Teselados en el club de matemáticas

Magda Pilar Angel Ruiz
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
magdispilis1@yahoo.com

William Alfredo Jiménez Gómez
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
williamajg@hotmail.com

Sandra Milena Rojas Tolosa
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
rojastolosa@yahoo.com.ar

Nestor Zambrano
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
nefazaca@yahoo.es

Lyda Constanza Mora Mendieta
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
lmendieta@pedagogica.edu.co

Resumen

Cuando se habla de teselados por lo general se suelen relacionar con embaldosados del plano empleando polígonos regulares o algunas figuras construidas a partir de deformaciones de éstos polígonos; el curso titulado Matemática y Arte I, ofrecido en el club de Matemáticas de la UPN en el primer semestre del 2006, no fue ajeno a esto, sin embargo, se produjeron también resultados de interés en relación con la construcción de teselados duales y teselados construidos con polígonos irregulares. Los resultados que se presentan corresponden a los obtenidos por los niños y jóvenes que participaron del curso y orientados por los autores de esta memoria.

Introducción

El Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional es un espacio que promueve el estudio de las matemáticas en niños, niñas y jóvenes que han demostrado interés por ellas, a través de la implementación de actividades propuestas por maestros del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y maestros en formación que cursan práctica educativa, uno de los cursos que se ofreció en el Club, se tituló *Matemática y Arte* e inició en el segundo semestre de 2006, en tal periodo se trató la temática *Teselados* (conocidos también como embaldosados o recubrimientos), con el fin de hacer un primer acercamiento a las matemáticas que se pueden encontrar en estos diseños, con los niños y jóvenes que participaron en este curso, de manera elemental. Se inició con la construcción de teselados a través de la exploración intuitiva, de tal manera que los estudiantes, a partir de algunos ejemplos, dedujeran las características esenciales de los mismos, para abordar enseguida una posible clasificación: teselados regulares, semirregulares, demirregulares, duales e irregulares.

Algunos productos obtenidos por los estudiantes del curso fueron: la notación para teselados, combinaciones lineales para determinar todos los teselados semirregulares que se pueden construir, método de construcción y obtención de teselados con polígonos irregulares, que no son desarrollados en detalle en los textos usuales, o por lo menos, en los consultados.

Desarrollo de la temática

Junto con los estudiantes se definió como teselado a *un recubrimiento del plano con figuras (polígonos principalmente), de tal manera que ninguna porción del plano queda sin cubrir y ninguna queda cubierta dos o más veces*; para determinar con qué figuras planas era posible teselar se conjeturó lo siguiente:

Enunciado de los 360^o*: En un teselado "T"borde con borde*[1] *la suma de los ángulos de los polígonos que concurren en un vértice es* 360^o.

Los integrantes del curso plantearon argumentos para este enunciado y en relación con éste se dedujo que los únicos polígonos regulares que teselan el plano son: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono, puesto que son sólo estos polígonos los que poseen ángulos internos cuya medida son números divisores de 360^o. En la Figura 1 se ilustran los teselados construidos con estos polígonos regulares con su respectiva notación; el número que está entre paréntesis representa el número de lados del polígono y el número que lo acompaña representa el número de polígonos que concurren en un mismo vértice.

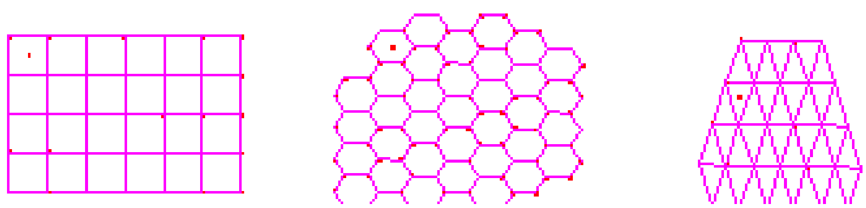


Figura 1. Teselados Regulares

Así mismo, el *Enunciado de los* 360^o permitió determinar cuáles teselados se pueden construir con dos o más polígonos regulares, dentro de éstos se encuentran dos tipos de teselados, que dependen de su configuración (por configuración se entenderá la conformación de los polígonos que concurren en un vértice, se decidió tener en cuenta un sentido para el cual se eligió aquel en el que giran las manecillas del reloj); el primer tipo son los *teselados semiregulares* cuya configuración es la misma en todos sus vértices y, el segundo son los *teselados demiregulares*, cuya configuración no es la misma en todos sus vértices. En las Figuras 2 y 3 se ilustran algunos ejemplos de estos diseños.

