

ENSEÑANZA EXPERIMENTAL DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL Y LA REPRESENTACIÓN COGNITIVA DEL NÚMERO

Susana Andrade Neyra y Marta Elena Valdemoros Álvarez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
sandrade@cinvestav.mx, mvaldemo@cinvestav.mx

México

Resumen. Nos referimos a una investigación en curso en la que abordamos el sistema de numeración decimal, en particular el valor posicional, desde la perspectiva del aprendizaje y de la enseñanza. La primera fase de esta investigación se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de primer grado de 6 años de edad, en una escuela primaria pública de Jalisco, México, antes de que recibieran instrucción en torno al valor posicional. En este artículo nos enfocamos a la representación mental del número que tienen los niños antes y después de una enseñanza experimental orientada a mejorar su comprensión del valor posicional.

Palabras clave: valor posicional, representación cognitiva del número

Abstract. We refer to a current research in which we approach the decimal numeration system, in particular place value, from the perspective of learning and teaching. The first phase of this research was conducted with a first grade group of 6 years old students at a public elementary school of Jalisco, Mexico, and before students received any instruction about place value. In this article we focus on the mental representation of number what children have before and after an experimental teaching oriented to improve their understanding of place value.

Key words: place value, cognitive representation of number

Introducción

El sistema de numeración decimal ocupa un lugar trascendental en la educación primaria, es abordado a lo largo de los seis años escolares y su conocimiento es necesario para entender muchas de las ideas matemáticas contenidas en los programas de estudio. A su vez, un componente clave del sistema de numeración decimal es el valor posicional, su comprensión favorece el desarrollo del sentido numérico, las habilidades de cálculo mental y estimación, y permite comprender las operaciones con multidígitos (Ross y Sunflower, 1995). Sin embargo, “es un concepto altamente sofisticado que no es realmente comprendido por muchos niños aún al final de su educación primaria” (Thompson, 2000, p. 292).

Los anterior, se hace evidente en un estudio previo (Andrade, 2009) donde observamos que alumnos de sexto grado de primaria no logran escribir numerales de tres dígitos, aun cuando los mismos son introducidos desde segundo grado, y confunden el valor asociado a los dígitos de acuerdo a su posición. Por ejemplo, un alumno escribe 3003 para 330 y otro señala que 450 son “4 unidades y 5 decenas”.

Por lo antes expuesto, estamos desarrollando una investigación en la que abordamos el valor posicional desde la perspectiva de la enseñanza y del aprendizaje. Por un lado, planteamos la implementación de una enseñanza experimental encaminada a favorecer la comprensión del sistema de numeración decimal, en particular del valor posicional, de los estudiantes de primer

grado de educación primaria. Asimismo, haremos un seguimiento del desarrollo de la comprensión del valor posicional por parte de los estudiantes así como de las dificultades que presenten al abordar este contenido.

En esta investigación, una de las cuestiones que analizamos es la *representación cognitiva del número* ya que de acuerdo a Miura, Okamoto, Kim, Steere y Fayol (1993), este constructo está fuertemente relacionado al valor posicional.

Marco Teórico

Existen diversos factores asociados a las dificultades en la comprensión del valor posicional, uno de ellos es el lenguaje, en diversos estudios (Cotter, 2000; Beauford y Browning, 2007; Miura et al., 1993) se enfatiza la mayor correspondencia existente entre el sistema de numeración escrito y oral de los lenguajes asiáticos, lo cual puede influir en el mejor desempeño matemático de los estudiantes asiáticos en estudios internacionales. Miura et al. (1993) observan que la comprensión del valor posicional puede estar influenciada por las características del lenguaje numérico de los niños, y señalan que “aprender a contar en un lenguaje asiático parece promover una comprensión del número que es congruente con el tradicional sistema de numeración de base 10, y esto, puede proporcionar las bases para hacer aritmética fundamental relativamente simple” (p. 29).

Miura y sus colegas también observan que aun cuando diversos estudios han atribuido a factores sociales y experiencias escolares las diferencias a favor de los estudiantes asiáticos, éstas ya están presentes desde el primer grado, antes que la enseñanza u otras cuestiones asociadas a la escuela puedan dar razón de las mismas.

