Algunos elementos a tener en cuenta en la enseñanza de las figuras geométricas en la educación básica

Gladys González
Coordinadora Académica Liceo de los Andes
Guadalajara de Buga, Colombia
gladysgoro@yahoo.com

Gustavo Marmolejo
Profesor Universidad de Nariño
San Juan de Pasto, Colombia
gusado37@gmail.com

Resumen

La visualización en las figuras geométricas es un asunto de gran complejidad y de enorme importancia en el aprendizaje de las matemáticas. Es urgente y necesario generar espacios en los cuáles los estudiantes reflexionen acerca de las formas de ver que permiten estas representaciones; en consecuencia, que puedan hacer de ellas verdaderos soportes intuitivos en el aprendizaje de las matemáticas. En este documento se presenta una investigación a través de la cual se pretendió introducir a un grupo de estudiantes de grado cuarto de educación básica en un aprendizaje explicito de las formas de ver que permiten las figuras. A manera de conclusión se proponen algunos elementos a tener en cuenta en futuras apuestas educativas en torno al mismo objetivo.

Introducción

En el aprendizaje de la geometría se recurre como mínimo a dos registros de representación semióticos: las figuras geométricas y el discurso teórico en lengua natural. En el primero se designan las figuras y sus propiedades; en el segundo, se enuncian los elementos que conforman el marco teórico sobre el cual se sustenta la clase de geometría sobre la que se reflexiona. Para asegurar un aprendizaje de esta disciplina es necesario que los tratamientos propios a uno y otro registro se efectúen simultáneamente y de manera interactiva. La originalidad de los procesos geométricos en relación a otros tipos de actividad matemática tiene que ver con que es estrictamente necesaria la coordinación entre los tratamientos que provienen de estos dos registros. Pero, la mayoría de los estudiantes se encuentran muy lejos de alcanzar dicha coordinación. Varias investigaciones han puesto en evidencia que uno de los mayores problemas en el aprendizaje de la geometría tiene relación con el hecho que son muy pocos los alumnos que logran la coordinación necesaria entre los tratamientos figurales y los tratamientos discursivos, incluso después de la educación básica y media.

Una de las razones que explica tal deficiencia tiene que ver con la naturaleza de estos registros: no son exclusivos de las matemáticas. Los tratamientos figurales parecen proceder de leyes de organización de la percepción visual, y la práctica de un discurso teórico parece ser la prolongación directa de la comprensión inmediata de la lengua utilizada para comunicar. En consecuencia, existe la creencia de que hay una proximidad entre los tratamientos que son naturales a cada uno de estos dos registros y aquellos que la actividad matemática solicita, este resulta ser un fenómeno de falsa proximidad. Para lograr una coordinación entre los tratamientos propios a cada uno de los registros de representación enunciados en el párrafo anterior, se hace necesario como mínimo, y en una primera instancia, diseñar situaciones de aula que posibiliten a nuestros estudiantes un aprendizaje explicito de los tratamientos pertinentes y potentes de las figuras geométricas y de la lengua natural. La presente investigación centra su atención de forma exclusiva en el primero de los dos aspectos señalados arriba.

Referentes teóricos utilizados en la investigación

La importancia de las figuras geométricas radica en el hecho de que forman un importante soporte intuitivo para el desarrollo de actividades geométricas. Es decir, dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen; permiten la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, posibilitan "vistazos"sinópticos sobre ellas y verificaciones subjetivas. Pero, hacer de estas representaciones potentes herramientas heurísticas en la resolución de problemas geométricos está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo. Por el contrario, es necesario discriminar entre las diferentes formas de ver que una figura posibilita aquellas que sean pertinentes y potentes a la resolución de la actividad geométrica planteada. En otras palabras, es necesario reconocer, aprovechar o vencer, según sea el caso, la presencia de ciertos factores de visibilidad[1], los cuales hacen posible el discriminar sobre una figura, las subfiguras o subconfiguraciones pertinentes a la resolución del problema planteado.

Para describir cuál puede ser el aporte heurístico de una figura en un problema de geometría, se debe distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución del problema. Duval ha mostrado que una misma figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente[2]: Aprehensión perceptiva, aprehensión operatoria y aprehensión discursiva. Y que en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, se relacionan, y en otros se oponen.[3] A continuación nos centraremos en estos tres tipos de aprehensión.

Aprehensión Perceptiva

En este nivel se reconocen, de manera automática e inmediata, las diferentes unidades figurales que son discernibles en una figura dada. Esta forma de aprehensión está ligada a las leyes gestálticas de organización de la percepción: cuando las unidades figurales de dimensión 2 están separadas, su reconocimiento no tiene ningún tipo de dificultad; pero no sucede lo mismo cuando se encuentran integradas en una configuración. Esto sucede por dos razones diferentes. En primer lugar, algunas unidades figurales de dimensión 2 predominan sobre otras unidades también de dimensión 2, de conformidad con la ley gestáltica de cierre. En segundo lugar, una figura geométrica contiene, con frecuencia, más unidades figurales elementales que las requeridas para

[1] Diferentes investigaciones han demostrado que aspectos figurales como la presencia o no de un fondo cuadriculado sobre el cual "repose"una figura, las características de su contorno, el hecho que una parte de su superficie o de su contorno pertenezca o no a dos figuras diferentes que se han de comparar, la cantidad de subfiguras en las que se debe dividir una figura, que estas últimas sean cóncavas o convexas. . . .se constituyen en factores que ayudan a ver sobre una figura aspectos particulares, o por el contrario los esconden.

