Geometría dinámica: desde otro ángulo la geometría del ángulo

Carmen Samper
Profesora Titular
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
csamper@pedagogica.edu.co

Patricia Perry
Investigadora
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
pperryc@yahoo.mx

Óscar Molina
Profesor Ocasional
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
ojmolina@pedagogica.edu.co

Armando Echeverry
Profesor Ocasional
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
aecheverri@pedagogica.edu.co

Leonor Camargo
Profesora Asociada
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co

Resumen

En el presente escrito presentamos una propuesta para el tratamiento didáctico de elementos teóricos de la geometría euclidiana relacionados con propiedades de los ángulos, en un curso de universitario de geometría plana. Incluimos los enunciados de cinco problemas que usualmente formulamos a nuestros estudiantes, uno a uno, en el orden en que se exponen aquí, añadimos información que ayuda a comprender la intencionalidad de la propuesta y explicamos cómo usar las so-luciones dadas por ellos, que se basan en los conocimientos previos o en ideas intuitivas que poseen, para generar *sistemas axiomáticos locales* que entran a formar parte de una organización deductiva más amplia, en construcción.

Contextualización de la propuesta didáctica

La propuesta se ciñe a los fundamentos teóricos que han guiado las investigaciones en torno a problemáticas relacionadas con la actividad demostrativa (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006; Camargo, Samper y Perry, 2006) y el uso de la geometría dinámica, como herramienta de mediación para el aprendizaje de la demostración (Camargo, Samper y Perry, 2007), desarrolladas por el grupo de investigación $\text{Æ} \cdot \mathcal{G}$ [1].

Desde nuestro punto de vista, a través de la actividad matemática desarrollada en torno a tareas que se proponen relacionadas con un determinado objeto geométrico –los ángulos, en el caso que

[1]El grupo de investigación $\text{Æ} \cdot \mathcal{G}$, *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, de la Universidad Pedagógica Nacional, está conformado en la actualidad por Carmen Samper, Leonor Camargo, Patricia Perry, Armando Echeverry y Óscar Molina.

nos ocupa– los estudiantes logran una apropiación de lo que significa una organización deductiva de la geometría relacionada con dicho Esas tareas, en las que aprovechamos la mediación de la geometría dinámica, impulsan a acciones como: (i) la exploración de propiedades geométricas, búsqueda de regularidades y solución de problemas, (ii) la formulación de conjeturas, (iii) la práctica de la justificación colectiva de hechos geométricos, y (iv) la organización de las justificaciones en demostraciones. Este tipo de acercamiento permite que los estudiantes establezcan conexiones entre las formas empírica y teórica de trabajar en geometría y puedan participar activamente en la construcción y desarrollo del contenido del curso (de Villiers, 2004), conformando una comunidad de práctica (Wenger, 2001) cuyo objetivo es aprender a demostrar. Esto es posible porque desde el comienzo del curso, el profesor explicita y vela por el cumplimiento de normas sociales relacionadas con la participación de los estudiantes en la actividad matemática desarrollada en el curso (i.e., *es necesario escuchar a los compañeros; se debe respetar el uso de la palabra; toda contribución es importante; la participación es esencial para generar ideas útiles, aunque sean erróneas, no apropiadas para el problema en cuestión o apropiada*) y de normas sociomatemáticas relacionadas con la validación del conocimiento matemático que circula en la clase (i.e., *dar el por qué de toda afirmación que se haga o usar en las demostraciones sólo aquellas afirmaciones que se han validado dentro del sistema*). Vale la pena aclarar la última norma social por su importancia en la dinámica desarrollada. En el primer caso, aun cuando sean erróneas las ideas sirven para hacer las aclaraciones necesarias, en el segundo, si no son apropiadas, actúan como catalizadoras de otras ideas que se acercarán más a las necesitadas, y en el tercer caso, son precisamente aquellas que permiten resolver la tarea. En un contexto de tal naturaleza, tanto el profesor como los estudiantes contribuyen a la constitución interactiva de situaciones que invitan a demostrar y se enfrentan a ellas como eventos de carácter social e individual (Goos, 2004; Graven, 2004; Martín y Mc Crone, 2005; Mariotti, 2000).

Admitimos como presupuesto teórico que la mediación instrumental tiene efecto sobre el aprendizaje. En particular, reconocemos la influencia de los programas de geometría dinámica en el aprendizaje de la demostración en geometría. Admitimos, como lo señalan diversos estudios (Hadas, Hershkowitz, y Schwarz, 2000; Jones, 2000; Laborde, 2000; Mariotti, 2000; Marrades y Gutiérrez, 2000; Healy y Hoyles, 2001; Arzarello, Olivero, Paolo y Robutti, 2002) que el uso de programas como Cabri, asociado a tareas que buscan favorecer actividades matemáticas tales como la producción de conjeturas, el razonamiento argumentativo y la vinculación de éste con la producción de demostraciones matemáticas, puede apoyar la participación real de los estudiantes en la actividad demostrativa. En una dinámica interactiva entre tareas de construcción geométrica y la práctica de la justificación, se favorece la constitución de comunidades de práctica en las que la argumentación marcada por las reglas de interacción cotidiana y el razonamiento deductivo se "gerencian" en forma dialéctica a medida que evolucionan las prácticas de la comunidad (Duval, 1992 citado en Mariotti, 2000, p. 50). La propuesta se realiza en espacios de participación, que podemos describir brevemente de la siguiente manera:

