la realización de una sencilla verificación con la que podrían comprobar lo erróneo del modelo elegido.

Actividad: En el siguiente gráfico se han representado los números reales: -1, *a*, *b*, *c*, 0, *d*, *e*, *f*, 1, *g* y 2.



a) ¿Cuál de ellos es el número más próximo a $e \cdot f$? Explica por qué.

b) ¿Cuál de ellos es el número más próximo a $\frac{1}{f}$? Explica por qué.

c) Decide si las siguientes afirmaciones son Verdaderas (V), Falsas (F) o si es imposible determinar su validez (ND).

c_1) $a > b$ c_2) $a \cdot b > d \cdot e$ c_3) $\sqrt{b \cdot c}$ no es un número real.

Esta es una actividad que requiere del alumno mayor nivel de abstracción ya que supone una lectura e interpretación del gráfico. En la misma se consideran números que son datos y otros representados por puntos en el eje real designados con letras con los que se debe operar. Es así que, esto representa una de las mayores dificultades detectadas en las respuestas de los alumnos. En muchos casos colocan por encima de algunas letras un número que consideran aproximado por el lugar que ocupa la misma en la recta.

Así mismo, al no reconocer a f como un número entre 0 y 1 y por lo tanto su inverso como un número mayor que la unidad el 57 % de los alumnos responde erróneamente.

En general en esta actividad se observan dificultades en la comprensión de las propiedades de los números.

Actividad: En cada caso coloca el signo "=", ">" o "<", según corresponda.

a) $1 \ldots 0{,}9999\cdots\cdots$ b) $-8\sqrt{14}+32 \ldots 0$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \ldots \frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $0{,}454545\cdots\cdots \ldots \frac{45}{98}$

Entre el 92 % y el 97 % responden correctamente los incisos b), c) y d). Merece un párrafo aparte el inciso a) al que responden incorrectamente el 95 % de los alumnos. Nuevamente, observamos que desde el sistema educativo y de los textos utilizados los alumnos adquieren el uso de reglas que les permiten convertir números periódicos en fracciones, y que sin embargo no son utilizadas aquí al plantear una situación fuera del contexto habitual

Actividad: Considera la secuencia de números: 3, 7, 11, 15, ... (los puntos suspensivos indican aquí que la secuencia continúa siguiendo el esquema sugerido por los números dados.

Llamamos "primer término" al número 3, "segundo término" al número 7 y así siguiendo.

a) Calcula el quinto término b) Calcula el octavo término

c) Indica una fórmula que te permita hallar cualquier término y utilízala para hallar el término que ocupa el lugar 400.

Más del 90 % contestó correctamente los dos primeros items pero un 63 % no logra escribir el modelo que representa la situación.

REFLEXIÓN FINAL

Los resultados del diagnóstico y los aportes de otras actividades que se fueron realizando en el marco del análisis preliminar nos permiten reflexionar en varios sentidos que orientarán las actividades futuras.

Esta reflexión está basada en los distintos planos planteados por Artigue (1995 a): epistemológico, cognitivo y didáctico, a partir del estudio de los obstáculos que hace Brousseau (1997).

Desde el plano epistemológico

En el conjunto de los Números Reales distinguimos una Estructura Algebraica, una Estructura de Orden y el Axioma de Completitud, a lo que agregamos la recta como "soporte natural" para representarlos. Como resultado del diagnóstico, las entrevistas con docentes del Nivel Polimodal y el análisis de bibliografía del nivel, hemos podido constatar que se prioriza el tratamiento algebraico, no se problematiza la noción de completitud sin la cual no se da la posibilidad de existencia de los irracionales ni tampoco la notación decimal. Cuando se escribe, por ejemplo, 0.999..., no se discute el significado de los puntos suspensivos; tampoco, desde lo geométrico, el hecho de dibujar la recta con un trazo continuo al momento de representar gráficamente los números reales, ni el significado geométrico de continuidad de la recta.

Desde el plano didáctico

Podemos observar que en los últimos años se ha trabajado en la contextualización de los conceptos matemáticos para otorgarles significado. Con el conjunto de los racionales, donde la contextualización puede darse a través de problemas de la realidad que se basan en mediciones, esto pareciera razonable. Pero para construir el conjunto de los números reales consideramos que el axioma de completitud es imprescindible ya que por ejemplo no podemos mostrar la irracionalidad de π o la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ a partir de algún instrumento de medición. Es cierto que se realizan construcciones geométricas para ubicar en la recta las raíces cuadradas de algunos números primos, pero no se plantea que no existen construcciones geométricas clásicas que permitan ubicar números como π o como e o cualquiera de los infinitos números trascendentes, así como tampoco se hace la distinción entre números algebraicos y números trascendentes.

Los alumnos se encontrarían en un nivel "nocional" de las propiedades de los números, generándose a partir de este diagnóstico y como desafío para la situación didáctica el planteamiento de propuestas que permitan movilizar este conocimiento en situaciones complejas y llegar a la construcción del concepto.

Desde el plano cognitivo

Los alumnos muestran la "aplicación" de habilidades cognitivas en contextos similares a los que fueron aprendidas. Ello genera la necesidad de plantear la recuperación y puesta en juego de lo aprendido con respecto a los números reales en la resolución de problemas o en situaciones simuladas o reales diferentes al contexto en que fueron aprendidas, si lo que se pretende es que las habilidades cognitivas se expliciten en saberes prácticos.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1991): Analysis. En Tall, D. (ed): *Advanced Mathematical Thinking.* The Netherlands. Kluwer Academic Publishers.

Artigue. M. (1995 a):*La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En: P. Gómez (Ed.): Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 97-140) ; México, Grupo Editorial Iberoamérica..

Artigue. M. (1995 b): *Ingeniería didáctica*. En P.Gómez (Ed.): Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-59); México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998): L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. Recherches. *Didactique des Mathématiques*, Vol 18.2. Grenoble: La Penseé Sauvage,

Azcárate, C.; Casadevall, M.; Casellas, E.; Bosch, D. (1996): *Cálculo Diferencial e Integral*. Colección: Educación Matemática en Secundaria. España: Editorial Síntesis.

Bergé, A.; Sessa, C. (2003): Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *RELIME*, vol. 6 Núm 3, Noviembre 2003, pp. 163-197.

Brousseau, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. The Netherlands. Kluwer Academic Publishers.

Farfán Márquez, R. M. (1996): Matemática Educativa e Ingeniería Didáctica. Documento de ICME 8. España.

Guala, G., Güichal, E., Malet, A., Oscherov, V. (2005): La enseñanza del Cálculo en la Educación Polimodal y en la Universidad. Continuidades, rupturas y obstáculos. Memorias del VII Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy. En internet: www.edumat.com.ar