Duval, R. *Semiosis y pensamiento humano*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Cali. Colombia. Artes Gráficas Univalle. 1999.

Mezquita, *L'influence des aspects figuratifs dans lárgumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Strasbourg. Francia. 1990

Padilla, V. *L'influence dé une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Strsbourg. Francia. 1992.

[2] Duval, R. *Approveche Cognitive des Problémes de geometría en termes de congruence*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. 1998.

[3] Ibid. p. 71-72

construirlas. La figura dada con el enunciado del problema que se presenta abajo permite mostrar de manera clara lo que se ha descrito anteriormente. A'C' y AC son paralelas, A'B' y AB son paralelas, B'C' y BC son paralelas. Probar que A es el punto medio de B'C'

Introducción

En el aprendizaje de la geometría se recurre como mínimo a dos registros de representación semióticos: las figuras geométricas y el discurso teórico en lengua natural. En el primero se designan las figuras y sus propiedades; en el segundo, se enuncian los elementos que conforman el marco teórico sobre el cual se sustenta la clase de geometría sobre la que se reflexiona. Para asegurar un aprendizaje de esta disciplina es necesario que los tratamientos propios a uno y otro registro se efectúen simultáneamente y de manera interactiva. La originalidad de los procesos geométricos en relación a otros tipos de actividad matemática tiene que ver con que es estrictamente necesaria la coordinación entre los tratamientos que provienen de estos dos registros. Pero, la mayoría de los estudiantes se encuentran muy lejos de alcanzar dicha coordinación. Varias investigaciones han puesto en evidencia que uno de los mayores problemas en el aprendizaje de la geometría tiene relación con el hecho que son muy pocos los alumnos que logran la coordinación necesaria entre los tratamientos figurales y los tratamientos discursivos, incluso después de la educación básica y media.

Una de las razones que explica tal deficiencia tiene que ver con la naturaleza de estos registros: no son exclusivos de las matemáticas. Los tratamientos figurales parecen proceder de leyes de organización de la percepción visual, y la práctica de un discurso teórico parece ser la prolongación directa de la comprensión inmediata de la lengua utilizada para comunicar. En consecuencia, existe la creencia de que hay una proximidad entre los tratamientos que son naturales a cada uno de estos dos registros y aquellos que la actividad matemática solicita, este resulta ser un fenómeno de falsa proximidad. Para lograr una coordinación entre los tratamientos propios a cada uno de los registros de representación enunciados en el párrafo anterior, se hace necesario como mínimo, y en una primera instancia, diseñar situaciones de aula que posibiliten a nuestros estudiantes un aprendizaje explicito de los tratamientos pertinentes y potentes de las figuras geométricas y de la lengua natural. La presente investigación centra su atención de forma exclusiva en el primero de los dos aspectos señalados arriba.

Referentes teóricos utilizados en la investigación

La importancia de las figuras geométricas radica en el hecho de que forman un importante soporte intuitivo para el desarrollo de actividades geométricas. Es decir, dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen; permiten la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, posibilitan "vistazos"sinópticos sobre ellas y verificaciones subjetivas. Pero, hacer de estas representaciones potentes herramientas heurísticas en la resolución de problemas geométricos está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo. Por el contrario, es necesario discriminar entre las diferentes formas de ver que una figura posibilita aquellas que sean pertinentes y potentes a la resolución de la actividad geométrica planteada. En otras palabras, es necesario reconocer, aprovechar o vencer, según sea el caso, la presencia de ciertos factores de visibilidad[4], los cuales hacen posible el discriminar sobre una figura, las subfiguras o subconfi-

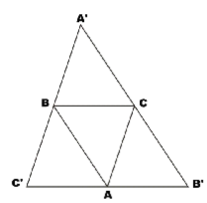
[4]Diferentes investigaciones han demostrado que aspectos figurales como la presencia o no de un fondo cuadriculado sobre el cual "repose"una figura, las características de su contorno, el hecho que una parte de su superficie

guraciones pertinentes a la resolución del problema planteado.

Para describir cuál puede ser el aporte heurístico de una figura en un problema de geometría, se debe distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución del problema. Duval ha mostrado que una misma figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente[5]: Aprehensión perceptiva, aprehensión operatoria y aprehensión discursiva. Y que en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, se relacionan, y en otros se oponen.[6] A continuación nos centraremos en estos tres tipos de aprehensión.