Espacios de resolución de problemas. En tales espacios, en forma individual o en grupos pequeños y apoyados en el uso de la geometría dinámica, los estudiantes trabajan en la solución de situaciones problema de índole geométrica. Este trabajo incluye no sólo la construcción de figuras, la exploración de éstas y la formulación de conjeturas, sino también el esbozo de unas primeras ideas para la justificación de dichas conjeturas, ideas que posteriormente se revisan y desarrollan colectivamente para lograr la correspondiente demostración en el marco del sistema axiomático.

Espacios de "conversación instruccional"[2] entre el profesor y los estudiantes. En dichos espacios, el profesor como miembro experto de la comunidad guía el desarrollo de la teoría –lo que usualmente sería objeto de enseñanza directa – hablando con uno o varios estudiantes, a partir de las propuestas que hacen ellos como solución de los problemas. Así se construyen y negocian significados compartidos.

Espacios de discusión matemática entre estudiantes o como comunidad en donde el profesor es un miembro más (Mariotti, 2000). Estos espacios de interacción tienen lugar después del trabajo individual o en grupos pequeños y su finalidad es crear una porción organizada del sistema axiomático correspondiente a una temática completa, a partir de los resultados que han obtenido los estudiantes al trabajar los problemas abiertos. La discusión matemática se diferencia de la conversación instruccional en que la responsabilidad por culminar exitosamente la tarea recae sobre la comunidad en general; el profesor es apenas un miembro más y no tiene papel protagónico alguno. En la conversación instruccional el profesor tiene una meta, no siempre explícita para los alumnos, y las preguntas o comentarios que hace son instrumento para encausar los sucesos hacia esa meta.

La propuesta didáctica

A continuación, para cada problema precisamos qué intención específica nos mueve a plantearlo. Además, mostramos, a través de un esquema, una posible estructura del sistema axiomático local comprometido en su solución, es decir, presentamos de manera interrelacionada tanto los elementos del sistema que se requieren para abordar el problema como los que surgen como necesidades teóricas en el curso de la actividad y que se deben introducir para poder solucionarlo.

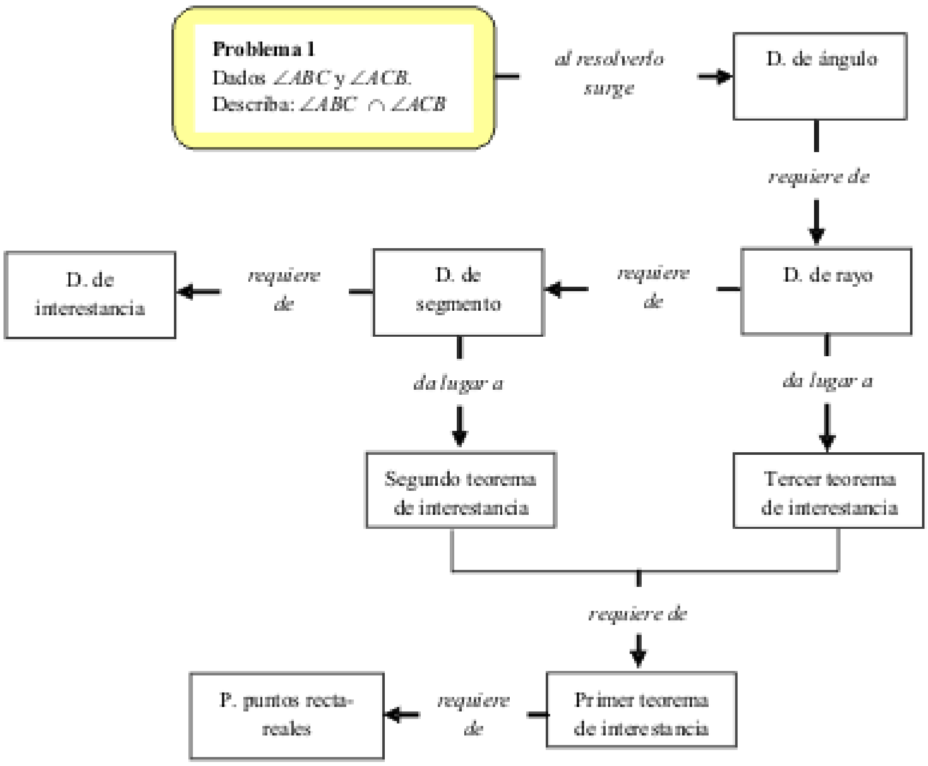
Problema 1: Dados $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Describa: $\angle ABC \cap \angle ACB$.