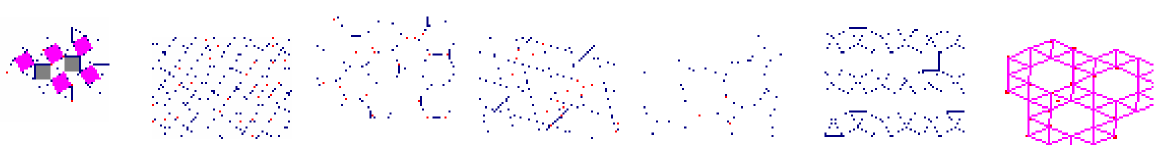


Figura 2. Teselados Semiregulares

Estos dos tipos de teselados, semirregulares y demirregulares, son los que se construyen a partir de polígonos regulares, lo cual se podría considerar como un método de construcción.

[1]Un teselado es borde con borde si cada lado de la(s) figura(s) usada(s), es lado común de dos polígonos adyacentes.

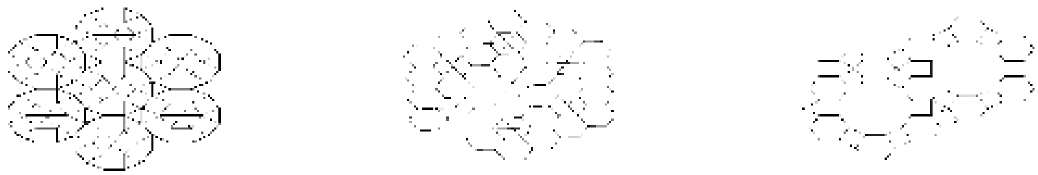
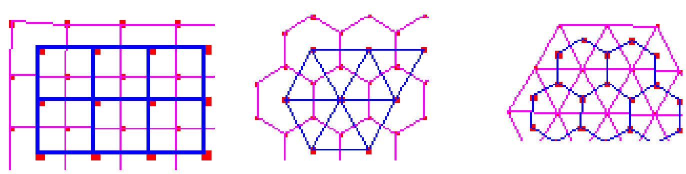


Figura 3. Teselados Demiregulares

Otro método consiste en construir *teselados duales.* Los *teselados duales* se obtienen uniendo los centros de cada uno de los polígonos regulares que conforman un teselado, ya sea semirregular o demirregular -en adelante se designarán teselado base-, esta unión debe cumplir algunas reglas, las cuales se explicitan en la definición que se presenta a continuación:

El dual principal[2] *de un teselado T es el conjunto de polígonos formados por las líneas poligonales cerradas de vértices* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *alrededor de un solo vértice del teselado T, donde A es centro de cada polígono regular de T.*

Con base en esta definición, los duales principales de los teselados regulares son:



En la *Figura 4* se presenta la construcción y notación inicialmente propuesta para los duales principales de los teselados semiregulares.

Así como se decidió una notación para los teselados semiregulares y demiregulares, fue necesario determinar una notación para los duales principales construidos; no obstante, se encontró que esta notación debía ser más detallada puesto que hay varios duales que están compuestos de cuadriláteros y pentágonos con diferentes características, por ejemplo. Dichas características se obtienen a partir de algunas relaciones geométricas del teselado base y su respectivo dual, en la *Figura 5* se presenta, a manera de ejemplo, la notación para el dual del teselado semiregular 2(3)-4-3-4, donde el número que está entre paréntesis indica el número de lados del polígono que compone el teselado y la letra que lo acompaña indica la característica de dicho polígono (irregular (i)), además de las características de los lados del polígono.

Junto con los niños se establecieron las medidas de los ángulos internos de los polígonos que conforman los duales principales y las relaciones entre sus lados, sólo basados en las características de los teselados base.

A partir del estudio de los duales principales de los teselados semi y demiregulares se observó que era posible teselar con polígonos irregulares. Con bases en la observación y el cuestionamiento sobre estos teselados se llegó a los siguientes resultados, argumentados por los

[2]Es posible generar otros teselados duales ampliando la definición si no se considera, por ejemplo, que los vértices de los nuevos polígonos deben ser todos centros de algún polígono del teselado base.

