ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS CONCEPCIONES SOBRE SERIES NUMÉRICAS EN UNIVERSIDADES LATINOAMERICANAS Y ESPAÑOLAS (UNIVERSIDAD DE JAÉN)*

Carmen Sánchez Gómez, Marta Marcolini Bernardi.
Universidad de Jaén – España.
cgomez@ujaen.es, mmarcoli@ujaen.es
Campo de investigación: Estudios socioculturales; Nivel educativo: Superior

1. RESUMEN

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación en el que se describe, analiza y compara el tratamiento que se da a las series (numéricas y funcionales) en los estudios superiores de Universidades Latinoamericanas participantes y en la Universidad de Jaén.
Se presentan los resultados de los trabajos que se han desarrollado en nuestra Universidad con profesores y con alumnos de las Licenciaturas en Química, Biología y de Ingeniería Técnica en Informática. Además, se analizan las concepciones sobre series numéricas, a través de los libros de texto (Bradley, 1998; Burgos, 1994; Larson, 1995; Zill, 1987). Los resultados obtenidos nos han permitido extraer varios ítemes a tener en cuenta para el diseño de una propuesta alternativa de enseñanza de las series numéricas, adaptada a las peculiaridades intrínsecas de nuestro medio, (Cantoral y Farfán, 2003).

2. INTRODUCCIÓN

Para explorar las concepciones sobre la noción de serie numérica se ha usado un cuestionario formado por seis reactivos (Farfán, 1997, p.182) y se pretende, por una parte, obtener una caracterización de los procesos inherentes a las concepciones que del concepto de convergencia poseen los participantes –profesores y alumnos- y, por otra, poder comparar nuestros resultados con los obtenidos por Farfán y también con los de Instituciones de Enseñanza latinoamericanas.

Con el fin de analizar el tratamiento que los autores de los libros de texto dan a los procedimientos, nociones, y conocimientos se ha elegido un conjunto de libros y, en ellos, se han seleccionado distintas variables de análisis a fin de apoyar nuestra revisión, ya que "Los textos determinan, en gran medida, la práctica docente y nos manifiestan, no sólo las concepciones de los autores y del sentir didáctico de una determinada época, sino, también, las distintas concepciones que se transmiten en el proceso de enseñanza a los estudiantes, una vez que se ha optado por un determinado texto", El Bouazzoui (1988).

A la hora de la selección de los libros de texto que se revisan se ha tenido en cuenta el nivel de enseñanza al que se dirigen -alumnos de primer curso de enseñanza

* Este trabajo está financiado por el Proyecto de investigación SEJ2004-06637 "Uso de la Tecnología Informática en la formación matemática de los estudiantes universitarios" concedido por el Ministerio de Educación y Cultura, y también por el Grupo de investigación "Mejor aproximación de Funciones, Teoría de subvariedades, anillos y categorías" de la Junta de Andalucía. España.

universitaria- tanto para Escuelas Técnicas como para Facultades de Ciencias; y además, que estén en la bibliografía recomendada en los programas.

3. REVISIÓN DE TEXTOS

Para la revisión de textos matemáticos se han considerado las variables y subvariables siguientes: **a.-** Características generales del texto como presentación, notas históricas, tecnología utilizada o propuesta (calculadora, ordenador), gráficos y figuras, ubicación de los ejercicios y problemas propuestos (final de epígrafe, de capítulo), características especiales. **b.-** Organización de contenidos (bloques temáticos, lecciones, capítulos). Se tomaron los índices de contenidos de todos los manuales utilizados, ya que en ellos se refleja la situación y relevancia que el autor da a los conceptos, objeto del análisis, respecto de otros contenidos del Cálculo. **c.-** Estructura general del tema, es decir, secciones, epígrafes; ubicación y extensión que ocupa el tema en la exposición general del texto. **d.-** Tratamiento dado al tema (series numéricas), es decir, las formas de introducirlo (a través de ejemplos, dando la definición); el tipo de definición (formal / intuitiva); los tipos de ejemplos en cuanto al planteamiento (algorítmicos o de comprensión), en cuanto al marco en los que se plantean (analítico, algebraico, gráfico, numérico) y según los contextos en los que se sitúan (físico, matemático, biológico); los tipos de ejercicios y problemas propuestos (al final de la sección / capítulo) y con las mismas consideraciones que en los ejemplos.

