RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Giovannni Da Silva Nunes
Universidade Luterana do Brasil – Brasil
gsnunes@portoweb.com.br
Campo de Investigación: Pensamiento geométrico; Nivel Educativo: Medio

Minicurso

Resumo

O presente trabalho visa explorar o desenvolvimento e aprofundamento de conceitos geométricos utilizando a História da Matemática como motivador de problemas e as construções geométricas como ferramenta da resolução de problemas. Usamos a metodologia Resolução de Problemas e desenvolvemos uma sequência didática de forma gradual, para que o desenvolvimento da atividade permita que o ouvinte possa resolver algumas equações que envolvam expressões algébricas. Cabe salientar que nosso foco não foi utilizar as atividades para facilitar a aprendizagem de tópicos algébricos, nossa proposta é voltada a alunos que tenham conhecimento prévio do assunto, e que possam, assim, visualizar melhor conceitos, teoremas e aplicações da geometria que são motivados de forma a dependerem de tal resolução.

Palavras Chaves: Geometria, Resolução Geométrica, Seqüência Didática.

Introdução

A origem da palavra geometria provém da palavra grega geometrein: geo, que significa terra, e metrien, que significa medir; nos passando assim a idéia de que geometria é a ciência de medir a terra, porém, sabemos que esta foi a origem da palavra e que hoje, em geometria, vamos muito além do termo que originou o seu nome. Uma de nossas preocupações atuais é quanto a desvinculação das diferentes áreas matemáticas. Os conteúdos nos são passados separados por ramos da matemática, e hoje, em algumas situações vemos dificuldades, por parte de alguns alunos, de verem a relação existente entre competências da mesma área, o que dificulta a aplicação de conceitos matemáticos em situações práticas que no geral dependem da identificação e da adaptação de vários conceitos para a resolução do mesmo.

Uma das primeiras formas de comunicação do homem, certamente foi feita através do desenho. Podemos destacar os desenhos rupestres rituais das cavernas da era do paleolítico e os sinais pictográficos do sistema hieroglífico da primeira forma de escrita dos egípcios.

Segundo o Cel. Prof. Walter Rollim Pinheiro (1995) a espontaneidade do desenho de uma figura, a princípio traduzindo idéias concretas de animais, objetos e pessoas, evoluiu para a representação de idéias abstratas através da simplificação das figuras e posteriormente, de sistemas convencionais ou racionais de correspondência concreto/abstrato.

Devido a uma grande evolução ocorrida em outras áreas da matemática, as construções geométricas foram deixadas em segundo plano, fazendo com que esta área fosse muito pouco explorada atualmente, nos ensinos Fundamental e Médio.

Na grécia Antiga, século V a.c, acreditava-se que todos os problemas matemáticos possuiam solução geométrica, utilizando-se apenas régua não graduada e compasso. Existem relatos de que Euclides, em suas construções geométricas, usava um "compasso dobradiço", que fechava assim que uma das pontas fosse retirada do papel. Mesmo assim em seu livro I, ele afirma que é possível construir qualquer segmento sobre uma reta a partir de um ponto dado. Euclides nunca descreveu, em seus trabalhos, como essas construções eram feitas. O fato de que elas teriam sido efetuadas com o uso de um compasso e de uma régua sem escalas tem sido atribuído a Platão. Acredita-se que os gregos primitivos tenham dado atenção especial às construções geométricas porque cada uma servia como uma espécie de teorema de existência para a figura ou conceito envolvido. Contudo sabemos que nem todos os problemas algébricos podem ser resolvidos geometricamente de forma exata, é o caso, por exemplo, da quadratura do círculo, da retificação da circunferência e da duplicação do cubo. No entanto devemos ser capazes, através de um embasamento teórico da geometria, de distinguir problemas que possuam ou não uma solução geométrica aceitável, no sentido de ser mais próximo da realidade no que se refere a soluções concretas. Atualmente nos defrontamos com este mesmo desafio em situações práticas na qual o resultado algébrico não possui tanto valor quanto o geométrico. Podemos citar as projeções de móveis e produtos com design não convencionais, que exigem muitas vezes a resolução geométrica para os problemas. Apesar do incentivo dado a geometria nos últimos anos, notamos que no Brasil há uma deficiência muito grande nesta área , a qual aparece desvinculada das demais áreas da matemática. Os próprios livros didáticos , com raríssimas exceções, trazem o conteúdo de geometria nos últimos capítulos, que muitas vezes não são vistos pelos alunos. Entendemos que existe uma necessidade de relacionarmos mais a Álgebra e a Geometria. Com base nessa filosofia, procuramos desenvolver atividades que explorem o pensamento geométrico vinculado ao algébrico. Acreditamos que a visão geométrica pode ser uma transição para o abstrato, a partir do momento em que o aluno materializa a incógnita como um elemento geométrico a ser procurado, tendo assim uma solução concreta para o que antes era apenas um número abstrato, desenvolvendo assim um sentido, e não único, para a solução algébrica.