Otra cuestión relacionada a las dificultades en la comprensión del valor posicional es la propia enseñanza. Terigi y Wolman (2007) argumentan que la enseñanza habitual del sistema de numeración decimal impide a los estudiantes su comprensión. El retrato que hacen de esta enseñanza es presentar los numerales de uno por vez, establecer cortes según el grado escolar, la explicitación del valor posicional, la utilización de recursos didácticos que muestran el sistema de numeración como si fuera un sistema aditivo, y la conceptualización de unidades y decenas como un paso necesario para el aprendizaje de los algoritmos convencionales.

Por otra parte, hay quienes consideran que el concepto de valor posicional se introduce prematuramente, por ejemplo, Kami (1992) señala que es necesario que el niño comprenda el sistema de unidades antes de poder comprender el de decenas, el cual se construye entre el segundo y quinto grado de primaria, por lo que considera que no es posible esperar que un niño de primer grado comprenda el valor posicional.

Entre las investigaciones que evidencian lo anterior, podemos citar la de Ross (1986) quien entrevista a estudiantes de segundo a quinto grado y en una de las tareas de *correspondencia de dígitos*, a través de la cual se explora el significado que los niños atribuyen a los dígitos de un numeral multidígito, les presenta una colección de 25 palitos de madera, les pide contarlos y escribir el numeral que corresponde al total de palitos. Posteriormente, les pregunta si cada parte del numeral, tiene algo que ver con el número de palitos que tienen. El resultado es que todos los niños del estudio son capaces de determinar y escribir el numeral correctamente, sin embargo, no es sino hasta cuarto grado que la mitad de los niños demuestra que sabe que el “5” representa cinco palitos y el “2” representa veinte.

Considerando las cuestiones asociadas a las dificultades de los estudiantes en la comprensión del valor posicional, diversos estudios han propuesto enfoques alternativos en su tratamiento didáctico. Entre ellos, se encuentra un proyecto de investigación realizado en Australia (Association of Independent Schools of South Australia, 2004), cuyo objetivo fue mejorar el aprendizaje de los estudiantes con relación al sistema de numeración decimal a través de un juego denominado *el juego de base diez*, el cual consiste en tirar dos dados, sumar los puntos obtenidos y colocar la misma cantidad de palitos de madera en un tablero que contiene las columnas de valor posicional. La regla del juego es que no puede haber más de nueve ítems en cualquier columna (Pengelly, 1991). Como resultado de la implementación de este juego, los estudiantes desarrollaron una comprensión de la estructura del sistema de numeración y aprendieron a operar con números utilizando esta estructura.

Es importante observar que la agrupación de palitos de madera como se realiza en *el juego de base diez*, también es sugerida por otros investigadores para trabajar estructuras matemáticas. Por ejemplo, Resnick y Ford (1990) ilustran cómo pueden ser utilizados para comprender las estructuras matemáticas subyacentes al sistema de numeración y al algoritmo de la adición con transformación.

Por otra parte, en la enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración, la introducción de diferentes bases numéricas, en particular bases pequeñas, representa diversas ventajas de acuerdo a Vergnaud (1991): la formación de agrupamientos de segundo y tercer orden no representa una dificultad en comparación con la base 10 puesto que la cantidad de objetos a manejar es menor y las reglas del sistema de numeración son esencialmente las mismas en todas las bases.

Vergnaud (1991) también señala que la enseñanza del sistema de numeración debe tener por objeto que el estudiante comprenda el paralelismo entre las operaciones sobre los objetos y los conjuntos, y las operaciones sobre los símbolos numéricos. En el caso del sistema de numeración

decimal, es importante que el estudiante logre establecer una relación entre los objetos y la cifra de las unidades; entre la agrupación de objetos en paquetes de diez y la cifra de las decenas; entre los paquetes de diez paquetes de diez y la cifra de las centenas, etc.