Del análisis de los libros de texto revisados, para cada uno de ellos, se puede destacar:

Texto Nº 1 (Bradley): La introducción, que llama perspectiva, y la presentación son muy ilustrativas para este nivel. Hay un completo desarrollo del tema y de los ejemplos, con abundantes gráficos y ventanas computacionales. Hay pocas aplicaciones y no se proponen problemas donde se indique la necesidad del uso de la tecnología informática. Cuatro secciones –las 8.3, 8.4, 8.5 y 8.6– son exclusivamente de convergencia de series, lo que muestra la importancia que tiene para el autor su estudio dentro del tema.

Texto Nª 2 (Burgos): El autor incluye apartados de la teoría (definiciones o demostraciones) dentro de ejercicios y no hace distinción entre ejercicios y ejemplos.
Todos los ejercicios se plantean en contexto matemático y en marcos algebraico y analítico. El desarrollo de la teoría es extenso y formal para los estudios de Ingeniería. Hay una ausencia total de ejemplos y ejercicios de aplicación de las series en otros contextos.

Texto Nº 3 (Larson): La aplicación que sirve de introducción al tema quizás resulte demasiado complicada para este nivel. La nota de la página 539, después de la definición de sucesiones, puede confundir al lector. El ejemplo 5 (p. 610) y los ejercicios 41-44 (p. 614) muestran algunas aplicaciones de las series. El texto contiene observaciones dirigidas a los estudiantes bajo el titulo de tecnología, donde se muestra su uso. Además, se proponen problemas indicándose la necesidad del uso de dicha tecnología informática. Las secciones 10.3, 10.4, 10.5 y 10.6 estudian la convergencia de series.

Texto Nº 4 (Zill): Es un texto adaptado a Ingenierías en el que hay numerosos ejemplos y ejercicios. Algunos ejercicios se plantean en contextos distintos del matemático, no hay ejemplos en esos mismos contextos que sirvan al lector como orientación para su resolución. Los aspectos teóricos se adaptan al nivel para el que está dirigido. Los contenidos teóricos están "dispersos" entre el gran número de ejemplos que se incluyen entre ellos.

Se presenta, a continuación, un breve análisis comparativo de los textos.

- **Según las definiciones**

  - BRADLEY: Define una serie como *una suma de infinitos sumandos.*
  - BURGOS: Llama serie a la *sucesión de sumas parciales de otra sucesión*.
  - LARSON: La *suma de los infinitos términos de una sucesión infinita* se llama serie infinita.
  - ZILL: Dada la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, entonces *a la suma indicada* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ se le llama una serie infinita.

- **Según el peso asignado al desarrollo de los criterios de convergencia**

Nombre del Texto y Nº de epígrafes	BRADLEY	BURGOS	LARSON	ZILL
Introducción y definición	1 (20%)	1 (25%)	1 (20%)	1 (25%)
Estudio de la convergencia	4 (80%)	3 (75%)	4 (80%)	3 (75%)

4. TRABAJO DE CAMPO: REACTIVOS

Los profesores que han participado en la experiencia son docentes en ejercicio en las titulaciones de Ingeniería y de las Ciencias Experimentales. Por lo que ellos no sólo cuentan con los conocimientos que su propia formación profesional les proporciona (la mayoría de ellos son licenciados en matemática, pero también se encuentran licenciados en física) sino que poseen la experiencia que se requiere en la práctica docente. La muestra se compone de ocho licenciados en Matemática y un licenciado en Física. En cuanto a los estudiantes, son alumnos del curso 2004 – 2005, diez de la licenciatura en Química y ocho de ingeniería técnica en Informática.