Aprehensión Perceptiva

En este nivel se reconocen, de manera automática e inmediata, las diferentes unidades figurales que son discernibles en una figura dada. Esta forma de aprehensión está ligada a las leyes gestálticas de organización de la percepción: cuando las unidades figurales de dimensión 2 están separadas, su reconocimiento no tiene ningún tipo de dificultad; pero no sucede lo mismo cuando se encuentran integradas en una configuración. Esto sucede por dos razones diferentes. En primer lugar, algunas unidades figurales de dimensión 2 predominan sobre otras unidades también de dimensión 2, de conformidad con la ley gestáltica de cierre. En segundo lugar, una figura geométrica contiene, con frecuencia, más unidades figurales elementales que las requeridas para construirlas. La figura dada con el enunciado del problema que se presenta abajo permite mostrar de manera clara lo que se ha descrito anteriormente. A'C' y AC son paralelas, A'B' y AB son paralelas, B'C' y BC son paralelas. Probar que A es el punto medio de B'C'



Para resolver este problema se han de discriminar en la figura los paralelogramos BCAC' y BCB'A, pero estas son las unidades figurales menos visibles en la figura. En virtud de la ley de cierre, en la figura se ve espontáneamente un triángulo pequeño inscrito en uno grande, o un mosaico de cuatro triángulos pequeños independientes. En palabras de Duval[7], para reconocer tres paralelogramos en este problema es necesario, de una parte, neutralizar la organización perceptiva que hace predominar los contornos triangulares sobre los contornos de los cuadriláteros, y ver separadas unidades figurales que de hecho se recubren parcialmente y que por tanto tiene

o de su contorno pertenezca o no a dos figuras diferentes que se han de comparar, la cantidad de subfiguras en las que se debe dividir una figura, que estas últimas sean cóncavas o convexas. . . .se constituyen en factores que ayudan a ver sobre una figura aspectos particulares, o por el contrario los esconden.

Duval, R. *Semiosis y pensamiento humano*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Cali. Colombia. Artes Gráficas Univalle. 1999.

Mezquita, *L'influence des aspects figuratifs dans lárgumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Strasbourg. Francia. 1990

Padilla, V. *L'influence dé une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Strsbourg. Francia. 1992 .

[5]Duval, R. *Approveche Cognitive des Problémes de geometría en termes de congruence*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. 1998.

[6]Ibid. p. 71-72

[7]Duval, R. Semiosis y pensamiento humano. Registros de representación y aprendizajes intelectuales. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Artes Gráficas Univalle. 1999. PP.154-155

parte de su contorno en común. Por otra parte, la figura tiene seis unidades figurales de dimensión 1 (A'C'; A'B'; B'C'; AC; CB y BA) las cuales han sido designadas y enumeradas en el enunciado del problema; son las unidades que han de tenerse en cuenta para trazar la figura. Pero, al mismo tiempo, aparecen 32 unidades figurales de dimensión 2 (cinco triángulos, tres paralelogramos, tres trapecios y 21 ángulos), seis unidades figurales de dimensión 0 (los vértices del triángulo A'B'C' y los puntos B, C, A). La aprehensión perceptiva puede tener un rol facilitador o inhibidor en la comprensión de un problema. En el problema anterior se observa que este tipo de aprehensión juega un rol inhibidor: impide la discriminación de los dos paralelogramos que se deben movilizar para resolver el problema planteado.

Aprehensión Operatoria

Las posibilidades de exploración heurística que permiten las figuras y que en gran parte brindan todas las posibilidades que hemos descrito en párrafos anteriores, se encuentran íntimamente relacionadas con la gama de modificaciones posibles que se pueden realizar sobre una figura: una figura de partida se puede dividir en diversas subfiguras a partir de las cuales se puede transformar en otra figura de un contorno global diferente o no. Las modificaciones que tienen estas características son modificaciones mereológicas, que ponen en juego las relaciones existentes entre las partes y el todo. Cuando se agranda, disminuye o se deforma la figura inicial, hablamos de modificación óptica, que transforma una figura en otra apelando a su imagen; "esta transformación, que es realizable como un juego de lentes o de espejos, puede conservar la forma de partida o alterarla"[8] Por otro lado, también es posible desplazar o rotar tanto la figura de partida como las subfiguras que la componen, en relación con la orientación del campo en el que se destaca. Cuando esto sucede, hablamos de una modificación posicional. La aprehensión operatoria de las figuras es "una aprehensión centrada sobre las modificaciones posibles de una figura de partida y por consiguiente sobre las reorganizaciones perceptivas que estas modificaciones introducen"[9]. Por cada modificación existen varias operaciones[10] (tabla #1) cognitivas que no matemáticas, que brindan a las figuras su productividad heurística. "La productividad heurística de una figura, en un problema de geometría, hace relación a que haya una congruencia entre una de las operaciones y uno de los tratamientos matemáticos posibles del problema propuesto"[11]. En otras palabras, podríamos decir que es a partir de las modificaciones que se producen en una figura por la aplicación de una operación cognitiva determinada que se generan ideas, procesos y posibilidades que permiten reconocer los tratamientos matemáticos que se deben aplicar para resolver la actividad. Son ellas, las operaciones cognitivas, las que constituyen la productividad heurística de las figuras. Sin embargo, para que los alumnos puedan hacer uso de las potencialidades que brinda el hecho de que una figura juegue un rol heurístico en la resolución de un problema de geometría, no basta que una figura sea productiva heurísticamente; suele suceder que los alumnos no logran ver la operación u operaciones pertinentes en la resolución del problema. Se ha encontrado la existencia de factores que facilitan, o por el contrario, dificultan la visibilidad de la operación u operaciones pertinentes en la resolución de problemas de geometría.

