FENÓMENOS LIGADOS A LA VALIDACIÓN EN ÁLGEBRA

Mabel Panizza
Universidad de Buenos Aires (Ciclo Básico Común)- Argentina
mpanizza@mail.retina.ar
Campo de Investigación: Didáctica de la Matemática; Nivel educativo: Medio y Superior

Resumen

El presente trabajo se inserta en una investigación sobre razonamiento matemático en el dominio del álgebra. En trabajos anteriores (Panizza, 2001; Panizza & Drouhard, 2002, 2003; Drouhard & Panizza, 2003) mostramos una tipología de generalizaciones espontáneas y diversos fenómenos ligados al control por conversión a distintos registros semióticos. En continuidad con estos trabajos, nos hemos dedicado a precisar aspectos relacionados con la capacidad de los alumnos para reconocer la necesidad de validar sus conjeturas, y con los medios de los que disponen para validar. Los fenómenos a describir aquí provienen por un lado de las (re)formulaciones que los alumnos hacen en lenguaje natural de los enunciados dados en el registro de las escrituras algebraicas, y por otro lado del nivel de familiaridad de los alumnos con el campo de objetos de referencia de dichos enunciados. Mostramos también cómo estos fenómenos afectan la capacidad de razonar y definir en matemática.

Introducción

El rol esencial otorgado en nuestra investigación a la semiosis y al marco teórico de Registros de Representación Semiótica provisto por Duval (1993, 1995), adoptado para el análisis del funcionamiento cognitivo en el área, nos ha conducido a profundizar en los procesos de razonamiento ligados al tratamiento dentro del registro semiótico de las escrituras algebraicas y a la *conversión a otros registros*.

En este contexto, encontramos que el análisis del valor de verdad de enunciados algebraicos y el reconocimiento de objetos matemáticos definidos algebraicamente (por ejemplo por ecuaciones e inecuaciones) supone *conversiones implícitas* a otros registros, muy especialmente al registro verbal. La naturaleza de este tipo de conversiones *implícitas* es muy diferente de la naturaleza de las conversiones *explícitamente solicitadas* por una actividad, y se presentan fenómenos de importancia en relación con la capacidad de razonar y definir en matemática (Panizza, 2005[a], Panizza 2005[b]). A grandes rasgos, podemos decir que las asociaciones producidas por las conversiones implícitas al lenguaje natural que los alumnos realizan de los enunciados matemáticos desencadenan procesos modulados por las características del razonamiento natural, muy especialmente *generalizaciones* y *definiciones características* (Duval, 1995). Estos procesos comandan a su vez las *reformulaciones* que hacen de los enunciados algebraicos y la *capacidad para reconocer la necesidad* de validarlos.

Por otra parte, encontramos que el *grado de familiarización* con los objetos de referencia de los enunciados es a menudo un elemento crucial que subyace a la *capacidad de validar* un enunciado. Más específicamente, nuestras investigaciones muestran que la débil competencia de los alumnos para encontrar *por sí mismos* ejemplos y contraejemplos compite con su capacidad lógica para analizar el valor de verdad de los enunciados. De esta manera, el grado de familiarización con los objetos de referencia comanda en gran medida las pruebas, las explicaciones, los razonamientos en general y las definiciones, en el nivel de racionalidad matemática de los alumnos de la población estudiada.

En este trabajo mostramos estos fenómenos a través del análisis de un caso. En Panizza (2002), presentamos –entre otros- el ejemplo de Brenda a fin de describir el fenómeno de las *generalizaciones espontáneas* encontradas en el dominio del álgebra. El especial interés de los procesos desplegados por Brenda motivó la investigación en las líneas aquí comunicadas.

Análisis de un ejemplo, el caso de Brenda

El problema

"Decidir si la siguiente implicación es verdadera o falsa:

$\forall x \in R$: $2x^2 > x\ (x+1) \Rightarrow x > 1$"

fue dado en clase para analizar la competencia algebraica para decidir la relación entre los conjuntos solución de dos inecuaciones, -en un contexto de implicación-.

Al resolverlo, Brenda considera diversos ejemplos : $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$, $x=-4$ analizando el valor de verdad del antecedente y del consecuente en cada caso.

Luego concluye, correctamente, que el enunciado es falso, porque "se pueden encontrar valores de x menores que 1 que cumplan $2x^2 > x\ (x+1)$"

El profesor le pide que explique cómo lo pensó.

Brenda dice que "–2 , –3, -4 *son contraejemplos, porque para ellos el antecedente es verdadero y el consecuente es falso*".

De acuerdo con la tarea, Brenda podría haberse detenido allí, pero ella agrega inmediatamente:

B: *ah, es* /x/ *lo que habría que haber puesto*! Es "$\forall x \in R$: $2x^2 > x\ (x+1) \Rightarrow /x/ > 1$" *lo que es verdadero*!".