Seguidamente se muestran los reactivos pasados a profesores (P) y estudiantes (A), así como las observaciones más relevantes del análisis de las respuestas obtenidas:

- Reactivo 1. ¿Cuándo se dice que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge? Dé la definición.

  - No responde, 28% (A) y 0% (P).
  - Respuesta incorrecta, 17% (A) y 11% (P).
  - Tiene el concepto de convergencia aunque responde con argumentaciones poco precisas, 33% (A) y 11% (P).
  - Da correctamente la definición, 11% (A) y 78% (P).

- Reactivo 2. Si consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ y por algún método se logra encontrar $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = C$, $C \in R$. ¿Qué puede decirse acerca de la serie?

  - No contesta, 50% (A) y 0% (P).
  - Contesta correctamente, 44% (A) y 89% (P).
  - "Yo entiendo que A_n es la sucesión de sumas parciales según la notación que yo he estudiado". La respuesta de este alumno muestra la importancia que tiene la notación utilizada.

- Reactivo 3. Enuncia los criterios de convergencia que conoces.

  - No contesta, 11% (A) y 22% (P).
  - Escribe con notación matemática, de forma parcialmente correcta, los criterios que nombra, 39% (A) y 0% (P).
  - Argumenta correctamente los criterios que nombra, 0% (A) y 22% (P).
  - Nombra los criterios, 39% (A) y 56% (P).
  - Cabe destacar que, en la mayoría de las respuestas, se nombran o enuncian los criterios de convergencia de series de términos positivos de D'Alembert y de Raabe .
  - Nombra las series alternadas, 22% (A) y 44% (P).

- Reactivo 4. La serie $\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{r}$, ¿converge? Su suma es:

  - No contesta, 22% (A) y 0% (P).
  - Responde que la serie converge, 56% (A) y 100% (P).
  - No responde a la convergencia, 22% (A) y 0% (P).
  - Halla el valor correcto de la suma, 17% (A) y 89% (P).
  - Calcula la suma de forma incorrecta, 61% (A) y 0% (P).

- Reactivo 5. Y, respecto de la serie $\sum \frac{1}{n}$, ¿qué puede decirse?

  - No contesta, 50% (A) y 0% (P).
  - Contesta incorrectamente (confunde la condición necesaria de convergencia con la suma de la serie), 6% (A) y 0% (P).
  - Respuesta correcta, 44% (A) y 100% (P). De esos porcentajes el 75% (A) y el 44% (P) alude explícitamente a la serie armónica.

- Reactivo 6. ¿Cómo es 0,999… respecto de 1?

  - No contesta, 28% (A) y 0% (P).
  - Es menor que 1, 17% (A) y 11% (P).
  - Tiene la noción de aproximación, 56% (A) y 79% (P).

5. CONCLUSIONES DE LA REVISIÓN DE TEXTOS Y REACTIVOS

Respecto al análisis de los libros de texto, se detecta una notación muy variada para la introducción de las series -lo cual puede inducir al lector a confusión y errores- y, en la mayoría de los textos, ausencia de aplicaciones de las series a otras ciencias.

Del análisis comparativo de los resultados de las respuestas realizadas por los profesores de instituciones educativas españolas, notados (E); así como los resultados de instituciones mexicanas, notados por (M), y que en algunos casos en (Farfán, 1997, pp. 175-191) no se cuantifican y, por ello, reflejamos con X%, se destaca:

- El paralelismo en las respuestas a los reactivos 1 y 2. En el reactivo 1 -en cuanto a la alusión implícita o explícita a la palabra límite- con porcentajes 61% (M) y 37% (E) y en el reactivo 2 -sobre a la equivalencia entre hallar la suma y hacer el estudio de la convergencia- con porcentajes 39% (M) y 56% (E), nos inducen a pensar en la influencia del concepto de límite en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las series.