A metodologia usada será a Resolução de Problemas. Faremos um breve histórico sobre a área de geometria, contextualizando o período em que os problemas que serão abordados ocorreram, quais eram as dificuldades da época no que se refere a maneira de atacar e resolvê-los, como os mesmos foram resolvidos, e quais as informações que se pode tirar do problema e da sua resolução. Iremos fazer uma adaptação propondo atividades em que a resolução se fundamenta em processos usados naquela época, deixando claro que os mesmos não podem ser abandonados, pois, muitas vezes aparecem em situações atuais, e em outros casos nos mostram o quanto avançamos, pois só nos é possível vermos o quanto uma determinada área da matemática avançou quando sabemos como era antes do avanço.

Utilizando a História da Matemática

A História da Matemática pode ser um potente auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, com a finalidade de manifestar de forma peculiar as idéias matemáticas, situar temporalmente e espacialmente as grandes idéias e problemas, junto com suas motivações e precedentes históricos e ainda enxergar os problemas do passado, bem como encontrar soluções para problemas abertos.

Para Valdés (2002) "Se estabelecermos um laço entre o aluno, a época e o personagem relacionado com os conceitos estudados, se conhecerem as motivações e dúvidas que tiveram os sábios da época, então ele poderá compreender como foi descoberto e justificado um problema, um corpo de conceitos, etc..."

A contribuição do Desenho Geométrico na formação da intuição matemática

Acredito que o desenho geométrico auxilia o aluno a criar estratégias de resoluções de problemas, embasadas em sua intuição, pois é mais fácil você intuir algo em função de uma noção geométrica de determinado fenômeno, do que intuir em cima de um abstração algébrica que não lhe permite nenhum modelo geométrico. A intuição matemática segundo Davis & Hersh (1995, p. 336-7), não é adquirida através da memorização de fórmulas verbais (decorar os passos de um teorema, por exemplo), mas através de experiências de resolução de problema. Estas experiências produzem representações mentais dos objetos matemáticos, as quais são comparadas e verificadas pelos matemáticos, professores e colegas, garantindo que pessoas diferentes tenham representações mentais congruentes sobre um mesmo conceito.

De acordo com Reis (2001, p. 52) "... a transição entre o pensamento matemático elementar para o pensamento avançado não significa, determinantemente, uma transição do pensamento intuitivo para o rigoroso. No terreno do ensino, o processo de desenvolvimento de um pensamento matemático mais avançado demanda atividades de significação de processos mentais, consideradas mais intuitivas, às quais precedem às atividades com definições e provas formais, por sua vez, mais rigorosas."

Creio que naturalmente possuimos uma intuição matemática que deve ser explorada pois o exercício desta habilidade faz com que nossos alunos progridam em suas descobertas com mais segurança, pois não devemos confundir uma intuição bem alicerçada com um palpite desvinculado de qualquer raciocínio lógico.