Por su parte, Dienes (1981) sugiere introducir distintas bases de numeración a través de juegos de agrupamientos y del uso de material estructurado como los bloques multibase, con el propósito de favorecer la comprensión de la numeración y la noción del valor posicional de los estudiantes.

Las cuestiones antes expuestas en el Marco Teórico dan sustento y han servido para orientar nuestra investigación como podemos apreciar a continuación.

Método

La primera fase de esta investigación, la experiencia piloto, se llevó a cabo durante los meses de enero y febrero de 2013 en un grupo de primer grado de una escuela primaria pública de Jalisco, de una zona socioeconómica baja. El grupo estaba constituido por 13 alumnos, cuyas edades promediaban 6.4 años.

Los instrumentos metodológicos aplicados durante esta fase de la investigación fueron: entrevista inicial, enseñanza experimental y entrevista final. A través de las entrevistas, se exploró la comprensión del valor posicional de los estudiantes antes y después de la enseñanza experimental, la cual estuvo orientada a favorecer su comprensión del valor posicional.

Las entrevistas, inicial y final, fueron semiestructuradas e individuales. Ambas entrevistas incluyeron las siguientes tareas: a) *Representación cognitiva del número* (Miura et al., 1993), b) *Correspondencia de dígitos* (adaptada de Kamii y Joseph, 1988; Ross, 1986), c) *Noción posicional* (Ross, 1986), d) *Sumas y restas* y e) *Comparación de números*. En la entrevista final, además, incorporamos numerales de tres cifras pues uno de nuestros propósitos era que los niños pudieran transitar de los numerales de dos cifras a los a los numerales de tres cifras.

En el presente reporte nos enfocamos a la tarea *representación cognitiva del número* de Miura et al. (1993), a través de la cual se busca conocer la representación mental que tiene el niño del número, representación que está asociada a la comprensión del valor posicional de acuerdo a estos investigadores.

La enseñanza experimental, por su parte, se realizó en 18 sesiones de 45 minutos cada una aproximadamente, ésta estuvo orientada a mejorar la comprensión de los estudiantes del valor posicional. Lo que caracterizó a dicha enseñanza fue una breve introducción de las bases numéricas 4, 5 y 6, previa utilización de la base 10, con el propósito de facilitar el tránsito a la

base 10 de nuestro sistema de numeración; así como el tránsito continuo entre diferentes representaciones: concreta y manipulativa, escrita y oral.

El escenario de la enseñanza experimental fue una adaptación del *juego de base diez* presentado por Pengelly (1991), el cual ha sido descrito en el Marco Teórico. La adaptación de este juego consistió en trabajar diferentes bases numéricas, como lo han hecho otros investigadores.

Una de nuestras aportaciones, fue enriquecer el *juego de base diez* mediante el uso de un ábaco cuya peculiaridad fue que las primeras cinco cuentas de cada columna eran de diferente color con el propósito de facilitar el reconocimiento de las cantidades (Cotter, 2000). Este ábaco estaba compuesto por tres barras con 20 cuentas cada una, lo que simularía un ábaco abierto, y de manera experimental decidimos que dos niños utilizaran un ábaco con dos barras para el primer orden, dos barras para el segundo orden y una barra para el tercer orden, con el propósito de facilitar el intercambio de unidades: diez por uno o en su caso uno por diez (diseño propio).

Análisis de resultados preliminares

La tarea de las entrevistas inicial y final que abordaremos se refiere a la *representación cognitiva del número*, a través de la cual se busca conocer la representación mental que tiene el niño del número (Miura et al., 1993). El término *representación cognitiva del número*, es utilizado por Miura et al. (1993) para referirse a la imagen mental del número que tiene el niño -una colección de objetos individuales o bien grupos de diez y unos. Para su exploración, dado que no es accesible de modo directo, se pide al niño construir números utilizando bloques de base diez.

En esta tarea, se presentó a los estudiantes bloques de base diez y se mostró, con su participación, la equivalencia entre diez bloques unitarios y un bloque de diez unidades. Enseguida, les comentamos que con estos bloques podíamos mostrar cantidades, ejemplificamos la representación de un número menor a diez y los invitamos a representar dos números menores a diez.

