CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES ACERCA DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LINEAL DE DOMINIO DISCRETO

Cristina Ochoviet, Mónica Olave, Yacir Testa.
Instituto de Profesores "Artigas" - Uruguay
princesa@adinet.com.uy; matemoni@adinet.com.uy; milefede@adinet.com.uy
Campo de investigación: Gráficas y funciones; Nivel educativo: Medio

Resumen

Se reporta un estudio de casos realizado con estudiantes de 16-17 años en relación a sus concepciones sobre la gráfica de una función lineal de dominio discreto.
En este estudio detectamos que los alumnos presentan dificultades en concebir la gráfica de una función cuando su dominio no es el conjunto de los números reales pues no consideran como gráficas de funciones a aquellas que sean un conjunto de "puntos"[1] y que no formen una "línea continua".

Introducción

Si se les pide a los estudiantes graficar, por ejemplo, una función lineal de R en R, no tendrán dificultad en trazar una recta por el origen del sistema coordenado ayudándose de una tabla de valores pertinente. Sin embargo, cuando se les plantea graficar una función que mantenga la misma expresión analítica que la anterior, pero con dominio el conjunto de los naturales, pueden intuir a lo sumo que se trata de una semirrecta, pero prácticamente nunca llegan a concebir, que se trata de un conjunto de puntos alineados que no completan una semirrecta. Los estudiantes no aceptan la presencia de una gráfico "agujereado", es decir, un conjunto de infinitos puntos alineados que no completan una recta.

Compartimos lo constatado por Farfán (2000) "*que en caso que logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, entonces manejarán el concepto de función no solo como objeto, sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad*". Dada la importancia que tiene la visualización de la gráfica de una función tanto en la formación como en el enriquecimiento de este concepto es que nos interesa explorar las concepciones de los estudiantes sobre la gráfica de una función lineal de dominio discreto.

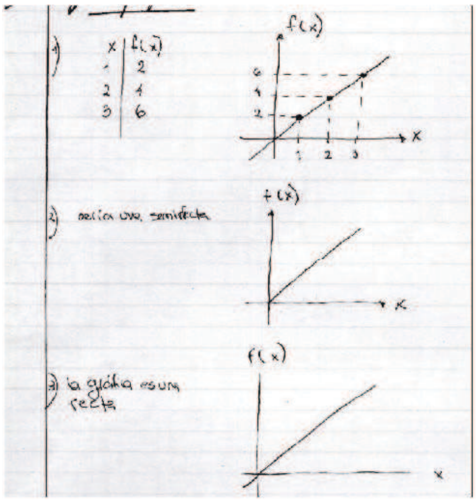
Objetivos y diseño de la secuencia de actividades

El objetivo de la secuencia diseñada era que los alumnos construyeran la gráfica de una función lineal de dominio discreto. Ya conocían la gráfica característica asociada a las funciones lineales cuando el dominio es el conjunto de los números reales.
Se les presentaron a los estudiantes tres actividades a resolver individualmente:

[1] Si bien todas las figuras geométricas son conjuntos de puntos, nos referiremos con "gráfica de puntos" aquellas que corresponden a funciones con dominio discreto.

1) Grafica la función *f* definida de R en R por $f(x)= 2x$. Es decir que la variable x toma todos los valores reales. Puedes ayudarte utilizando una tabla de valores.
2) Grafica la función *g* definida de N en N por $g(x) = 2x$. Es decir que la variable x toma solamente valores naturales. Puedes ayudarte utilizando una tabla de valores.
3) Grafica la función *h* definida de Z en Z por $h(x) = 2x$. Es decir que la variable x toma solamente valores enteros. Puedes ayudarte utilizando una tabla de valores.

Todos los trabajos obtenidos fueron muy similares al siguiente:



Dado que al planificar este estudio se manejó la posibilidad de que la mayoría de los estudiantes "unieran" los puntos de la gráfica en el caso de las funciones *g* y *h*, se preparó otra serie de actividades, con el fin de hacerlos reflexionar acerca de las gráficas realizadas y que pudieran eventualmente modificar sus trabajos. Como en la puesta en práctica, los estudiantes cometieron el error que se había previsto, se les proporcionaron dichas actividades. Se presentan algunas de ellas a continuación:

- Fíjate si los puntos de coordenadas:

(1,5; 3), (-1; -2), (3,5; 7), (3; 6), (0.5; 1), (2; 4), (3; 7), pertenecen a la gráfica de la función *g* que hiciste.

