

LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA

María del Rosario Hernández Apolonio, Marco Antonio Morales Salmerón, Santiago
Ramiro Velásquez Bustamante
Universidad Autónoma de Guerrero, México.
myr_1812@yahoo.com.mx
Campo de Investigación: Método de demostración y pensamiento geométrico, Nivel
educativo: Medio Superior.

Resumen

En este trabajo se dan a conocer los resultados de una investigación relacionada con la Demostración en Geometría. Como la demostración ocupa en matemáticas un lugar central, pues es el método de prueba cuyo empleo sistemático caracteriza esta disciplina entre otras ciencias. Se comprende entonces que tiene un papel importante en el currículo escolar, por lo tanto debería ser un componente clave en la educación matemática en todos los niveles, además es una herramienta importante para promover la comprensión matemática. El objetivo principal de esta investigación es explorar en los estudiantes las formas de demostrar, las herramientas o estrategias que utilizan al realizar una demostración en geometría y las dificultades que presentan en la misma.

Introducción

La demostración en la clase de matemática presenta una gran diversidad de formas, y aparece en los distintos niveles educativos a través de variados tipos de argumentaciones. El pensamiento deductivo se va construyendo lentamente a lo largo de las distintas etapas de la escuela. Esto no significa que se logre realmente su construcción de manera sólida. Es común encontrar alumnos universitarios que aún no han logrado dominar este contenido procedimental.

En el programa y plan de estudios de educación básica, uno de los objetivos es fomentar el desarrollo de la habilidad para deducir, que se refiere a establecer hipótesis y encadenar razonamientos para demostrar teoremas sencillos. Ya en el nivel medio superior, deben aparecer argumentaciones de carácter empírico-inductivo y demostraciones deductivas informales, aunque a veces elementales. A pesar de que muchos alumnos continúan teniendo un pensamiento concreto que depende del contexto físico o específico para poder percibir regularidades y relaciones y deben apoyar sus razonamientos en el uso de materiales concretos (calculadoras, regla, compás, etc.), otros ya son capaces de razonamientos más formales y de abstracción. Lo anterior es la formación que el alumno debe de tener en este nivel educativo, sin embargo las evidencias obtenidas después de haber realizado un estudio en donde se aplicó una prueba de diagnóstico a dos poblaciones del nivel medio superior, muestran una serie de dificultades por parte de los alumnos en la realización de una demostración en geometría. En cambio esta misma prueba fue aplicada a los alumnos de olimpiada de las matemáticas de nivel básico, mostrando menos dificultades y resolviendo la mayoría de los problemas propuestos. También fue aplicado a los alumnos del cuarto semestre de la licenciatura en matemáticas obteniendo resultados similares a los de olimpiada. Tomando en cuenta este diagnóstico nos damos cuenta que deben fomentarse actividades orientadas a la

formulación de hipótesis y al razonamiento inductivo, y poner gran énfasis en la importancia de la verificación deductiva.

Pero por otra parte la enseñanza de la Geometría que nos trae el docente al aula usualmente se circunscribe a un espacio en donde él es quién carga con la tarea de proponer los fenómenos geométricos a estudiar y las condiciones que deben cumplir las figuras. Es decir, sólo le dejamos ver a nuestros estudiantes, cómo actuamos ante este problema y cómo hacemos los pasos necesarios para llegar al resultado que nosotros deseamos, más esto es deseable si nuestros estudiantes fueran expertos y entendieran el por qué de ese actuar. Con este tipo de enseñanza el alumno no desarrolla la habilidad de demostrar, porque no representa, no realiza construcciones mentales, no comunica, no simboliza, no reflexiona el problema, no realiza inferencias y no discute, por lo tanto el alumno no aprende a realizar una demostración.

Por tal razón para muchos alumnos la demostración ha sido y sigue siendo una actividad que se realiza sin ningún significado, para ello desde los primeros niveles educativos se requiere una cultura de argumentación que perdure durante la escolarización y conocer más acerca de las dificultades que encuentran los estudiantes cuando se enfrentan a demostraciones, y problemas (didácticos, comprensión, etc.) y desafíos a los que se enfrentan los profesores.