Analizaremos este ejemplo desde tres puntos de vista:

1) El de la corrección del enunciado a través de una generalización
2) El de la capacidad para percibir la necesidad de validación
3) El de la capacidad para validar el enunciado

1. Corrección del enunciado a través de una generalización

Brenda -habiendo considerado distintos ejemplos (0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, -4) en su análisis del primer enunciado dado por el profesor- concluye correctamente que el enunciado es falso. Ahora bien, a la hora de ***argumentar*** ella muestra, también correctamente, que **algunos de esos valores** ($x = -4$, $x = -3$, $x = -2$) son contraejemplos.

Es importante advertir que en ese momento ella corrige el enunciado proponiendo una conjetura que considera verdadera. Según nuestra interpretación, esta corrección la rea-

liza en base a una *generalización espontánea* (del conjunto de contraejemplos)[1]. Efectivamente, la tarea no pide encontrar una regularidad en los contraejemplos.
¿En qué consiste dicha generalización? Cuando Brenda argumenta ella inmediatamente junta todos los contraejemplos, y los identifica como siendo de un cierto "tipo": se trata de los números cuyo valor absoluto es mayor que 1 ($|x|>1$). Dicho de otra manera, ella *condensa* lo que ve en los contraejemplos por medio de una generalización.
Este tipo de procesos constituye una función psíquica bien conocida, por la cual uno retiene los caracteres típicos más frecuentes, los que son necesarios para un reconocimiento rápido. Por ejemplo, "un pájaro es un animal que vuela". Estas formulaciones a partir de caracteres típicos funcionan luego como definición: es lo que se denomina definición *típica* (Duval, 1995).
Interpretamos que esto es lo que hace Brenda, en tanto el carácter representativo (para ella) de un "individuo" es representativo de toda la población. Efectivamente, los ejemplos numéricos ("individuos") considerados **al argumentar** ($x = -4$, $x = -3$, $x = -2$) tienen para ella la particularidad de ser números cuyo valor absoluto es mayor que 1. En consecuencia, esto caracterizaría (o definiría) a la clase (población) de contraejemplos .

Este tipo de definiciones desencadenan procesos de razonamiento natural. En nuestro análisis, nos interesa el proceso por el cual *una propiedad encontrada en un individuo o en varios individuos* es atribuida automáticamente a *toda* la población (para Brenda, como cada elemento considerado es contraejemplo, entonces la clase entera "$|x| > 1$" estaría formada por contraejemplos).

Si nuestra interpretación es adecuada, diversas consecuencias se derivarían de este tipo de asociaciones. En el caso de Brenda, la corrección del enunciado inicial tendría por función quitar los contraejemplos encontrados:

"*era* $|x|$ *lo que habría que haber puesto", lo que es verdadero es* «$x \varepsilon R$: $2x^2 > x(x+1) \Rightarrow |x|>1$ »"

(en adelante, llamaremos a esto *primera conjetura)*

La expresión "*era* $|x|$ *lo que* ***habría que haber puesto*** *" parece ir en ese sentido: la falsedad* del enunciado original podría *corregirse, poniendo* en el consecuente la propiedad con la que ella identifica a los contraejemplos ($|x| > 1$).

2. La (in)capacidad para percibir la necesidad de validación

Cuando nosotros consideramos esta producción desde el punto de vista « matemático » esto nos sorprende, porque pensamos que Brenda hubiera podido analizar el valor de verdad de la nueva conjetura, porque la tarea original, que era equivalente (desde el punto de vista lógico) fue correctamente analizada por ella. Pero ella no lo hace.

¿Por qué ella no se plantea ni siquiera la necesidad de justificar este nuevo enunciado?

En primer lugar, esto está ligado al proceso mismo de (re)formulación del enunciado original, el que tendría para Brenda por función *quitar el conjunto de contraejemplos*. Si nuestra interpretación es adecuada, mediante el fenómeno de generalización por *condensación* que acabamos de describir y conformemente a la actitud que caracteriza a la

---

[1] En Panizza (2002) definimos como *generalización espontánea* a una generalización que surge sin que la tarea demande hacer una generalización.

definición típica -atribuir a la clase entera lo que es válido para los pocos ejemplos típicos- el nuevo enunciado sería *automáticamente* verdadero[2].

Notemos por ahora que desde el punto de vista de la escritura, el nuevo enunciado se forma por el procedimiento de substitución de la escritura « x » por la escritura « $|x|$ ».