Atividades propostas

Previamente é passado aos ouvintes algumas transparências contendo os conceitos que serão mais usados. Entre os quais destacamos:
A definição de sementos proporcionais;
A definição de quarta proporcional;
A definição de terceira proporcional;
A definição de média geométrica;

Atividade 1)
Vamos dar um exemplo de como encontar geometricamente o segmento de tamanho x tal que x- $\sqrt{3a^2+2b^2}=0$, sendo conhecido geometricamente os segmentos a e b.

Resolução:
Observe que:

$$3a^2=(a\sqrt{3})^2$$
$$2b^2=(b\sqrt{2})^2.$$

Basta usarmos o fato de que x é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são $(a\sqrt{3})$ e $(b\sqrt{2})$. Para encontrarmos os segmentos $(a\sqrt{3})$ e $(b\sqrt{2})$, procedemos como segue:
É construída uma reta suporte t onde iremos apoiar os seguimentos. De posse do segmento a, construímos o segmento 4a sobre a reta suporte t , gerando o segmento AB. Traçamos uma reta s perpendicular a t passando pelo ponto P tal que o tamanho do segmento AP é igual ao tamanho do segmento a. Construímos um semi-círculo com centro no ponto médio de AB e diâmetro igual ao tamanho do segmento AB. Da intersecção do semi-círculo com a reta s temos o ponto C, e o tamanho do segmento CA é $(a\sqrt{3})$.

No caso de $(b\sqrt{2})$, basta construirmos dois segmentos perpendiculares de tamanho *b*, e então a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos cujo tamanho é *b* será $(b\sqrt{2})$.

O que fazemos agora é construir um triângulo retângulo cujos catetos são $(a\sqrt{3})$ e $(b\sqrt{2})$, e então a hipotenusa é o segmento procurado.

Atividade 2)
É proposto o seguinte desafio: Encontrar geométricamente os segmentos cujos tamanhos são soluções da equação $x^2 + 18x - 50 = 0$. Resolver uma equação do segundo grau geometricamente, consiste em exibir um segmento com o tamanho do valor absoluto das raízes da equação, no caso de raíz negativa, nos referimos ao tamanho do segmento como sendo o módulo da raíz. Problemas como este podem ser consequência de situações como a de um serralheiro que quer recortar uma chapa de ferro retangular para cobrir um móvel que possui 50cm^2 de área, e a diferença entre os lados não paralelos é de 18 cm.

O que estamos querendo explorar com isto é que a resolução algébrica deste problema é muito simples para o aluno que já tenha um conhecimento de equações do 2º grau, porém a solução algébrica do problema é dada por dois números irracionais, um dos quais é negativo e não faz sentido para o caso concreto, mas o outro será um número o qual não aparece nas fitas métricas, mas é um número que existe, é "real", e tem que haver um jeito de localizá-lo. A necessidade de solucionar este problema de maneira geométrica e não algébrica é devido ao fato de que queremos um molde para recortar esta chapa, e não uma simples medida escrita no papel sem o compromisso de ganhar "forma e tamanho".

Para que possamos resolver situações como esta e outras equivalentes teremos que passar por vários conceitos e teoremas matemáticos da Geometria plana e associá-los as construções geométricas, fazendo assim com que o aluno tenha que por em prática a teoria que muitas vezes ele pensa ser desassociada de todo o universo em que ele vive, mas que na verdade talvez ele não enxergue aplicações por não saber que tipos de questionamentos podem estar por vir na sua vida cotidiana.

Resolução da equação $x^2 + 18x - 50 = 0$.

Sabemos que neste caso, estamos procurando duas raízes cuja soma é -18 e o produto é -50. Do produto negativo concluimos que estas raízes possuem sinais distintos, e como a soma é negativa a raiz de maior módulo é negativa.