[8]Duval, R. *Approveche Cognitive des Problémes de geometría en termes de congruence.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. 1998. p.62

[9]Ibid.p.62

[10]Cada una de estas modificaciones es realizable de forma física, gráfica o mental. El tipo de modificación escogido permite transformaciones de distinta naturaleza en las figuras, cuyo carácter es independiente entre sí.

[11]Ibid.p.62

Tipo de modificación configural	Operaciones constituyentes de la productividad heurística	Factores que juegan sobre la visibilidad
Modif. Mereológicas	Reconfiguración. Configuración	Carácter convexo o no convexo de las partes elementales
Modif. Ópticas	Superponibilidad. Anamorfosis	Recubrimiento parcial. Orientación
Modif. Posiciónales	Rotación. Traslación	Estabilidad del señalamiento del campo perceptivo para el soporte de la figura.

TABLA #1

Aprehensión Discursiva

Es importante tener en cuenta que un alumno al intentar resolver un problema de geometría podría centrarse en los elementos, relaciones y propiedades que muestra la figura, v.g. considerar un ángulo como recto, sin que lo sea, solo por el hecho de que su forma se asemeja a la de un ángulo de medida 90 grados. Por lo tanto, se debe tener en cuenta que las figuras por sí mismas no constituyen un registro de tratamiento autónomo, es decir, que no es a partir de sus trazos y formas que la figura permite su acceso en la resolución de un problema geométrico. La aprehensión discursiva es una aprehensión que se encuentra ligada a las propiedades asociadas a las hipótesis. Las propiedades de una figura geométrica dependen de lo que se enuncia como hipótesis. La aprehensión discursiva de una figura es inseparable de una doble referencia: por un lado, a una red semántica de objetos matemáticos y, por otra, a una axiomática local. Es en este sentido que está indisociablemente ligada a las aserciones correspondientes del enunciado. Dicho de otro modo, la aprehensión discursiva de una figura privilegia exclusivamente el estatus que el enunciado concede a sus proposiciones.

Esta forma de aprehensión implica una subordinación de la aprehensión perceptiva a la aprehensión discursiva, y como consecuencia una restricción de la aprehensión perceptiva: las propiedades de las figuras no son impuestas a partir de los trazos y las formas de una figura, sino a partir de las propiedades mencionadas en el enunciado. En relación con la aprehensión operatoria, cuando existe una congruencia entre esta aprehensión y un tratamiento matemático posible del problema, la aprehensión discursiva puede ser dejada de lado. Pero si no hay tal congruencia, se hace necesaria la aprehensión discursiva. Es en este caso cuando los alumnos se encuentran enfrentados a una tarea de demostración.

Metodología

El diseño de las situaciones de aula implementadas, la captación, selección y análisis de la información encontrada, así como la determinación y manipulación de variables a tener en cuenta y el análisis de algunos textos escolares, se desarrolló de acuerdo con el modelo teórico, en particular el análisis funcional, que propone Raymond Duval en relación con la actividad cognitiva vinculada con los sistemas y los registros semióticos de representación; en particular en lo que corresponde al acto de ver y tratar las figuras geométricas.

El ambiente educativo en el que se desarrolló la investigación, metodológicamente fue asumido en términos de una estructura didáctica[12] constituida por las relaciones recíprocas y simultáneas entre sus elementos de base: el alumno, el profesor y el saber, cada uno de ellos historizados y, por tanto, con determinaciones propias, que les estructuran en una autonomía parcial de los unos en relación con los otros. Por tanto, si bien la investigación se enfocó preferencialmente en los alumnos, el profesor y el saber también fueron considerados en tanto que los últimos determinan las funciones del primero.

La población de interés son los estudiantes de grado cuarto de dos instituciones educativas de educación básica de la ciudad Santiago de Cali (Colombia), tanto privadas como gubernamentales. La escogencia de este grado se relaciona con el hecho de que el contexto de medida al que se da mayor importancia, y al cual se le dedica mayor tiempo, es el de área de superficies planas y además que los alumnos por lo general no han sido introducidos de manera prematura en la manipulación de formulas literales. Puesto, como lo señala Padilla[13], los alumnos que son introducidos en un aprendizaje explicito de las formulas para calcular la medida del área de superficies planas desde una postura tradicional, disminuyen dramáticamente la posibilidad de aplicar tratamientos figurales ante el desarrollo de una problemática donde estas representaciones pueden jugar un papel heurístico determinante.