Objeto de estudio

Después de analizar los programas de estudios de secundaria y preparatoria nos damos cuenta que existen objetivos en donde el alumno debe de desarrollar la habilidad de demostrar entonces surge la siguiente interrogante ¿Por qué los alumnos de nivel básico y medio superior no pueden realizar una demostración en geometría? Si se supone que a este nivel el alumno debería encadenar razonamientos para demostrar teoremas sencillos, realizar argumentaciones de carácter empírico-inductivo y demostraciones deductivas informales, aunque a veces elementales. Sin embargo observamos que alumnos tienen diversas dificultades para desarrollar una demostración en geometría y precisamente este es nuestro problema de investigación detectar cuales son esas dificultades. Para esto consideramos necesario “*explorar en los estudiantes cuáles son las formas de demostrar, qué herramientas utiliza para llevar a cabo este proceso y así saber ubicar las dificultades que presentan*”.

Metodología

Durante el desarrollo de la investigación se realizaron las siguientes actividades:

a) Revisión Bibliográfica

- La revisión bibliográfica relacionada con el tema para analizar diversas posiciones teóricas acerca de la demostración en geometría, así como su utilización en la enseñanza.
- La precisión del concepto demostración y el papel que juega en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- Revisión del programa de estudios de matemáticas del nivel básico y del nivel medio superior, para analizar los contenidos de la asignatura en ese nivel educativo.

b) Selección y Validación de problemas Geométricos

- Se hizo una extracción de 15 problemas geométricos de diferentes fuentes los cuales, fueron sometidos a un proceso de análisis de contenidos a pegados al plan de estudio de la UAG del tercer semestre (perímetros y áreas, teoremas sobre triángulos (demostración y aplicación), relaciones trigonométricas) y al del nivel básico. Para la selección de 10 problemas geométricos.
 - De los 10 problemas seleccionados se diseñaron tres pruebas diferentes tomando en cuenta el grado de dificultad dependiendo la población que sería aplicada cada una de ellas.
 - La primera y la segunda prueba fueron constituidas por seis problemas geométricos y la tercera prueba por cinco.
- c) *Solución de los problemas geométricos*
- La primera prueba fue aplicada a 27 alumnos de cuarto semestre, turno matutino de la preparatoria No.7.
 - La segunda prueba (la cual difiere en tres problemas con respecto a la primera prueba) fue aplicada a 8 alumnos de cuarto semestre, turno vespertino de la preparatoria No.7 y a 17 alumnos de cuarto semestre de la licenciatura en matemática.
 - La tercera prueba fue resuelta por 13 alumnos de Olimpiada de las Matemáticas (alumnos de nivel básico).
 - La utilización de audio en la solución de los problemas por equipo.
- d) *Análisis de Resultados*
- La revisión y análisis de las pruebas aplicadas.
 - Análisis de las grabaciones con el objeto de capturar las estrategias que utilizaron los alumnos en la demostración de los problemas.

En estas actividades, se utilizaron los métodos: Empíricos para el análisis de las en las grabaciones. Los teóricos: el análisis, la síntesis, la deducción en el estudio de las fuentes, la información escrita como planes y programas de estudio de matemáticas del nivel medio superior y el libro del profesor del nivel básico. También se utilizaron los resultados de las observaciones y de la bibliografía relacionada con el tema de demostración en geometría.

Marco teórico

Cuando los estudiantes realizan sus tareas y trabajan con problemas matemáticos, hacen producciones las cuales son manifestaciones de lo que pueden hacer, a las formas de como se manifiestan esas producciones se les da el nombre de habilidades matemáticas. En la teoría de la actividad (Leontiev, 1981) se expone que la interacción entre el sujeto y el objeto, a través de la cual se produce el reflejo psíquico que media y regula esta interacción, se realiza en forma de actividad. De manera que las habilidades son formas de ejecución de una actividad, cuando ésta se dirige conscientemente hacia el logro de un objetivo.

Como la demostración es una habilidad matemática, entonces para llevar a cabo una demostración es necesario ejecutar una serie de actividades para lograr este objetivo.

El sistema de acciones y operaciones se enmarcan en la teoría de la actividad estructurada en tres etapas: orientación, ejecución y control.

Etapas orientadora. Consiste en tener presente un modelo de la acción a realizar que debe contener las condiciones que aseguren su ejecución exitosa, por lo tanto esta etapa constituye el papel rector de la acción.

Etapa de ejecución. Consiste en la realización de la acción.