¿Deberían estar todos graficados? ¿Por qué? Explica ampliamente tu respuesta.

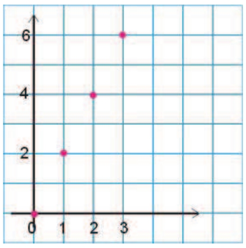
- Fíjate si los puntos de coordenadas:

(1.5; 3), (-1; -2), (-3.5; -7), (0.5; 1), (-2; -4), (3; 6), (-3; -8), pertenecen a la gráfica de la función *h* que hiciste.

¿Deberían estar todos graficados? ¿Por qué? Explica ampliamente tu respuesta.

- ¿De qué te parece que depende que un determinado punto pertenezca a la gráfica de una función?

Posteriormente se realizó una puesta en común para discutir las ideas de cada estudiante y tratar de llegar entre todos a la gráfica adecuada para las funciones *g* y *h*, pero surgieron más dificultades de las previstas, pues los alumnos no podían aceptar que una gráfica del siguiente tipo pudiera ser la gráfica de una función.



Gráfica (1)

Consideraciones teóricas

Para analizar el presente fenómeno tomaremos los siguientes conceptos teóricos:

i) La noción de concepción presentada por Artigue (1983)
ii) La noción de obstáculo presentada en Brousseau (1986)
iii) La noción de contrato didáctico de Brousseau (1980)

i) El término "concepción" se utiliza a fin de establecer una distinción entre el objeto matemático, que es único, y las diversas significaciones que le pueden asociar los alumnos.
Según Artigue (1990) la noción de concepción responde a dos necesidades distintas. Por un lado mostrar los múltiples puntos de vista sobre un mismo objeto matemático y dejar en evidencia cuáles son las adaptaciones que el individuo realiza cuando debe resolver un problema. Por otro, permite diferenciar la enseñanza que se quiere transmitir y los conocimientos que el estudiante efectivamente construye.

ii) Según Bachelard (1938), se debe plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos: *" [...] es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. [...] se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización."*
Brousseau se inspira en esta noción de obstáculo para aplicarla al aprendizaje de la matemática. Señala que son los conocimientos matemáticos perfectamente correctos en su campo de validez los que, al ser extendidos a otros contextos en los que resultan insuficientes o inadecuados, pueden constituirse como obstáculos: *"El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido". (Brousseau, 1986)*

iii)La noción de contrato didáctico es definida por Brousseau en 1980, como el conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del maestro que son esperados por el alumno, y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro.

Este contrato se evidencia cuando es roto por algunas de las partes que intervienen en él. Chevallard et al (1997) señalan que en la medida que este contrato evolucione, traspasando a los estudiantes gran parte de la responsabilidad que hoy es asignada al profesor, podremos esperar que los alumnos se responsabilicen de las respuestas que dan a los problemas matemáticos.

Análisis

Se realizó una puesta en común con los estudiantes y a partir de las actividades mencionadas anteriormente se fueron "borrando" puntos de las gráficas que ellos proponían, hasta obtener las gráficas de puntos que eran correctas. A continuación se transcriben algunas ideas de los alumnos, que arrojan luz sobre sus concepciones acerca de la gráfica de una función.

Aparicio: *Todos los puntos deben estar en la gráfica aún cuando no pertenezcan a la función (aludiendo a los puntos que están "entre" los puntos que sí pertenecen a la gráfica). La gráfica (1) no es una gráfica.*

Lucía: *La gráfica (1) es una gráfica incompleta.*

Aparicio: *Si es incompleta entonces no es una gráfica.*

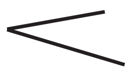
Lucía: *Si a un hombre le falta un brazo por ello no deja de ser hombre.*

Profesora: *Estamos hablando de objetos matemáticos, no tendrían por qué estar en las mismas condiciones que las personas.*

Lucía: *Si a un triángulo le falta una parte no deja de ser triángulo.*
Por ejemplo (y realiza el siguiente dibujo):

Sigue siendo un triángulo.