Las actividades implementadas en la investigación

En la investigación se implementaron tres situaciones de aula (observar anexos). Fue necesario para su implementación 16 sesiones de clase, cada una con una duración de 120 minutos.

Primera situación de aula

Constituida por dos actividades, el objetivo centró su atención en dos aspectos de gran importancia para la investigación: 1) vencer la Aprehensión Perceptual que imponía cada una de las figuras y 2) lograr que los estudiantes aprendieran a acompañar discursivamente lo que veían sobre las figuras en cuestión. Para que los estudiantes pudiesen resolver el problema planteado en estas dos actividades, fue necesario, en una primera instancia, reorganizar perceptivamente las figuras en cuestión, de tal forma que se mediante la aplicación de una serie de operaciones mentales (inhibir trazos, aplicar rotaciones sobre algunas de las subfiguras presentes en el diseño, unir subfiguras, etc.) pudiesen discriminar dentro de las configuraciones representadas una serie de figuras: 10 cuadrados en un caso y 3 trapecios, 3 paralelogramos y 5 triángulos en el otro. Por otra parte, también era indispensable identificar las figuras geométricas encontradas; es decir, se debía designar las figuras encontradas de una manera clara y exacta. Esta segunda parte, se constituyó para la población participe en la investigación en un asunto de enorme complejidad.

[12]Brousseau, G. *Les objets de la didactique des mathématiques. Bourdeaux*: IREM, 1982. p.1. Conferencia dictada en la Segunda Escuela de Verano sobre Didáctica de las Matemáticas que se realizó en Olivet (Orleans) entre el 5 y el 17 de julio de 1982.

[13]Padilla, V. *L'influence dé une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Strsbourg. Francia. 1992 .

A tal punto que fue necesario un total de 12 horas (60 minutos por hora) para que se asumiera el uso de letras y en algunos casos de números como una herramientas potentes en la designación de figuras geométricas.

Segunda situación de aula

Este segundo paquete se encuentra conformado por dos actividades. El objetivo apunta al fraccionamiento de dos maneras diferentes una misma figura en un cuatro subfiguras. Las características del contorno de la figura a fraccionar, el de las subfiguras en las cuales se solicita el fraccionamiento y el fondo cuadriculado sobre el cual se encuentran representadas las figuras, juegan como factores de visibilidad que inducen a maneras de proceder especificas y que dan pistas ante la problemática planteada. La potencia heurísticas de las figura a fraccionar es alta, ella permite una buena cantidad de maneras diferentes de cumplir con la tarea propuesta. Al igual que en la primera de las situaciones en esta se exige describir y explicar el procedimiento aplicado, acción que suscita la designación de las operaciones aplicadas sobre la figura y la introducción de una segunda forma de ver: la aprehensión discursiva.

Tercera situación de aula

Son tres las actividades que conforman esta parte de las situaciones de aula. Se pide en cada caso reconfigurar una figura en otra, por lo cual es necesario comparar, física o mentalmente, las figuras en cuestión, posteriormente, apoyarse en las características de las formas de los contornos de las figuras y del fondo cuadriculado sobre el cual se encuentran para lograr un fraccionamiento especifico. En un caso basta con la aplicación de una traslación, en el otro, con el de una rotación y en la tercera actividad de una reflexión sobre la subfigura discriminada para lograr la transformación figural pedida. Una vez más se pide describir y explicar el procedimiento realizado, en consecuencia, se hace necesario, no solo designar figuras y la introducción de trazos sobre sus superficies, sino que además es indispensable designar las operaciones de traslación, rotación y reflexión a aplicar.

Cuarta situación de aula

Por último, se presentan una actividad en la que se pide comparar cuatro figuras según sus áreas. Las representaciones se encuentran sobre un mismo fondo cuadriculado. La superficie de las figuras en relación a la cuadricula que compone el fondo es relativamente pequeña. Al igual que en las tres situaciones anteriores el fondo cuadriculado y las características del contorno de las figuras juegan como factores de visibilidad que han de apoyar la resolución de la problemática planteada. En este caso es necesario el fraccionamiento de cada una de las figuras en varias subfiguras y la aplicación de composiciones de operaciones figurales sobre cada una de ellas. Una vez más se exige la descripción y explicación de los procedimientos empleados.

Es importante señalar que en las actividades que conforman las tres últimas situaciones de aula hemos guardado silencio a la introducción de un contraste entre las líneas que conforman el fondo cuadriculado y las que constituyen el contorno de las figuras. Este como se referenciará más adelante juega como un nuevo factor de visibilidad que induce a una visualización global de las figuras e inhibe una visualización local sobre ellas.

Conclusiones de la investigación

El desarrollo de la investigación dio lugar a una serie de resultados que, a nuestra manera de ver, aportan de manera significativa no solo a la investigación en el campo de la educación matemática; sino también a la enseñanza de la geometría y la medición en la educación básica. Estas conclusiones se presentan divididas en tres grupos. En el primero la atención se centra en los avances de orden teórico que se alcanzaron en relación al registro semiótico de las figuras, a sus tratamientos, a las formas de ver que este permite y a los factores de visibilidad implícitos en ellas; en el grupo siguiente se presentan aquellas reflexiones que tienen que ver con los objetos matemáticos área y perímetro. Por último, en un tercer grupo se plantean algunos aspectos relevantes que la nuestra investigación no trató o lo hizo de una manera rápida.