Por otra parte, parece que para Brenda, una vez "quitados los contraejemplos", no tiene necesidad de ocuparse de la compatibilidad de las diferentes partes del enunciado. Dicho de otra manera, aunque ella formula una proposición, no encuentra *necesidad* de validarla (como lo hizo con el enunciado inicial, dado por el profesor). Esta actitud de de prestar atención a *los objetos* y su *descripción* ($|x| >1$), y no a la *nueva relación establecida* nos condujo a encontrar un marco explicativo en el modelo de *niveles de articulación discursiva del sentido en lengua natural en función de dos aspectos de todo discurso (de re/de dicto)* provisto por Duval (1999). Este marco posibilita interpretar los procesos ligados a las formulaciones en lenguaje natural, en términos de diferentes *focalizaciones* de la atención y la *elección de movimientos ascendentes o descendentes* (de los niveles de articulación discursiva).

Interpretamos que todo el proceso discursivo de Brenda está comandado por el análisis y la **atención que presta a los números** con los que analiza el enunciado y a la **forma de describirlos** (en este caso, como siendo números cuyo valor absoluto es mayor que 1). Esta focalización de la atención en los objetos y sus descripciones significa según el modelo que Brenda no se sitúa en los otros niveles de articulación discursiva (caracterizados por proposiciones y encadenamiento de proposiciones). Dicho de otra manera, aunque formula un nuevo enunciado *no se ocupa del problema de la verdad* porque su atención queda localmente dirigida a los objetos y no al enunciado general formulado. La focalización de la atención en los objetos –según Duval- puede facilitar la comprensión pero a la vez inhibir las expresiones mediante frases y discursos coherentes.

Pensamos que este ejemplo muestra un problema general que no es identificado desde la perspectiva del profesor, tal vez por el grado de automatización del control sobre sus prácticas discursivas en este dominio. Efectivamente, el matemático no sólo controla sus asociaciones producidas en lenguaje natural sino que sabe que al realizar substituciones no sólo debe prestar atención a los símbolos aislados sino a las proposiciones y al encadenamiento de proposiciones, focalizando alternadamente su atención según corresponda, y analizando el valor de verdad de las proposiciones y la validez de los razonamientos en juego.

3. La capacidad para validar el enunciado

El segundo de los aspectos mencionados, el del nivel de familiaridad de los alumnos con el campo de objetos de referencia de los enunciados algebraicos, ha sido fructífero para interpretar los procedimientos desplegados por los alumnos al analizar un enunciado. Entendiendo por *objetos familiares* los objetos inmediatamente disponibles a la conciencia de un sujeto[3], encontramos que son éstos los (únicos) objetos que los alumnos utilizan al buscar ejemplos y contraejemplos, aunque puedan concebir otros

---

[2] Desde el punto de vista lógico uno podría decir que estos procesos no explican que para ella estos números sean *todos* los contraejemplos. Sin embargo, desde el punto de vista psicológico es de creer que los *contraejemplos encontrados* se consideren como *todos los contraejemplos* en este nivel de racionalidad (sobre todo cuando se los ha condensado en una « clase » de números como en este caso).

3 Definición debida a Duval (1995)

números cuando son propuestos por otra persona. Entonces, cuando los objetos familiares son muy limitados en relación a las instanciaciones *posibles* del campo de objetos de referencia de los enunciados algebraicos, la posibilidad de analizar el valor de verdad de dichos enunciados se ve reducida, aunque los alumnos perciban la necesidad de validación. Nuevamente presentaremos estos resultados de nuestra investigación -los que tienen gran grado de generalidad-, con el análisis del caso Brenda.
Si desde el punto de vista lógico Brenda hubiera podido validar el enunciado propuesto por ella, hemos considerado en el apartado anterior que ella no encontró necesidad de hacerlo, y hemos apuntado una explicación.

Pero, ¿qué hubiera pasado si ella *hubiera percibido* esta necesidad o el enunciado hubiera sido dado por el profesor para analizar su valor de verdad, como fue dado el primer enunciado?

¿Es suficiente disponer de capacidad lógica para resolver un problema? Dicho de otra manera, dos enunciados que tienen la misma estructura lógica (en el ejemplo, un enunciado general en un contexto de implicación), ¿son equivalentes en complejidad? De otra manera aún, ¿es la complejidad lógica la única "variable" relevante para disponer de medios para validar un enunciado?

Para responder esta pregunta, vale la pena analizar el siguiente diálogo iniciado por el profesor ante la seguridad de Brenda sobre la verdad del enunciado formulado por ella.

El profesor le plantea un contraejemplo:

> « *Qué te parece ¿es verdadero para* - 0,5 ? »

Brenda responde inmediatamente :

> « *ah no, tiene razón, es falso para los racionales* ! » (segunda conjetura)

Notemos en primer lugar que Brenda hace nuevamente una generalización espontánea reconociendo a « - 0,5 » como representativo de los números racionales. Mediante un mecanismo análogo al analizado anteriormente, adjudica a toda esta "clase" de números (los racionales) la propiedad de ser contraejemplos del (nuevo) enunciado. Evidentemente, su afirmación "es falso para los racionales", es incorrecta.