Con este problema se pretende motivar una conversación instruccional sobre qué es un ángulo, conversación que debe concluir con el establecimiento, dentro del sistema axiomático que se está construyendo, de la definición de tal objeto geométrico.

Consideramos que el problema planteado pone en juego la noción que los estudiantes tienen de ángulo, la cual no necesariamente coincide con la que nosotros usualmente adoptamos en el curso de Geometría Plana, que corresponde a la que dio Hilbert, en el año 1899: *la unión de dos rayos con el mismo extremo, que pertenecen a dos rectas diferentes*. Suponemos que en las soluciones de algunos estudiantes, la noción de ángulo puesta en juego está relacionada con la definición que al respecto dio Arnauld, alrededor del año 1667: *parte de un plano comprendida entre dos semirrectas que tienen origen común*. Sea que la respuesta de algún estudiante corresponda o no con la noción de ángulo de Hilbert, con la de Arnuald o con la de Euclides, siglo IV a.C.: *la inclinación de una recta sobre la otra*, en la conversación se hacen explícitas las diferentes definiciones que en el transcurso de la historia se han manejado, poniendo de manifiesto cuán disímiles son los respectivos objetos a los que hacen referencia: inclinación refiere a un número, parte de un plano refiere a una región, y unión de dos rayos refiere a una figura geométrica. Para promover la conversación sobre ángulo preferimos un problema que ponga en juego la noción en

[2] Tharp y Gallimore (1988, citados en Forman, 1996) usan el término *conversación instruccional* para referirse a los discursos de la clase que permiten la construcción conjunta de significado por parte de profesores y estudiantes. En este tipo de interacción se percibe un modelo de conversación realizada en lengua natural en la cual los miembros más experimentados de una cultura, instruyen a los menos experimentados, a través del diálogo.

vez de pedir directamente que se dé una definición pues sería posible que un estudiante, o bien, recitara de memoria un enunciado correcto sin la suficiente comprensión, o bien, pudiera no tener el respectivo vocabulario para comunicar su idea aunque tuviera una comprensión adecuada.



Esquema 1: elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 1

Una vez logrado un acuerdo sobre la definición de ángulo se entra en un proceso de ir hacia atrás (de remontarse al origen), para revisar significados y precisar definiciones y propiedades de los objetos geométricos sobre los que se basa, directa e indirectamente, la definición adoptada de ángulo. Por tal razón, en esta actividad hemos llamado *núcleo del sistema axiomático local* al objeto ángulo. Así, puesto que ángulo es la unión de dos rayos que cumplen dos condiciones, se hace necesario definir rayo[3]; a su vez, para definir rayo se hace necesario definir segmento y para definir segmento es necesario definir la relación de interestancia entre tres puntos. Como elementos para la conversación instruccional que se realiza en torno a este problema, se plantean preguntas con la intención de hacer aflorar las imágenes conceptuales y de cuestionarlas o de reforzarlas, y, desde la teoría, hacer válidas dichas imágenes. Específicamente las preguntas que frecuentemente proponemos son: *¿qué quiere decir que un punto está entre otros dos puntos?; ¿tiene un segmento más de dos puntos?, ¿es un rayo diferente a un segmento?* A partir de la conversación, se introducen el Segundo y Tercer teoremas de interestancia, que pueden demostrarse gracias al Primer teorema de interestancia y el Postulado de correspondencia puntos en recta-números.[4] Es así como se genera la primera porción de un sistema axiomático local cuya construcción se hace a partir de la noción de ángulo y que está conformado por cuatro definiciones, tres teoremas de interestancia y el Postulado de correspondencia puntos en recta-

[3]La lista de postulados, definiciones y teoremas que se mencionan se encuentra en el Anexo.

[4]El sistema axiomático en que se fundamenta esta propuesta es una modificación del conjunto de postulados propuesto por George Birkhoff (1884-1944).

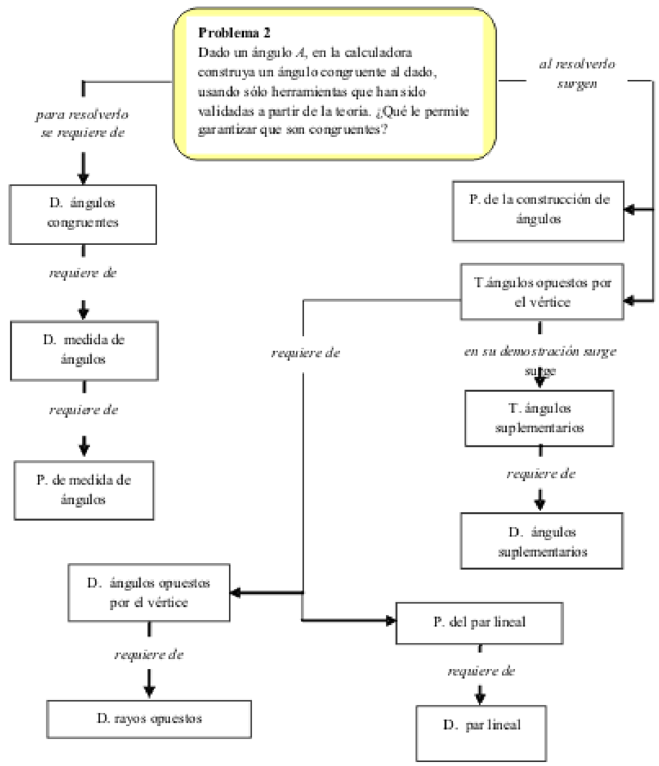
números. En el Esquema 1, se explicitan los elementos del sistema axiomático local y se destacan las relaciones de dependencia entre ellos.