1) Con respecto a la visualización, a los factores de visibilidad y a los tratamientos figurales:

El contraste en tono y grosor entre las líneas que conforman el contorno de la figura y el de las líneas que constituyen el fondo cuadriculado, juega como un factor de visibilidad que inhibe sobre la figura una visualización local y privilegia sobre ella una visualización global. De no existir, el fondo cuadriculado pasa de ser un soporte sobre el cual se encuentra la figura a ser parte de ella. De esta manera la organización perceptiva de la figura suscita la visualización de un conjunto de cuadrados puestos uno al lado del otro. Lo anterior se conecta y refuerza con la falta de posibilidades que los estudiantes de nuestro sistema educativo han tenido con respecto al aprendizaje de los tratamientos que brinda el registro de las figuras. Es claro, pues, que si no existe tal conciencia, los alumnos tendrán que reducir sus procedimientos únicamente a los tratamientos espontáneamente efectuados, que como vimos en el primer capitulo de esta investigación, son mínimos, o recurrir a tratamientos a los cuales si han tenido acceso (por ejemplo el conteo)

Las características del contorno de las figuras como un factor de visibilidad se impone ante la presencia de un segundo factor: el fondo cuadriculado. Los estudiantes espontáneamente utilizaron las características del contorno de las dos figuras a comparar, en la mayoría de casos dejaron de lado las posibilidades que les brindaba el fondo cuadriculado sobre el cual se encontraban representadas las figuras en cuestión.

La no presencia de un contraste entre las líneas que conforman el fondo cuadriculado y las unidades de dimensión uno que constituyen el contorno de la figura, la presencia del obstáculo de desdoblamiento y la falta de un aprendizaje específico de los tratamientos que permiten las figuras; se constituyen en tres factores que hacen de ellas representaciones estáticas.

Aplicar espontáneamente sobre una figura un cambio dimensional en la forma de ver es una operación figural de enorme complejidad para los estudiantes. Es necesario realizar un aprendizaje específico que permita a los estudiantes generar este tipo de racionalidad; la sobreposición física de una "figura"en otra (para el caso de transformar una figura en otra de contorno diferente pero igual área) y el recorte de las "subfiguras"claves en la transformación, se constituyen en dos formas de actuar que posibilitan dicha reflexión.

La visualización no es un asunto de constatación inmediata y simple, sino una cuestión de tratamiento de la información y es susceptible de un aprendizaje específico. Por lo tanto, teniendo en cuenta las posibilidades que esta actividad cognitiva permite, es necesario asignar en el currículo escolar espacios específicos para su enseñanza. El área de figuras bidimensionales se constituye en un lugar de enormes posibilidades para introducir a los estudiantes en el mundo de las posibilidades heurísticas que permiten las figuras. Además, es importante señalar que las situaciones puestas en acto en esta investigación y el pequeño número de sesiones en las cuales se movilizaron, no son suficientes para asegurar una adecuada movilización de los tratamientos figurales que permitan a la visualización ser una herramienta heurística ante las exigencias que la geometría escolar requiere. Este debe ser un aprendizaje que ojalá se dé durante todos los grados de la educación básica. Es importante, también, reconocer el importantísimo y decisivo papel que juegan la interacción social y el lenguaje en tal proceso.

2) Aunque el objetivo de nuestro trabajo en ningún momento fue la construcción del área y del perímetro de figuras geométricas bidimensionales; el hecho de haber realizado un aprendizaje de los tratamientos figurales condujo a varias conclusiones que aportan en torno a su reflexión:

Por lo general la forma como algunos textos escolares acostumbran a definir el área de figuras planas; unido a la manera como estos presentan actividades que buscan reflexionar sobre la asignación de un número a la superficie de una figura y a la estimación de áreas; induce una visualización local sobre las figuras geométricas en cuestión. En consecuencia, propenden a la aplicación de tratamientos aritméticos, como el conteo, que se encuentran muy lejos de posibilitar una verdadera reflexión en lo que corresponde al estudio de las magnitudes.

En los textos escolares analizados en esta investigación no se encontraron actividades que permitieran la reflexión del área a partir de comparaciones cualitativas. Lugar donde las posibilidades heurísticas que brindan las figuras juegan un papel determinante a la hora de reflexionar a cuál cualidad de las figuras bidimensionales, se hace referencia cuando se habla de área. Tampoco se identifican actividades que induzcan a la reflexión en torno a que algunas figuras pueden tener igual área, pero diferente contorno global.