- Desconocimiento de los criterios de convergencia X % (M) y 11% (E).

- Existe poca familiaridad con la notación, si bien los porcentajes X % (M) y 33% (E).

Por otra parte, se observa una gran disparidad en la notación utilizada por los profesores (hecho que se produce en ambas instituciones). Todo lo anterior pone de manifiesto la necesidad de profundizar en investigaciones que permitan el diseño de propuestas de enseñanza de las series para que la notación usada no sea un obstáculo en el proceso de aprendizaje.

6. ALGUNOS ÍTEMES PARA EL DISEÑO DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

Las reflexiones anteriores nos han servido como base para formular algunos ítemes, adaptados a nuestro medio, y que habremos de tener en cuenta a la hora de diseñar una propuesta de enseñanza para las series. Entre los aspectos que consideramos básicos en la enseñanza de series están:

- Asignar más tiempo a la construcción del concepto (dentro del tiempo total destinado a series).
- Apoyarse en aplicaciones prácticas, modelos y situaciones problemas para la construcción de la noción de serie, como por ejemplo:

- ✓ A los pacientes con ciertos problemas cardíacos generalmente se les trata con digitoxina, un derivado de la planta digitalis. La tasa a la cual el cuerpo de una persona elimina la digitoxina es proporcional a la cantidad de digitoxina presente. En un día alrededor del 10% de cualquier cantidad de droga dada será eliminada. Supongamos que diariamente se le da al paciente una "dosis de mantenimiento" de 0.05 mg. ¿Qué cantidad de digitoxina se encuentra presente en el paciente después de varios meses de tratamiento? (Goldstein, 1990, p. 609).

- ✓ ¿Qué número racional tiene expansión decimal 0.121212....?

- Cuidar la terminología y la notación utilizadas:

- ✓ Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$, a la sucesión $\{s_n\} = \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$ definida por: $s_1 = a_1, \ldots, s_{n+1} = a_{n+1} + s_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$ se le llama *serie de término general* a_n. Es decir, una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión. (Pérez González, F. J., 2005).
- ✓ $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ significa que $\left| L - \sum_{j=1}^{n} a_j \right|$ se conserva menor que cualquier número $\varepsilon>0$ a partir de un cierto $n \in \mathbf{N}$ en adelante. No hay que olvidar que el límite de una serie convergente es justamente el límite de una sucesión y no debe confundirse con una operación algebraica.
- ✓ Proponemos como notación para la serie $\{s_n\}$ la siguiente: $\sum_{n\geq 1} a_n$, que representa el límite de la sucesión que a cada $n \in N$ le hace corresponder el número $\sum_{j=1}^{n} a_j$.

  Cuando dicha serie sea convergente representaremos su límite por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Finalmente señalar que, en la medida que se obtengan más datos recogidos de los centros latinoamericanos participantes, a saber, Cinvestav (México), Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina), Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México), se podrán considerar otros ítemes que permitan elaborar las diferentes propuestas sobre la enseñanza de series adaptadas a cada medio.

BIBLIOGRAFÍA

Bradley, G. L. y Smith, K. J. (1998). *Cálculo de una variable*. España: Prentice Hall Iberia.

Burgos, J. de (1994). “Cálculo Infinitesimal de una variable”. España: McGraw-Hill.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A Vision of its Evolution. *Educational Studies in Mathematics* 53(3), 255-270. Kluwer Academic Publishers.

El Bouazzoui, H. (1988). *Conceptions des éleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*. PHD. Université de Bordeaux I.

Farfán Márquez, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Goldstein, Larry J.; Lay, David C.; Schneider, David I. (1990). Cálculo y sus Aplicaciones. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

Larson, R.; Hostetler, R. y Edwards, B. (1995). *Cálculo y Geometría Analítica*. España: McGraw-Hill.

Pérez González, F. J. (2005). Universidad de Granada, http://www.ugr.es/ ~fjperez.

Zill, D. G. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.