Etapa de control. Consiste en el aseguramiento del proceso y del resultado de acuerdo con las condiciones establecidas y encaminadas hacia su aplicación en situaciones nuevas.

Entonces las acciones que se deben realizar tendrán que estar estructuradas de la siguiente forma:

El objetivo de todas las acciones en la resolución de un ejercicio es, en cada caso transformar, una situación inicial (elementos dados, premisas) en una situación final (elementos que se buscan, tesis).

El contenido de las acciones en la resolución de un ejercicio está caracterizado por:

- a) Objeto de acciones, que pueden estar dados por los elementos de la materia matemática (conceptos, proposiciones y procedimientos algorítmicos); la correspondencia entre situaciones extramatemáticas y elementos de materia matemáticas; y los procedimientos heurísticos (principios, estrategias, reglas, etc.), así como medios heurísticos auxiliares.
- b) Tipos de acciones: identificar, realizar, comparar, ordenar, clasificar, reconocer, describir, aplicar, fundamentar, buscar, planificar, controlar.

Como condiciones para las acciones se encuentran en primer lugar las exigencias que el ejercicio plantea al alumno, expresada por el grado de dificultad del ejercicio.

Proceder didáctico para demostrar. Los tipos de tareas que se presenta en la enseñanza de la matemática con el carácter de problemas son: Los ejercicios de aplicación a la práctica, la matemática (ejercicio de demostración, construcción, etc.); la definición o caracterización de conceptos; la búsqueda de fórmulas y proposiciones o procedimientos. Estos tipos de problemas encuentran aplicación entre otras reglas heurísticas generales:

- ❖ Separar lo dado de lo buscado.
- ❖ Recordar conocimientos relacionados con lo dado y lo buscado.
- ❖ Buscar relaciones entre los elementos dados y lo buscado.

Pero además existen reglas heurísticas especiales para la resolución de problemas o ejercicios de demostración en geometría como los siguientes:

- ❖ Para los ejercicios de demostración en la geometría es útil la siguiente regla: “Si tienes que demostrar la igualdad de longitudes o amplitudes, trata de encontrar triángulos congruentes que tengan esos segmentos o ángulos”.
- ❖ Para los ejercicios geométricos de construcción es muy usada la regla heurística: “Si la figura buscada no te conduce inmediatamente al éxito, trata de obtener, mediante líneas auxiliares, figuras que te sean fáciles de construir.

Tanto las acciones como el proceder didáctico, sirven a profesores y a estudiantes; de tal forma que a ambos les ayuda a como deben presentar y enfrentar una demostración de un teorema o ejercicio en la clase o fuera de ella.

Situaciones Típicas. Son situaciones de aprendizaje donde se presenta el saber matemático y tales situaciones caracterizan el quehacer exclusivo de la matemática.

Estas Situaciones son: *Elaboración de conceptos y definiciones, Tratamiento de teoremas matemáticos y sus demostraciones, Tratamiento de las construcciones geométricas, Algoritmización y Resolución de problemas.*

En la elaboración de teoremas y demostraciones se distinguen tres procesos parciales caracterizados de la siguiente manera:

Búsqueda del teorema: Proceso en el cual se dirigen las acciones de los alumnos a establecer una suposición, aplicando recursos heurísticos.

Búsqueda de una demostración: Proceso orientado a encontrar la idea de demostración, así como a trazar un plan de solución, de acuerdo con los medios disponibles (figura de análisis, trazos auxiliares, contextualizar según el contenido, recordar propiedades geométricas, definiciones, teoremas, transformarlo a algo ya conocido etc.).

Representación de la demostración: Proceso encaminado a la realización de la idea y el plan de solución, destacando las inferencias y fundamentaciones necesarias en una exposición comprensible.

De manera que estos tres puntos nos hacen reflexionar acerca de la importancia de saber interpretar y comprender un teorema o problema a demostrar, esto es algo que los alumnos por lo general no analizan y mucho menos se trazan un plan de solución.

Resultados

A continuación se registrarán las soluciones de los problemas a las que llegaron los alumnos de las cuatro poblaciones que fue aplicada la prueba, estas las clasificamos en soluciones favorables y soluciones no favorables. Las favorables consistirán en la resolución correcta de todo el problema, las no favorables consistirán en que intentaron resolver el problema (aunque su procedimiento sea o no el correcto).

Prueba No. 1 aplicados a los alumnos de la preparatoria No.7 en la segunda fase.