Problema 2: Dado un ángulo A en Cabri[5] construya un ángulo congruente al dado, usando solo herramientas que han sido validadas a partir de la teoría. ¿Qué le permite garantizar que son congruentes?

Para comenzar, hacemos dos aclaraciones con respecto al uso de la geometría dinámica. Por una parte, la norma aquí impuesta de usar sólo herramientas que hayan sido validadas a partir de la teoría –norma que debe regular las producciones de los estudiantes no sólo para este problema sino para todos los problemas que se asignan en el curso– tiene que ver con la naturaleza axiomática-deductiva del sistema teórico que se está construyendo. Con tal regla se pretende favorecer el enfoque metodológico de ir introduciendo nuevas definiciones y teoremas como respuesta a las necesidades teóricas que surgen. Atendiendo a esta norma, las únicas herramientas que se pueden usar de manera lícita en la solución del Problema 2 son: punto, segmento, recta, rayo y medida de ángulos. Por otra parte, el uso de la geometría dinámica para apoyar la solución de diferentes tipos de problemas suele jugar papeles diferentes. Es así como reconocemos que para el caso de los Problemas 2 y 3, la geometría dinámica no tiene un papel imprescindible, es decir, bien podría lograrse desde el punto de vista didáctico resultados similares si se trabajara con papel y lápiz. Aun así, decidimos exigir el uso de la geometría dinámica en la solución de tales problemas porque vemos en ello una oportunidad para contribuir al desarrollo en los estudiantes de su habilidad para usar de manera eficiente el programa, condición sin la cual el potencial del uso de la geometría dinámica para solucionar otro tipo de problemas tendría restricciones. El *uso eficiente* del programa de geometría dinámica incluye saber manejar el programa, conocer las distintas herramientas y funciones que ofrece, saber cuándo hacer una construcción blanda o una robusta (Healy, 2000) y aprender a interpretar los resultados que obtienen dinámicamente para reportarlos como un resultado de la geometría euclidiana estática.

Con el Problema 2, se pretende justificar la necesidad de extender el sistema axiomático local ya conformado; es decir, a partir de las propuestas que los estudiantes hagan como solución al problema se introducen nuevos postulados, definiciones y teoremas que se conectan con uno o más elementos del sistema axiomático cuyo núcleo es el objeto ángulo. El *núcleo del sistema axiomático local* en este caso es el objeto ángulos congruentes. Generalmente se presentan dos caminos para la solución. En uno, es usual que los estudiantes propongan la construcción de ángulos opuestos por el vértice, de ángulos rectos, y de ángulos alternos internos o correspondientes generados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Aunque de las tres propuestas no es aceptable sino la primera, pues las otras dos requieren usar herramientas aún no validadas a partir de la teoría, tal propuesta es suficientemente rica para la intención de extender el sistema. La construcción de ángulos opuestos por el vértice nos permite abordar el significado de cuatro objetos geométricos: ángulos congruentes, rayos opuestos, ángulos que forman par lineal, y ángulos suplementarios. En otro, los estudiantes proponen medir el ángulo A y construir un ángulo con la misma medida. Esto conduce a la introducción del Postulado de la construcción de ángulos, que ingresa al sistema axiomático para sustentar la construcción de un ángulo congruente a uno dado. Cómo Cabri no tiene una herramienta específica para construir

[5]En nuestros cursos de geometría privilegiamos el uso del programa Cabri instalado en calculadoras graficadoras pues la posibilidad de proyectar las imágenes de las producciones individuales en la pared favorece la socialización y la discusión de ideas.



Esquema 2: elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 2

ángulos con una medida dada, nosotros hemos adaptado la herramienta “Rotación”para esta función, aprovechando que el postulado ofrece el sustento teórico para ello. En el Esquema 2, presentamos los elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 2.

Problema 3: Construya dos ángulos adyacentes congruentes.

Con este problema se pretende motivar la introducción de otras cuatro definiciones al sistema axiomático local en construcción: ángulos adyacentes, ángulo recto, rectas perpendiculares y bisectriz de ángulo, así como el Postulado de adición de ángulos y algunos teoremas relacionados con ángulos rectos, rectas perpendiculares y bisectriz de un ángulo. En este caso, el *núcleo del sistema axiomático local* es el objeto ángulos adyacentes congruentes. La necesidad de precisar la definición de ángulos adyacentes surge tan pronto como se involucra el estudiante en la interpretación del enunciado del problema. Como solución del problema son frecuentes cuatro propuestas. La primera se basa en el Postulado de construcción de ángulos y utiliza la rotación para construir un ángulo recto con vértice en un punto de una recta, dando lugar a dos ángulos rectos adyacentes (Figura 1).