Es importante recordar que el área no es el único tipo de magnitud sobre el cual se reflexiona en la escuela. El perímetro también se constituye en una magnitud de relevancia en el aprendizaje de los Sistemas Métricos y por lo general existe, entre los estudiantes, una fuerte confusión entre estos dos tipos de magnitudes[14]. En consecuencia, que nuestros estudiantes, por efecto de la complejidad que les representa realizar un cambio dimensional en la forma de ver sobre una figura a la hora de intentar transformarla en otra de contorno global diferente, apliquen sobre una figura operaciones figurales sobre sus unidades constituyentes de dimensión 1; permite, al mismo tiempo, reflexionar sobre uno y otro tipo de magnitud; Además, esta forma de actuar posibilita la comparación entre figuras según la longitud de sus contornos: con la ayuda de un compás o una tira de papel los estudiantes pueden comparar cualitativamente el perímetro de dos figuras mediante la unión de las longitudes de sus partes constituyentes de dimensión 1. También, el actuar de esta manera permite no solo establecer relaciones de equivalencia y orden entre los perímetros de dos figuras; sino que además posibilita la construcción de figuras con igual área y distinto perímetro, igual perímetro y distinta área e igual perímetro e igual área; acciones determinantes a la hora de separar estos dos tipos de magnitudes ante los ojos de los estudiantes.

Consideramos, que la presencia de la confusión entre área y perímetro en un grupo tan reducido

[14]Douady, R. & Perrin, M. *Mesures des longueurs et des aires.* Brochure N 48. IREM Paris Sud. 1983
Jaquet, F. *Le conflit aire-perimétre. Première partie.* L´Educazione Matematica. 2 (2), 2.000, pp. 66-75
Jaquet, F. *Le conflit aire-perimétre. Deuxième partie.* L´Educazione Matematica. 2 (3), 2000, pp. 126-143

de estudiantes (solo 2 de los 30 estudiantes participantes en la investigación), se debe a la aptitud figural asumida por ellos a la hora de enfrentar la problemática planteada.

3) Las conclusiones que se derivan de este trabajo dejan algunas líneas abiertas sobre la enseñanza del Registro Semiótico de las figuras geométricas y sobre la relación de este con el aprendizaje del área de figuras geométricas bidimensionales. Estas se relacionan con aspectos que la investigación no involucra o que se desprenden de las reflexiones tratadas:

En primer lugar, en lo que corresponde a la complejidad que subyace a acompañar discursivamente lo que se ve en una figura; nuestra atención se centró en la función referencial. Pero, no basta con reconocer la amplia gama de formas de designar las figuras que los estudiantes de manera espontánea ponen en acto, ni identificar la potencia, exactitud y pertinencia de cada una de ellas. Para discriminar la complejidad que subyace al acompañar discursivamente lo que se ve en las figuras; se hace indispensable, y a la vez urgente, desarrollar nuevas investigaciones que permitan indagar sobre las maneras de actuar de los estudiantes en el momento de poner en acto las otras tres funciones que conceden a la Lengua Natural su naturaleza discursiva: apofántica, de expansión discursiva y de reflexividad. Es importante recordar que es sobre nosotros, como educadores matemáticos, que recae la responsabilidad de enseñar a leer y escribir en matemáticas; El no asumir con la responsabilidad, seriedad y dedicación esta tarea, significa ignorar el importantísimo e ineludible papel que juega el lenguaje en el desarrollo de cualquier tipo de interacción humana.

Por otra parte, en relación a la construcción del área de figuras geométricas bidimensionales, en este trabajo se dan algunas pautas a tener en cuenta en el diseño de situaciones didácticas que susciten en las aulas escolares la reflexión en torno a este objeto métrico y donde las figuras geométricas carguen de sentido y significado su aprendizaje. Sin embargo, solo se hizo énfasis en uno de tres aspectos que a nuestra manera de ver son vitales en la construcción del área: la comparación cualitativa entre figuras a partir de sus áreas, y se dejaron de lado las otros dos: la asignación numérica y la construcción de formulas para calcular el área de figuras básicas. Se hace necesario, entonces, liderar nuevos procesos de investigación que centren su atención en la complejidad y posibilidades figurales que de ellos se desprenden; En consecuencia, poder explicitar variables didácticas que permitan discriminar el papel que juega el Registro semiótico de las Figuras, la visualización y los factores de visibilidad en estos dos aspectos; así como las dificultades y obstáculos a los cuáles se ven enfrentados los estudiantes al articular las figuras con otros registros de naturaleza diferente.

Por último, pero en la misma línea de ideas, es importante asumir que el aprendizaje de los tratamientos que posibilita el Registro semiótico de las Figuras, la discriminación de las diferentes formas de ver que este permite y el reconocimiento del papel que juegan los diferentes factores de visibilidad que se encuentran presentes; es un asunto de gran importancia no solo para el estudio de la geometría, si no de gran parte de las matemáticas escolares. Pero no basta con la discriminación de las características al interior de este registro. Es mucho más importante aún, reconocer las variables que se ponen en acto ante su coordinación con otros registros y en consecuencia se establece la necesidad de identificar aquellos objetos y procesos matemáticos cuyo aprendizaje susciten tal reflexión: el razonamiento deductivo, para la articulación de las figuras con la lengua natural especializada; la resolución y planteamiento de problemas aritméticos donde intervienen los números fraccionarios o en la construcción de estos objetos matemáticos, para la articulación de las figuras con la escritura aritmética.