Hasta aquí, el análisis es similar al anterior.

Ahora bien, notemos que « - 0,5 » es un contraejemplo y que ella lo advierte inmediatamente, *una vez sugerido por el profesor*. Pero no se trata de un número que le venga *espontáneamente* a su mente para analizarlo como ejemplo. No es un número que ella considere *por sí misma*.

Esto es lo que nos ha conducido a la importancia de diferenciar los objetos que un sujeto puede reconocer cuando es propuesto por otra persona, de aquellos que le son *familiares*, es decir que son disponibles inmediatamente a la conciencia del sujeto.

Notemos que si bien los dos enunciados -el original y el propuesto por Brenda- son equivalentes desde el punto de vista lógico, no lo son en cuanto a sus contraejemplos. Los contraejemplos del segundo enunciado (los números entre -1 et 0) son difíciles de encontrar para ella, a diferencia de los contraejemplos del primer enunciado (los números negativos) donde pudo encontrar muchos contraejemplos entre sus objetos *familiares* (los enteros negativos).

Dicho de otra manera, si Brenda hubiera percibido la necesidad de validar su nueva conjetura, **ella no hubiera tenido los medios para hacerlo**, porque el conjunto de contraejemplos no está constituido como conjunto de objetos familiares para ella.

Este ejemplo muestra que como afirma Duval (1995) la posibilidad de producir un contraejemplo está ligada al campo de objetos *familiares* para el sujeto que analiza el enunciado. El proceder de Brenda es además bastante representativo de lo que observamos en general en nuestra investigación[4].

Conclusiones

A través de un ejemplo hemos analizado algunas influencias que tienen las formulaciones que los alumnos hacen en lenguaje natural al analizar enunciados algebraicos, y los efectos de una (falta de) familiaridad con los objetos de referencia de los enunciados (ejemplos y contraejemplos).

En la población estudiada, las substituciones que los alumnos hacen en los enunciados, son basadas en las observaciones y descripciones de los objetos que ellos consideran en su análisis (como ejemplos o como contraejemplos). Estos objetos *familiares* generalmente no son representativos de todos los objetos de referencia de los enunciados. Por otra parte, las descripciones que ellos hacen de las observaciones son formuladas en lenguaje natural y en consecuencia son moduladas por los mecanismos ligados al razonamiento natural. Al realizar esas substituciones, su atención se mantiene localmente focalizada en *los cambios producidos* (en su mayoría basados a su vez en sus descripciones de los objetos). Esto explica que, aunque puedan hacer proposiciones o encadenamientos de proposiciones, ellos no los analizan como tales, porque no se sitúan en los diferentes niveles de articulación del discurso, como lo hace un matemático.

Desde el punto de vista didáctico, esta investigación muestra la necesidad de tomar a cargo de la enseñanza la familiarización de los alumnos con los objetos de referencia de los enunciados. Asimismo, muestra que la gestión de una ruptura con las formas de definición moduladas por las características del razonamiento natural, es necesaria para una entrada en las formas de definir en matemática.

Referencias

Drouhard, J. & Panizza, M. (2003). What do the Students Need to Know, in Order to be Able to Actually do Algebra? The Three Orders of knowledge. *Proceedings CERME 3*,. cd Università di Pisa.

Duval, R. (1993). Registres de représentation semiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. **5**, (pp. 37-65).

Duval, R. (1999) . Écritures, raisonnement et d´couverte de la démonstration en mathématiques. *Actes de la 10ème École d'Éte de Didactique des Mathématiques*. Marc Bailleul Eds, Houlgate. (pp. 29-50).

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotics et apprentissages intellectuels*. Peter Lang. Bern.

Panizza, M. (2002). Generalización y Control en álgebra, *actas de Relme 15*, (pp. 213-221).

---

[4] Otros ejemplos pueden verse en Panizza (2005[b])

Panizza, M. & Drouhard, J. (2002). Reasoning Process and Process of Control in Algebra: Recent Theoretical and Experimental Trends in the Project "CESAME". *Proceedings CERME 2*. Márianské Lázné (Rép. Tchèque) Vol II, (pp. 597-600).

Panizza, M. & Drouhard, J. (2002). Producciones escritas y tratamientos de control en álgebra: algunas evidencias para pensar en interacciones posibles para guiar su evolución, *actas Relme 15,* (pp. 207-212).

Panizza, M. (2005 [a]): IX. Fenómenos ligados a la descripción de una curva funcional en un contexto de comunicación, en A. Palermo & I. Cappellacci (Coord.). *Las relaciones entre la teoría y la metodología en la investigación educativa*. Buenos Aires. Argentina. ISBN 987-20565-3-6.

Panizza, M. (2005 [b]) . *Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Libros del Zorzal. Buenos Aires. Argentina. 126 páginas. ISBN 987-1081-73-1.