Posteriormente, presentamos en una hoja el numeral 28 a los estudiantes y les pedimos que lo representaran utilizando los bloques que desearan. Estuvieron a su disposición suficientes bloques unitarios y bloques de diez unidades de tal manera que podían utilizar solamente bloques unitarios si así lo deseaban. La misma tarea se realizó con los numerales 30, 42 y 13. En la entrevista final, además, se incluyó la representación del numeral 249, por lo que bloques de cien unidades estuvieron a disposición de los estudiantes. Previa representación, se les invitó a determinar el valor de un bloque de cien unidades apoyándose de la equivalencia entre un bloque de cien unidades y diez bloques de diez unidades.

En la entrevista inicial, encontramos que la tendencia de la mayor parte de los niños fue utilizar bloques unitarios para representar los números, lo que Miura et al. (1993) llaman *colección de uno a uno*. Por ejemplo, representaron el número “42” utilizando 42 bloques unitarios (Figura 1). Es decir, su representación mental del número no reflejaba la estructura del sistema de numeración decimal, lo cual puede dificultar su comprensión.



Figura 1: Representación cognitiva del número “42” en la entrevista inicial



Figura 2: Representación cognitiva del número “42” en la entrevista final.

Después de la enseñanza experimental, encontramos un cambio muy importante en los resultados obtenidos en esta tarea: 8 de los 11 niños entrevistados utilizaron una *representación canónica de base diez* para todos los números, es decir, emplearon en su caso, bloques de cien, bloques de diez y bloques unitarios de acuerdo a la posición de los dígitos. Por ejemplo, representaron el número “42” utilizando 4 bloques de diez y 2 bloques unitarios (Figura 2).

Lo anterior puede indicar que para los 8 niños que utilizaron una *representación canónica de base diez* “los números están organizados como estructuras de dieces y unos, y el valor posicional está fuertemente . . . relacionado a esas representaciones” (Miura et al., 1993, p. 29).

Respecto a los tres niños que no utilizaron en todos los casos una *representación canónica de base diez*, uno de ellos representó el primer número, 28, con bloques unitarios, para el siguiente número, 30, utilizó 3 bloques de diez y a partir de esta representación continuó utilizando bloques de cien, bloques de diez y bloques unitarios de acuerdo a la posición de las cifras de los numerales que se le pidieron representar.

El segundo de estos tres niños no conocía la mayor parte de los numerales de dos y tres cifras que se le presentaron, los veía como dígitos individuales concatenados (Fuson, Smith y Lo Cicero, 1997), por ejemplo dijo que 28 “es el dos y el ocho”. Aun cuando se le apoyó a leer el numeral, esto no resultó de ayuda pues al no conocer los números presentados no logró representarlos.

En el caso de 28 mostró 4 barras que contó “10, 20, 30, 50”, se le recordó que pedimos mostrar el 28 y entonces tomó 8 barras que contó como 90, como podemos apreciar también tenía dificultad para contar de diez en diez. Finalmente mostró 8 cubos, sin lograr representar el número 28 indicando que no lo conocía. Este niño solamente logró representar el 30 con 3 bloques de diez y el 13 con 13 bloques unitarios, en ambos casos se le apoyó diciendo los

números que pedimos representar pues como señalamos los veía como dígitos individuales concatenados.

El tercer niño se inclinó a una *representación canónica de base diez*, sin embargo, al igual que el niño anterior no conocía varios de los numerales presentados. Este niño invirtió los numerales en algunos casos, 28 dijo que era “ochenta y dos”, o bien los leyó por segmentos, 249 como “veinticuatro y nueve”. Después de que se le apoyó leyendo el numeral que se le pedía mostrar, su representación reflejaba su dificultad para contar de diez en diez, por ejemplo, para representar 30, tomó bloques de diez que empezó a contar: “10, 50”, entonces se le apoyó y contó: “10, 20, 50”, una vez más se le ayudó en el conteo y mostró tres bloques de diez para 30.