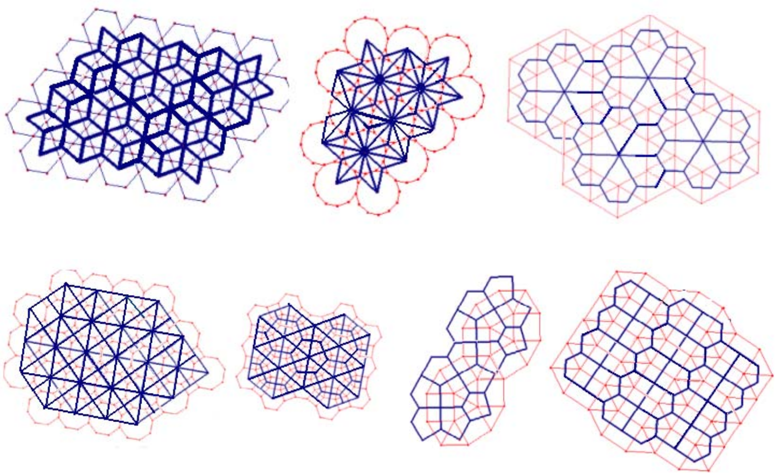


Figura 4. Duales principales de los teselados semiregulares

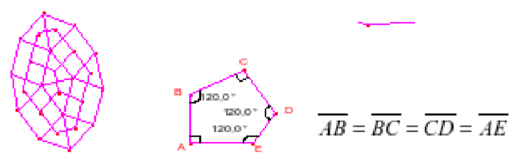


Figura 5. Notación para un dual principal

integrantes del curso (la versión completa de esta descripción puede hallarse en el menú archivos en http://clubmatupn.6te.net):

Todo cuadrilátero tesela el plano por lo menos en un teselado borde con borde.(Figura 5)

Todo triángulo tesela el plano por lo menos en un teselado borde con borde.

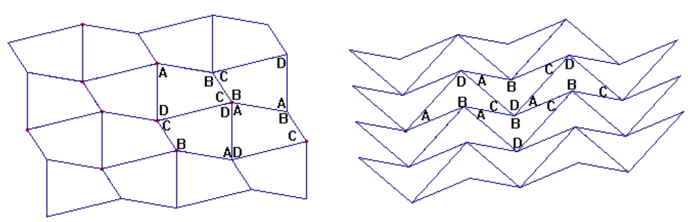


Figura 6. Teselados con cuadriláteros

Todo pentágono con un par de lados paralelos tesela el plano. (Figura 6)

Este último enunciado se refiere sólo a un tipo de pentágonos, sin embargo hay más tipos de pentágonos que teselan el plano dos de estos se pueden inferir de la construcción de los duales principales de los teselados semirregulares 2(3)-4-3-4 y 4(6)-6, *Figura 7.* En las *Figuras 8 y 9* se presentan otros métodos para obtener más pentágonos que teselan el plano.

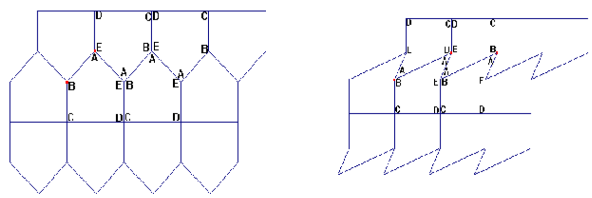


Figura 7. Teselados con pentágonos de lados paralelos

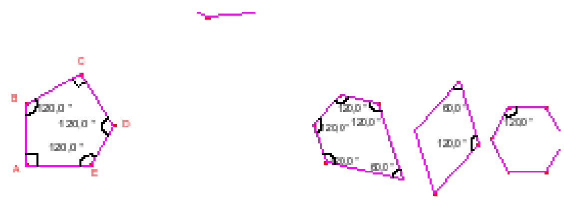


Figura 8. Otros pentágonos que teselan el plano

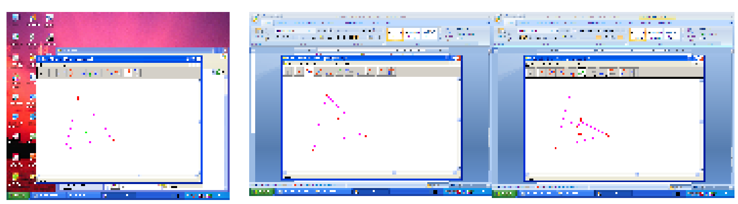


Figura 9. Obtención de un tipo de pentágonos que teselan el plano a partir de un triángulo

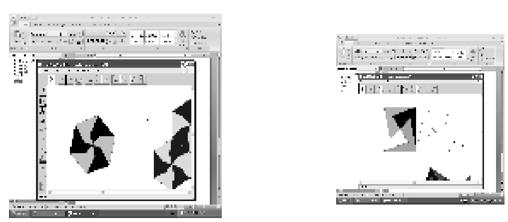


Figura 10. Pentágonos que teselan el plano a partir de un cuadrado y un hexágono regular

Respecto a hexágonos y heptágonos irregulares, se conjeturó lo siguiente:

Sólo existen tres tipos de hexágonos que teselan el plano.