Bibliografía

[1] Brousseau, G. *Les objets de la didactique des mathématiques. Bourdeaux*: IREM, 1982. p.1. Conferencia dictada en la Segunda Escuela de Verano sobre Didáctica de las Matemáticas que se realizó en Olivet (Orleans) entre el 5 y el 17 de julio de 1982.

[2] Douady, R. & Perrin, M. *Mesures des longueurs et des aires*. Brochure N 48. IREM Paris Sud. 1983

[3] Duval, R. *Approveche Cognitive des Problèmes de géométrie en termes de congruente*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitivesm eu. 1998.

[4] ________*Geometría desde un punto de vista cognitivo*. In Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 st Century An ICMI Study. In ICMI Study. Kluwer Academic publishers, 1998.

[5] ________*Semiosis y pensamiento humano*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Cali. Colombia. Artes Gráficas Univalle. 1999.

[6] ________ *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Cali. Colombia. Merlín I. D. 2004.

[7] Jaquet, F. *Le conflit aire-perimétre. Première partie.* L´Educazione Matematica. 2 (2), 2.000, pp. 66-75

[8] Jaquet, F. *Le conflit aire-perimétre. Deuxième partie.* L´Educazione Matematica. 2 (3), 2000, pp. 126-143

[9] Marmolejo, G. *Algunos elementos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras geométricas: procesos de visualización y factores de visibilidad*. Tesis magister no publicada. Universidad del Valle. Colombia. 2007

[10] Marmolejo, G. & Vega, M. *Geometría: áreas, figuras y visualización*. Proyecto de investigación Enunciación y Significación de las Matemáticas en la Básica Primaria. Santiago de Cali. 2003.

[11] Mesquita, A. *L'influence des aspects figuratifs dans lárgumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Strasbourg. Francia. 1990

[12] Ministerio de Educación Nacional. *Matemáticas: Lineamientos curriculares*. Santa fe de Bogotá. Panamericana Formas e impresos. 1998.

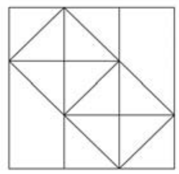
[13] ________________________ *Análisis y Resultados de las pruebas de Matemáticas - T.I.M.S.S./96*. Colombia. Santafé de Bogotá. Creamos Alternativas. 1998.

[14] Padilla. V. *L'influence dé une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. Tesis doctorado no publicada. Universidad de Strsbourg. Paris. 1992.

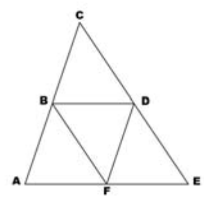
Anexos

Situación 1

PARTE 1: ¿Cuántos y cuáles cuadrados es posible encontrar en la siguiente figura? Explico mi respuesta.



PARTE 2: ¿Cuántas y cuáles figuras es posible encontrar en el siguiente diseño? Explico mi respuesta.



Situación 2

PARTE 1: Observa la figura 1 y realiza las siguientes actividades. Explico mi procedimiento.

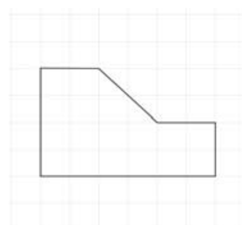


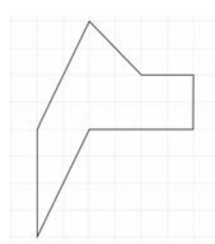
Fig. 1

ACTIVIDAD 1: Divido la superficie de la figura en cuatro partes: un triángulo, dos rectángulos y un cuadrado. Explico mi procedimiento.

ACTIVIDAD 2: en un paralelogramo (que no sea un rectángulo, ni un cuadrado), un trapecio y dos triángulos. Explico mi procedimiento.

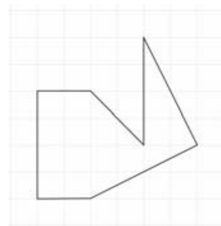
Situación 3

PARTE 2: Transformo la figura 1 en la siguiente:



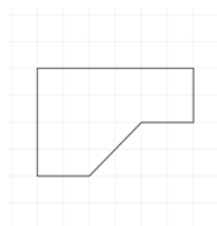
Describo y explico mi procedimiento.

PARTE 3: Transformo la figura 1 en la siguiente:



Describo y explico mi procedimiento.

PARTE 4: Transformo la figura 1 en la siguiente:



Describo y explico mi procedimiento.

Situación 4

Juan desea comprar un terreno para construir su casa. Un vendedor le ofrece cuatro terrenos de formas diferentes (observa las figuras) y asegura que todos tienen la misma superficie. Juan no piensa igual y, por el contrario, afirma que unos terrenos tienen mayor superficie que otros. ¿Quién tiene la razón? Explico y justifico mi respuesta