A partir de esta propuesta surge la oportunidad de revisar los significados y precisar las definiciones de ángulo recto y de rectas perpendiculares. La segunda consiste en construir un ángulo y su bisectriz utilizando las herramientas “Medida de ángulo”y “Calculadora”para hallar la mitad de la medida obtenida, y “Rotación”para la construcción. La tercera consiste en construir un ángulo, llamémoslo A, y luego construir otro ángulo, de igual medida al ángulo A, con un lado común; es decir, un lado del ángulo A resulta ser la bisectriz de un ángulo conformado por los lados no comunes de los dos ángulos (Figura 2).

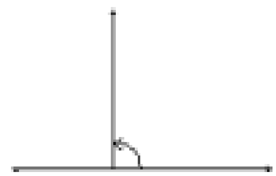


Figura 1

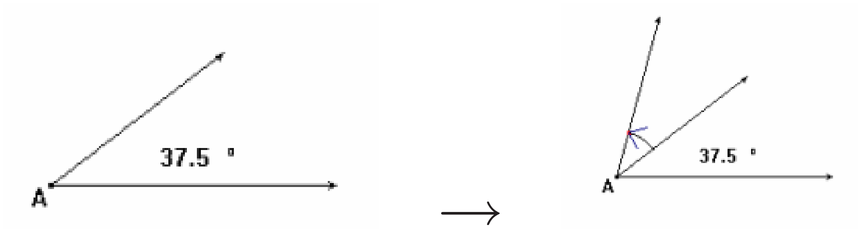


Figura 2

Como es de suponerse, las propuestas dos y tres, que involucran la bisectriz de un ángulo, generan una oportunidad de precisar la definición de bisectriz de ángulo. La cuarta consiste en construir un ángulo, llamémoslo A, usar la herramienta "Medida de ángulo"para obtener su medida, calcular el doble de ese valor y construir un nuevo ángulo, usando como punto de partida para la rotación uno de los lados del ángulo A, con la precaución de hacer el giro en el mismo semiplano donde se encuentra el otro lado del ángulo (Figura 3). Esta última propuesta se puede aprovechar para introducir el Postulado de adición de ángulos. El Esquema 3 presenta los elementos del sistema axiomático local generado al abordar el Problema 3.

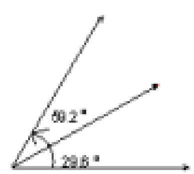
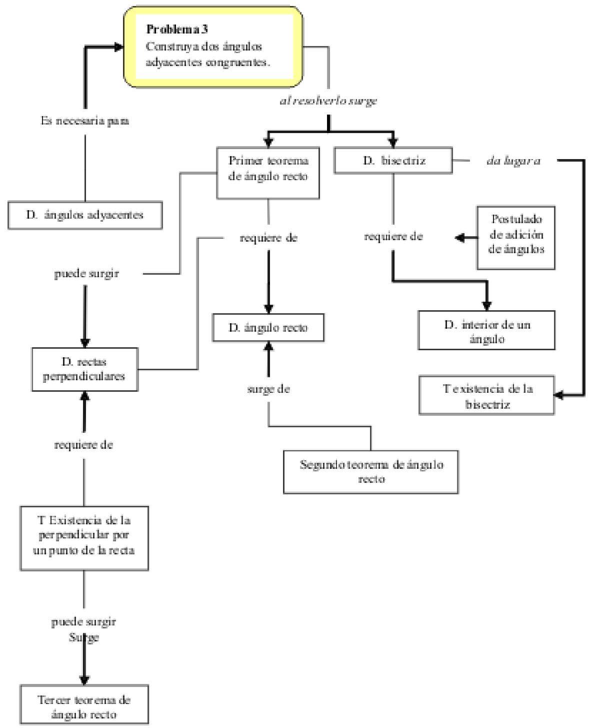


Figura 3

Problema 4: Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo. ¿Es posible determinar un punto E, en el mismo semiplano en el cual está D, para que el $\angle BAD$ sea complementario con el $\angle CAE$?

Este problema también presenta una oportunidad para revisar el significado y establecer las definiciones de los objetos geométricos involucrados en la situación tales como rayo, rayos opuestos, semiplano, ángulos complementarios, ángulo agudo, y, por tanto, su solución juega un papel importante en la ampliación del sistema axiomático que es la unión de los dos sistemas locales antes descritos. El *núcleo del sistema axiomático local* en este caso es el objeto ángulos complementarios. Sin embargo, la intención que tenemos al proponer el problema va más allá de eso: queremos propiciar que los estudiantes se involucren en una actividad demostrativa que vaya desde la exploración de la situación problema, pase por la formulación de una conjetura y concluya con la demostración del hecho geométrico que subyace en la situación problema; la