Ningún heptágono convexo tesela el pleno borde con borde.

No obstante, se hallaron dos heptágonos no convexos con los cuales es posible teselar el plano, a continuación se presentan sus gráficos[3].

[3]Estos ejemplo fueron construidos por Omar Zambrano (12 años), estudiante del curso de Matemática y Arte I.

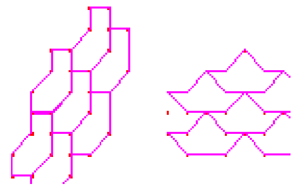


Figura 11. Teselados con heptágonos no convexos

Esto fue sólo un abrebocas de lo provechoso que puede resultar el estudio de temáticas como éstas, al alcance de estudiantes de la secundaria y que poco se abordan en el currículo usual. Invitamos a los maestros a incluirla en sus contenidos, es un camino oportuno para el estudio de propiedades de polígonos y el desarrollo de procesos matemáticos como descubrir, visualizar, representar (construir una notación), conjeturar y argumentar. Consideramos que, quizás, la condición primordial para hallar resultados de interés (tanto para maestros como estudiantes) en nuestras aulas de matemáticas es contar con estudiantes motivados para el estudio de esta bella ciencia.

Bibliografía

[1] ALCOCER, J., GUTIÉRREZ, A., JAIME, A., MUELAS, R. & SÁNCHEZ, M. (1989). *Introduciendo los giros del plano en EGB*. SUMA, 2, 55-59.

[2] ALSINA, C., PERÉZ, R. (1981). *Simetría dinámica.* Editorial Síntesis. Madrid.

[3] BERMEJO, A. (1991). *Movimientos en el plano y mosaicos.* SUMA, 9, 111-120.

[4] CALLEJO DE LA VEGA, M. (1998). *Un Club Matemático para la diversidad.* Madrid: Nancea.

[5] FERNÁNDEZ, M. (2000). *Mosaicos mediante particiones regulares del plano.* Epsilon, 46 y 47, 117-126.

[6] FONT, V. (2002). *Mosaicos y poliedros regulares. Un punto de vista funcional.* Epsilon, 53(18), 297-303.

[7] GORGORIÓ, N., ARTIGUES, F., BANYULS, F., MOYANO, D., PLANAS, N., ROCA, M. & XIFRÉ, A. (2000). *Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones.* SUMA, 33, 59-71.

[8] GUTIÉRREZ, A. (1990). *Los cubrimientos de M. C Escher como material didáctico en la enseñanza de las isometrías.* Valencia. Extraído el 15 de febrero, 2007 del sitio web: http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut90a.pdf

[9] GUTIÉRREZ, A., JAIME, A. (1986). *Traslaciones, giros y simetrías en el plano.* EU. Valencia.

[10] HURTADO, M., ISRAEl, A. (2000). *Traslaciones, giros y simetrías.* Epsilón, 48(16), 225-231.

[11] LLINARES, S., SANTALÓ & otros. *La enseñanza de las matemáticas. Perspectivas, tareas y organización de la actividad. En, S. Llinares, La enseñanza de las matemáticas en educación intermedia* (pp. 249-295).

[12] MALKEVITCH, J., MEYES, R. & MEYER, W. (1999). *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Ed. Addison-Wesley. Madrid.

[13] MARIÑO, R. (2004). *La geometría en el arte y el diseño.* Ed. Universidad Nacional de Colombia.

[14] MONTERO, J. (1991). *Movimientos en el plano y mosaicos.* SUMA, 9, 53-57.

[15] SALGUERO, F. (2006). *Teselaciones periódicas, aperiódicas y especiales.* SUMA, 14 y 15, 27-34.

[16] DUVAL, Raymond. *Argumentar , demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?.* Grupo Editorial Ibérica. 1999.

[17] Página de Internet:
htpp//www.lettredelapreuve.it/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html.