Aparicio: *Pero esto no es un triángulo:*



Finalmente no hubo acuerdo en si una gráfica que para ellos era "incompleta" tenía el estatus de gráfica. Las ideas vertidas por los estudiantes nos permiten apreciar que la concepción que tienen acerca de la gráfica de una función es la que corresponde a funciones continuas cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Esta concepción, quizás adquirida por el tipo de representaciones gráficas con el cual el alumno ha tenido la

mayoría de sus experiencias, parecería constituir un obstáculo para que el alumno acepte gráficas como la (1) para la gráfica de una función.
Veremos a continuación cómo la concepción de gráfica de Aparicio ha sido consolidada por el tipo de contrato didáctico que se maneja habitualmente en las aulas de matemática: *el profesor enseña lo correcto, lo necesario y lo suficiente para que el alumno haga las cosas bien.*

Profesora*: Ustedes señalaron dos condiciones para que un punto pertenezca a la gráfica de una función y están de acuerdo en que en las gráficas que ustedes hicieron, hay puntos que no deberían estar. Aparicio, ¿cómo podrías explicar la presencia de esos puntos en la gráfica?*

Aparicio: *Esos puntos deben estar en la gráfica para que sea gráfica.*

Profesora: *¿No puedes considerar solamente los puntos "separados"?*

Aparicio: *No. Debo unirlos*

Profesora: *¿Por qué?*

Aparicio: *Porque me lo enseñaron así. Siempre unimos los puntos de las gráficas. Además la gráfica de una función polinómica de primer grado es una recta. Así me lo enseñaron.*

Aparicio no puede ir contra lo que le han enseñado, contra la concepción de gráfica que tiene fuertemente arraigada. Aquí aparece claramente, por un lado, el conocimiento anteriormente establecido (la gráfica es una recta) como obstáculo, de índole didáctica quizás, dada la restricción del universo de gráficas que se le han mostrado a los estudiantes y por otro, la fuerte creencia en las cláusulas del contrato que señalan que los profesores han enseñado lo suficiente para realizar correctamente las tareas. Consideramos que el tipo de contrato didáctico que se maneja habitualmente en la aulas, muchas veces basado en la autoridad del profesor, hace que este estudiante no pueda ir contra lo que él dice que le han enseñado. Parecería no haberse generado la autonomía suficiente como para crear conceptos matemáticos nuevos y válidos, independientemente de la voluntad del profesor. Esto se manifestó claramente cuando después de mucho discutir, los estudiantes solicitaron al docente que dijera si la gráfica (1) era o no la gráfica de una función. Necesitaban que la profesora lo institucionalizara para comenzar a aceptarlo. Ellos reclamaban que la docente a cargo cumpliera con su parte del contrato didáctico: la de decir lo que es correcto y lo que no es, en una clase de matemática. Quizás el tipo de contrato existente está quitando autonomía al pensamiento de los estudiantes, tal vez el contrato didáctico debería evolucionar en el sentido de traspasar la responsabilidad de las respuestas a los estudiantes y no hacerla recaer enteramente en el profesor.

Conclusiones y recomendaciones didácticas

Los estudiantes mostraron resistencia a aceptar una gráfica de puntos como la gráfica de un función. Pensamos que en esto incide el universo de gráficas con las que los estudiantes han tomado mayor contacto en sus actividades escolares: "las de trazo continuo".

A partir de los casos observados, consideramos valioso incorporar en las prácticas de clase un universo rico de representaciones gráficas que incluya diversos ejemplos de gráficas discretas para que los estudiantes puedan tomar contacto tempranamente con diversas situaciones problemáticas a partir de las cuales construyan una amplia gama de gráficas que les permitan construir esquemas conceptuales más completos.

Referencias bibliográficas:

Artigue, M. (1990). *Epistemologie et Didactique*. Recherchez en Didactique des Mathématiques 10 (2), pp. 241-286.

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques.* Recherches en Didactique des Mathématiques , 4(2), pp. 165 -198.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Cuadernos de Educación, 22. Barcelona: Horsori Editorial.

Farfán, R. (2000). *Lenguaje algebraico y pensamiento funcional.* En Cantoral, R. et al. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Editorial Trillas.