Esquema 3: elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 3

geometría dinámica juega un papel protagónico, pues permite a los estudiantes identificar el lugar geométrico que es solución al problema. Al investigar la situación, los estudiantes descubren la restricción que tiene el punto D para que exista el complemento de $\angle BAD$: $\angle BAD$ debe ser agudo, término cuya definición al igual que la de ángulo obtuso se establece en ese momento. Usando las herramientas "Medida de ángulo", "Calculadora", y el arrastre para obtener una construcción blanda que satisfaga aproximadamente la condición exigida, los estudiantes pueden visualizar, en la figura, uno de los puntos E que buscan. En el caso de que el problema anterior no hubiera suscitado la necesidad de establecer la existencia de rectas perpendiculares, la solución al Problema 4 hace surgir necesariamente una discusión al respecto ya que al arrastrar un punto E libre, descubren que se debe construir un rayo perpendicular al $\overrightarrow{AD}$ en el punto A para obtener el ángulo complementario pedido (Figura 4).

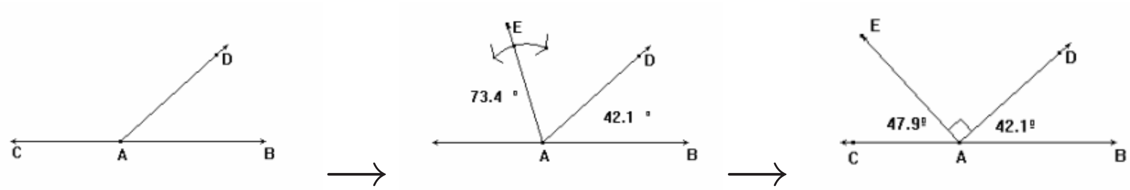
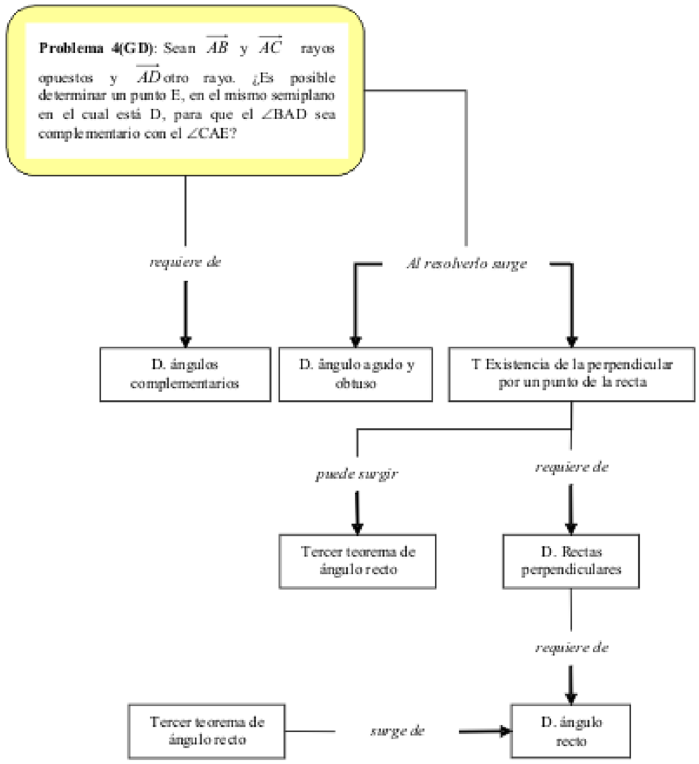


Figura 4

La respuesta al problema exige un análisis detallado pues el estudiante debe darse cuenta de que cualquier punto de la semirrecta AE construida es un punto solución.

Problema 5: Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y las bisectrices del



Esquema 4: elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 4

$\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente. ¿Cuál debe ser la posición del $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle GBD$ sea máxima? Justifique su respuesta.

Este problema motiva al uso de todo el potencial dinámico que ofrece un programa de geometría dinámica que induce a la actividad demostrativa en toda su dimensión. En primer lugar, el enunciado invita a una anticipación de la respuesta, previa a la exploración inicial; usualmente los estudiantes piensan que el $\overrightarrow{BK}$ debe ser perpendicular a los rayos BA y BE. En segundo lugar, la construcción induce a la exploración, siendo el arrastre lo que permite estudiar la variación; los estudiantes mueven el $\overrightarrow{BK}$ buscando la posición en la que la medida del ángulo sea máxima. En tercer lugar, el estudio de la variación conduce a visualizar matemáticamente la figura para percibir la propiedad invariante bajo el arrastre: el $\angle GBD$ es recto en cualquier posición del $\overrightarrow{BK}$. En cuarto lugar los estudiantes son invitados a formular una conjetura, tal cómo se encontraría el enunciado en un texto de geometría, desprovista de toda alusión a la variación, lo que exige captar la esencia del hecho geométrico: el ángulo formado por las bisectrices de ángulos que son par lineal es recto. En quinto lugar, el resultado obtenido, que es bastante inesperado y sorprendente para la mayoría de los estudiantes, los motiva a buscar una justificación; en busca de una explicación, suelen, estudiar casos extremos de la posición del $\overrightarrow{BK}$, formando un $\angle BAK$ muy agudo o muy obtuso, o haciendo que éste sea recto (Figura 5). Estos experimentos los llevan a identificar dos pares de ángulos congruentes cuya suma de sus medidas es 180, identificando la vía para hacer la demostración con los elementos teóricos disponibles en el sistema axiomático.