Finalmente, es interesante observar que en la entrevista final el 83.6% de las construcciones de los niños que participaron en la primera fase de esta investigación correspondieron a una *representación canónica de base 10*, mientras que en el estudio de Miura et al. (1993), en esta categoría se reportaron 8.3% y 96.7% de construcciones de niños norteamericanos y japoneses respectivamente.

Conclusiones

En la primera fase de esta investigación se logró que los estudiantes de primer grado de primaria tuvieran una comprensión inicial del valor posicional a través de la enseñanza experimental que llevamos a cabo. Esto se evidenció con los resultados obtenidos en la en la tarea de *representación cognitiva del número* (Miura et al., 1993) que presentamos. Tarea en la que la mayor parte de los niños utilizaron una *representación canónica de base diez*, es decir, emplearon bloques de cien, bloques de diez y bloques unitarios de acuerdo a la posición de los dígitos, representación que de acuerdo a Miura y sus colegas (1993) está estrechamente relacionada a la comprensión del valor posicional.

Como lo señala Ross (1986), una comprensión del valor posicional puede ser sustentada en diferentes niveles, por ejemplo, puede incluir la comprensión de algoritmos, de la notación escrita, de unidades y decenas, etc., por lo que resulta necesario analizar los resultados obtenidos en todas las tareas que constituyeron las entrevistas y también es muy importante establecer si existen relaciones entre los resultados de las mismas.

En esta investigación se ha evidenciado que el valor posicional es un concepto sumamente complejo, concepto que los estudiantes construirán a lo largo de toda su educación primaria.

Referencias Bibliográficas

- Andrade, S. (2009). *El conocimiento matemático para la enseñanza. Un estudio con maestros de educación primaria*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Association of Independent Schools of South Australia (2004). *Understanding place value: A case study of the base ten game*. Canberra: Dept. of Education, Science and Training.
- Beauford, J. y Browning, S. T. (2007). *The Effects of the Use of Explicit Number Names on Mathematical Understanding and Performance*. Ninth International Conference: Mathematics Education in a Global Community, Charlotte, North Carolina.
- Cotter, J. (2000). Using language and visualization to teach place value. *Teaching Children Mathematics*, 7 (2), 108-114.
- Dienes, Z. P. (1965/1981). El número y el origen de su notación. En *La matemática moderna en la enseñanza primaria* (7ª. Edición), (A. Buj Gimeno, trad.), pp. 39-63. Barcelona: Teide.
- Fuson, K. C., Smith, S. T. y Lo Cicero, A. M. (1997). Supporting Latino first graders' ten-structured thinking in urban classrooms. *Journal of Research in Mathematics Education*, 28(6), 738-766.
- Kamii, C. (1992). Valor de la posición y la adición en doble columna. En *Reinventando la aritmética II*. (pp. 35-51). Madrid: Visor.
- Kamii, C. y Joseph, L. (1988). Teaching place value and double-column addition. *Arithmetic Teacher*, 35(6), 48-52.
- Miura, I. T., Okamoto, Y., Kim, C. C., Steere, M. y Fayol, M. (1993). First grader's cognitive representation of number and understanding of place value: Cross - national comparisons - France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *Journal of Educational Psychology*, 85(1), 24 - 30.
- Pengelly, H. (1991). *Base ten: understanding the structure of the number system*. Sydney: Ashton Scholastic.
- Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1990). La enseñanza de las estructuras de las matemáticas. En *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. (pp. 127-156). Madrid: Paidós.
- Ross, S. H. (1986). *The development of children's place-value numeration concepts in grades two through five*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

- Ross, S. H. y Sunflower, E. (1995). Place value: problem-solving and written assessment using digit-correspondence task. Paper presented at the Annual Meeting of the NCTM, San Diego.
- Terigi, F. y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 59-83.
- Thompson, I. (2000). Teaching place value in the UK: time for a reappraisal? *Educational Review*, 52(3), 291-298.
- Vergnaud, G. (1991/2003). La numeración y las cuatro operaciones. En *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (8ª Reimpresión), pp. 135-159. México: Trillas.