No resolvieron correctamente ningún problema pero intentaron resolver 3 de ellos, los cuales son: 2, 4 y 6

Prueba No. 2 aplicados a los alumnos de la facultad de matemáticas en la primera fase.

En los que tienen soluciones favorables, los del problema son: 1, 2 y 4; para un total de 24.

Dentro de las soluciones no favorables, los problemas: 1, 2, 3 y 6; para un total de 13.

Prueba No. 3 aplicados a los alumnos de Olimpiada de las Matemáticas en la primera fase.

En los que tienen soluciones favorables, los del problema son: 1, 2 y 3; para un total de 10.

Dentro de las soluciones no favorables, los problemas: 1, 2, 3, 4 y 5; para un total de 17.

Prueba No. 3 aplicados a los alumnos de Olimpiada de las Matemáticas en la segunda fase.

En los que tienen soluciones favorables, los del problema son: 2; para un total de 1. Dentro de las soluciones no favorables, los problemas: 2, 4 y 5; para un total de 4.

Como se puede observar en los resultados anteriores se registran las cantidades de problemas resueltos de cada población, tenemos que las producciones que hacen los alumnos son mínimas, principalmente en los alumnos de preparatoria donde su producción es casi nula.

También observamos que en los alumnos de Olimpiada de las matemáticas trabajan mejor de manera individual que por equipo.

Conclusiones

1. Al realizar las exploraciones a los alumnos de las diferentes poblaciones encontramos que las formas o estilos de demostrar que más se utilizaron son:
 - El Geométrico.
 - El Algebraico.
2. Las estrategias más utilizadas por los estudiantes fueron las siguientes:
 - Por parte de la población del nivel medio superior las estrategias que utilizaron fueron la de meditar sobre dibujos, figuras y diagramas y la herramienta más utilizada fue la calculadora.
 - En la población de la Olimpiada de las Matemáticas sus estrategias fueron el tanteo, meditar sobre dibujos, figuras y diagramas, repetir la figura, la disección y recurrieron a la calculadora solo cuando se trabajo en equipo.
 - En la población de la facultad de matemáticas las estrategias fueron el tanteo, la de meditar sobre dibujos, figuras y diagramas y la herramienta que mas se utilizo fue la calculadora.
3. Se observó que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades para poder realizar una demostración. Pero la población del nivel medio superior es quien presentó más dificultades las cuales se reflejaron en sus respuestas que dieron.
Por lo tanto podemos decir que las dificultades que más se presentaron fueron:
Falta de desarrollo del pensamiento visual, no tienen una fijación fuerte con respecto a los conceptos, definiciones básicas, criterios de semejanza y congruencia.

Bibliografía

- Alsina, C., Fortuny, J. & Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas Didácticas para la ESO*. Madrid, España: Síntesis, S.A.
- Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: Ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en didactique des mathematiques*, Vol. 8, no 3, 267-312.
- Ballester, S. et al. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Cortés, C., Barriga, E. *Enseñar la demostración en geometría vs Enseñar la demostración en geometría*. [En red]. Disponible en: http://education.ti.com/downloads/pdf/latinoamerica/Ensenar_la_demostracion_en_Geometria.pdf

Crespo, C. (2003). La demostración como contenido matemático. *Resúmenes de la VII Escuela de invierno y VII Seminario nacional de investigación en didáctica de las matemáticas* (pp. 144-145). Chilpancingo, Gro., México.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?*. D. F. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino, J. & Recio, A. (2001). Significados Institucionales de la Demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias* 19(3), 405-414.

Hernández, J. (2001). *¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria*. Habana, Cuba: Científico-Técnica.

Müller, H. (1980). *Inferencia Lógica y Demostraciones de la Enseñanza de la Matemática*. Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Ocampo, M. (2000). *Caracterización de las estrategias que utilizan los profesores al enseñar a resolver problemas aritméticos. Un estudio de casos*. Tesis de Maestría, U.A.G. México.

U.A.G. (2000). *Programas de estudio, Área: Físico-Matemáticas*. Chilpancingo, Gro., México: Expos editores.

Valiente, S. (1998). *Diccionario de Matemáticas*. México: Addison Wesley Longman.

Xique, J., Espinosa, H., Montes, M. (2000). *Secuencia y organización de contenidos*. D. F. México: Secretaría de Educación Pública.