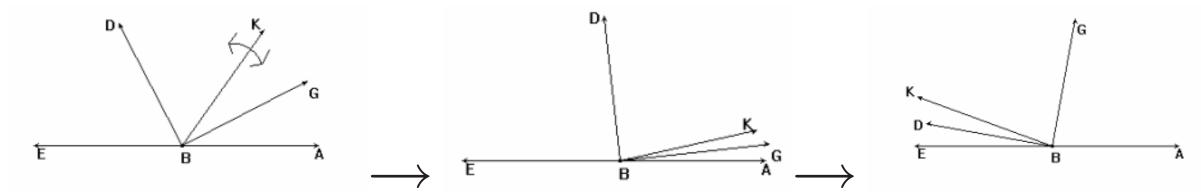


Figura 5

Con este problema, se cierra el proceso de construcción del sistema axiomático relacionado con la geometría de ángulos, logrando así una organización deductiva para los conceptos, postulados y teoremas correspondientes, muy similar a la que se encuentra en un texto de geometría para este nivel. Faltaría por establecer otro teorema asociado a rectas perpendiculares: la existencia de una recta perpendicular a otra desde un punto externo a ella. No se incluye en esta propuesta porque el problema que hemos diseñado para introducir este hecho requiere el uso de otro objeto geométrico: el triángulo. Ello da lugar a otra propuesta didáctica con otros núcleos para el sistema axiomático.

Una consideración final

La propuesta que hemos presentado es el producto de varios semestres de experimentación en nuestros cursos de Geometría Plana. En cada implementación surgen variantes a las soluciones de los problemas que generan algunos cambios no sustanciales en la organización deductiva, por lo que los esquemas que aquí presentamos no son rígidos ni estamos pretendiendo que aquellos profesores que se animen a llevarla a cabo la sigan al pie de la letra. Vemos nuestra propuesta más como un ejemplo del tipo de ambiente que se puede favorecer en donde la resolución de problemas va de la mano con el desarrollo formal de un contenido matemático. A diferencia de un enfoque metodológico centrado en la presentación, por parte del profesor, de una porción de un sistema axiomático para la geometría plana, que es la forma corriente como se lleva a cabo la enseñanza de la demostración en los primeros semestres universitarios, nuestra propuesta procura implementar un enfoque participativo en donde los estudiantes producen las ideas que se discuten y colaboran en la construcción de conocimiento. A partir de problemas en un contexto matemático y del uso de la geometría dinámica, logramos involucrar a los estudiantes, de manera genuina, en el proceso de construir, como comunidad, un sistema axiomático local con elementos teóricos de la geometría plana relacionados con ángulos. Las ideas para la organización deductiva surgen de manera natural durante el transcurso del desarrollo de los problemas y la socialización de los resultados.

Llevar a cabo propuestas como la que presentamos exigen del profesor un gran esfuerzo por escuchar a sus estudiantes, confiar en que sus ideas son provechosas, atender sus inquietudes, extractar de sus propuestas aquellos elementos útiles para la producción de enunciados y ajustar la organización del sistema axiomático a los resultados obtenidos. Es posible que en ocasiones haya que sacrificar rigor y formalismo, en aras de una construcción colectiva, pero este sacrificio vale la pena si logramos una participación genuina de los estudiantes en la construcción de conocimiento.

Bibliografía

[1] Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). *A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments.* ZDM, 43(3), 66-72.

[2] Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). *Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica*. Lecturas Matemáticas, Volumen Especial, pp. 371-383. Ponencia presentada en XV Congreso Nacional de Matemáticas, 8-12 de agosto de 2005, Bogotá, Sociedad Colombiana de Matemáticas. [En línea, fecha de consulta: 10 de febrero de 2008. Disponible en: www.scm.org.co/Articulos/853.pdf]

[3] Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2007). *Cabri's role in the task of proving within the activity of building part of an axiomatic system*. Ponencia presentada en CERME 5, en el grupo de trabajo sobre la demostración. [En línea, fecha de consulta: 10 de febrero de 2008. Disponible en: www.lettredelapreuve.it/CERME5Papers/WG4-Camargo.pdf]

[4] de Villiers, M. (2004). *Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35(5), 703-724.

[5] Forman, E.A. (1996). *Learning mathematics as participation in classroom practice: implications of sociocultural theory for educational reform*. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 115-130). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[6] Goos, M. (2004). *Learning mathematics in a classroom community of inquiry*. Journal for Research in Mathematics Education, 35, 4, 258-291.

[7] Graven, M. (2004). *Investigating mathematics teacher learning within an in-service community of practice: The centrality of confidence*. Educational Studies in Mathematics, 57(2), 177-211.

[8] Hadas, N., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). *The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments.* Educational Studies in Mathematics, 44, 127-150.