Estamos então em busca da solução do sistema

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -18 \\ x_1 . x_2 = -50 \end{cases}$; onde supondo que $|x_1| > |x_2|$, façamos a substituição

$|x_1| = \alpha$, para que o nosso problema envolva somente números positivos e possamos encontrar o tamanho dos segmentos que são soluções. Façamos a seguinte manipulação algébrica

$x_1 + x_2 = -18 \Rightarrow -x_1 - x_2 = 18 \Rightarrow \alpha - x_2 = 18$. Por outro lado a segunda equação fica $x_1 . x_2 = -50 \Rightarrow \alpha . x_2 = 50$. O que temos agora é um sistema que envolve apena números positivos descrito da seguinte forma

$\begin{cases} \alpha - x_2 = 18 \\ \alpha . x_2 = 50 \end{cases}$; ou seja, procuramos dois números cuja diferença é 18, e o produto é 50.

Para determinarmos estes dois segmentos faremos uso do seguinte teorema :

"Se de um ponto exterior a uma circunferência, traçamos uma tangente e uma secante, a tangente será a média geométrica entre a secante inteira e sua parte exterior".

Entendemos por média geométrica entre dois segmentos a e b o segmento x tal que $x = \sqrt{a.b}$.

Procedemos então da seguinte forma:

1) Em uma reta *s*, toma-se os pontos A e B, de tal forma que o tamanho do segmento AB é de 50cm..
2) Constrói-se a semi-reta segmento OB perpendicular ao segmento AB por B.
3) Toma-se sobre a semi-reta OB um ponto C tal que a medida do segmeto BC seja igual a 9cm, valor que é obtido ao dividirmos 18cm por 2, ou seja metade do valor da diferença entre as raízes.
4) Traça-se a reta AC.
5) Traça-se o semicírculo de centro C e raio CB.
6) Marcamos os pontos D e E, na intersecção entre a reta AC e o semicírculo de centro C e raio CB. .
7) Supondo a medida do segmento AD menor que a medida do segmento AE, temos que o segmento AD possui medida x_2 e o segmento AE possui medida α .

Considerações Finais

O que observamos com este tipo de atividade é que a gama de informações que está contida na mesma faz com que os alunos reflitam sobre a riqueza de propriedades que muitos conceitos geométricos possuem, e que muitas vezes o simples enunciado de um teorema não deixa isto claro. A motivação que é dada ao aluno busacando situações reais e concretas, serve para evitar a famosa pregunta "Para que que isto serve?" Porém, muitas vezes podemos explorar aplicações dentro da própria matemática, como por exemplo, ao invés de pensarmos em uma construção de um móvel ou algo semelhante, pensarmos na construção de um triângulo com algunas condições pré-estabelecidas. Situações como esta são fácilmente passadas para o concreto e auxiliam o aluno a visualizar a necessidade de uma teoria que explore propriedades e teoremas que justificam o que é possível e o que não é possível em Matemática. Este trabalho foi desenvolvido com o suporte técnico do Laboratório de matemática da Universidade Luterana do Brasil –ULBRA, e a biblioteca da Universidade Federal do Rio Grande do Sul -UFRGS.

Referências Bibliográficas

Calfa, H.G.; Barbosa,R.C.; Almeida,L.A.(1995). Desenho Gométrico Plano Volume 2. Rio de Janeiro, Brasil: Biblioteca do Exército.

Davis, Philip J.; Hersh, Reuben. (1995) A Experiencia Matemática. Lisboa: Gradita.

Reis, Frederico da Silva. A Tensão entre o rigor e a Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão dos profesores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Campinas: UNICAMP, 2001. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2001. Disponível em: http://www.libdigi.unicamp.br/documet/?code=vtls000220294 . Acesso em:05 jun. 2004.

Rezende, E. y Queiroz, M. (2000). Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas. Campinas, Brasil: UNICAMP.

Valdés, J., Nápoles, E. (2002). La História como elemento unificador em lá Educación Matemática. Argentina, (texto digitado).