[9] Healy, L. y Hoyles, C. (2001). *Software tools for geometrical problem solving: potencials and pitfalls*. International Journal of Computer for Mathematical Learning, 6, 235-256.

[10] Jones, K. (2000). *Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations*. Educational Studies in Mathematics, 44, 55-85.

[11] Laborde, C. (2000). *Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving*. Educational Studies in Mathematics, 44, 151-161.

[12] Mariotti, M.A. (2000). *Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment*. Educational Studies in Mathematics, 44, 25-53.

[13] Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). *Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment*. Educational Studies in Mathematics, 44, 87-125.

[14] Martin, T., McCrone, S., Bower, M. y Dindyal, J. (2005). *The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof.* Educational Studies in Mathematics, 60(1), 95-124.

[15] Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Bogotá: Fondo editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

[16] Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona: Paidós.

Anexo

A continuación se presenta una lista de los elementos teóricos del sistema axiomático local construido a través de la propuesta que aquí se reporta.

Postulados	
Puntos en la recta-números reales	Se puede establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que: i) a cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real; ii) a cada número real le corresponde exactamente un punto en la recta.
Medida de ángulos	A cada $\angle BAC$ le corresponde un número real entre 0 y 180.
Construcción de ángulos	Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista de alguno de los semiplanos H en un plano β . Para cada número r entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$ con P en H, tal que $m\angle PAB = r$.
Par lineal	Si dos ángulos forman par lineal, entonces la suma de sus medidas es 180.
Adición de medida de ángulos	Si D está en el interior del ángulo $\angle BAC$, entonces $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$, y de allí que $m\angle CAD = m\angle CAB - m\angle DAB$.
Definiciones	
Interestancia	B está entre A y C si A, B y C son puntos distintos de una misma recta y $AB + BC = AC$.
Segmento	Dados dos puntos A y B del plano, el *segmento* AB es el conjunto de los puntos A, B y todos los puntos entre A y B.
Rayo	Dados dos puntos A y B del plano, el *rayo* AB es el conjunto de puntos que es la unión de $\overrightarrow{AB}$ y el conjunto de puntos C, para los cuales B está entre A y C.
Ángulo	*Ángulo* es la unión de dos rayos que tienen el mismo origen y que no están en la misma recta.
Medida de un ángulo	El número dado por el postulado de la medida de ángulos es *la medida del ángulo*.
Ángulos congruentes	Dos ángulos son *congruentes* si tienen la misma medida.
Rayos opuestos (1)	Si A está entre B y C entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos.
Rayos opuestos (2)	El *rayo opuesto* a $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto conformado por la unión de $\{A\}$ con el conjunto de todos los puntos de la $\overleftrightarrow{AB}$ que no pertenecen a $\overrightarrow{AB}$.

Ángulos opuestos por el vértice	Dos ángulos son *opuestos por el vértice* si sus lados determinan dos pares de rayos opuestos.
Par lineal	Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AC}$ es otro rayo cualquiera, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un *par lineal*.
Ángulos suplementarios	Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180, los ángulos son *suplementarios*.
Ángulos adyacentes	Dos ángulos son *adyacentes* si son coplanares, comparten el vértice, tienen un lado común y no tienen puntos interiores en común.
Bisectriz de un ángulo	Si D está en el interior del $\angle BAC$, y $\angle BAD \angle DAC$, entonces $\overrightarrow{AD}$ biseca al $\angle BAC$, y $\overrightarrow{AD}$ se llama *bisectriz* del $\angle BAC$.
Angulo recto	Un *ángulo recto* es aquel cuya medida es de 90.
Rectas perpendiculares	Dos rectas son *perpendiculares* si determinan un ángulo recto.
Ángulos agudo y obtuso	Un ángulo es *agudo* u *obtuso* si su medida es menor o mayor de 90, respectivamente.
Ángulos complementarios	Si la suma de las medidas de dos ángulos es de 90º, se llaman *complementarios*.
Teoremas	
Primer teorema de interestancia	Sean A, B y C tres puntos de una recta, con coordenadas x, y y z, respectivamente. Si $x < y < z$ entonces B está entre A y C.
Segundo teorema de interestancia	Dados dos puntos de una recta, existe un punto entre ellos.
Tercer teorema de interestancia	Dados dos puntos A y B en una recta, existe un punto C tal que B está entre A y C.
Ángulos opuestos por el vértice	Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
Ángulos suplementarios	Los suplementos de ángulos congruentes, son congruentes
Existencia de la bisectriz	Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.
Primer teorema de ángulos rectos	Todos los ángulos rectos son congruentes.
Segundo teorema de ángulos rectos	un ángulo es recto si existe otro ángulo que forma par lineal con el ángulo dado y que es congruente a dicho ángulo.
Tercer teorema de ángulos rectos	si dos rectas que se intersecan determinan un ángulo recto, entonces determinan cuatro ángulos rectos.
Existencia de perpendicular por punto en recta	Por un punto de una recta contenida en un plano, existe en dicho plano, una y solo una recta perpendicular a la recta dada.