Algunos resultados recientes en didáctica pitagórica

Jairo Albero Cuervo Grisales
Profesor Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
matjairocuervo@hotmail.com

Cristian Felipe García Spina
Estudiante Programa Pre-Talentos
Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia

Manuela González Morales
Estudiante Programa Pre-Talentos
Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia

Nicolás Hernández Bernal
Estudiante Programa Pre-Talentos
Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia

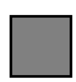
Resumen

Se muestran algunos resultados obtenidos con niños entre 9 y 12 años que pertenecen al Proyecto Semicírculo de la Universidad Sergio Arboleda y que estuvieron en el primer semestre de 2007 en el Programa Pre-talentos. Se toma como figura principal el cuadrado y se definen algunas reglas para construir figuras a partir de éste, en donde los niños (as) generan nuevas figuras y se empieza a estudiar algunas características de estas figuras como lo son, las relaciones entre los nodos, los lados y las regiones que hay en cada una de ellas, con el fin de inducirlos hacia el Teorema de Euler. Durante este proceso se generan nuevos resultados, entre ellos el Teorema de Cristian, el cual se muestra a continuación en el desarrollo del presente trabajo.

Principios de la teoría

- Figura Básica.
- Reglas para Construir Figuras.
- Propiedades de las figuras.

Figura básica



El CUADRADO lo utilizaremos como "Calculo", es decir, "Unidad"o "Alfa"; esta es una de las tetraktys básicas del pitagorismo: cuatro lados iguales, cuatro vértices y cuatro ángulos iguales.

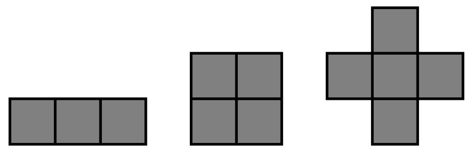
Tomando un cuadrado como unidad de área y su lado como unidad de longitud, es posible construir figuras de diferentes formas y tamaños, siguiendo determinadas reglas y hacer cuentas con estas figuras.

Reglas para construir figuras

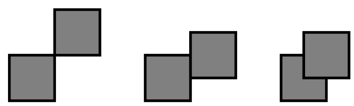
Definición 1: Para formar una figura con cuadrados del mismo tamaño tomados cada uno como alfas, se colocan unos al lado de otros de tal manera que uno de los lados de cada cuadrado coincida con uno de los lados de otro y sin que los cuadrados se traslapen o superpongan.

Ejemplo:

- Es figura



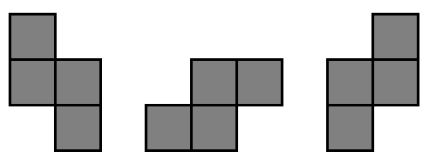
- No es figura



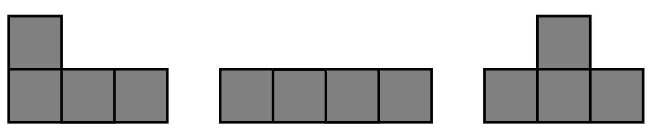
Definición 2: Dos figuras se consideran iguales si tienen la misma forma y el mismo número de alfas (es decir, tienen la misma área), independientemente del lugar y de la dirección en que estén colocados.

Ejemplo

- Las siguientes son variantes de la misma figura

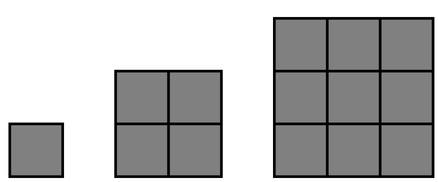


- No son la misma figura



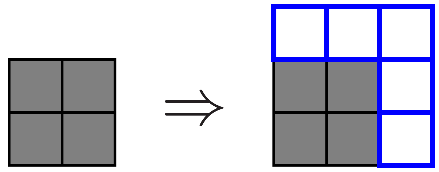
Figuras especiales

- **Cuadrado**

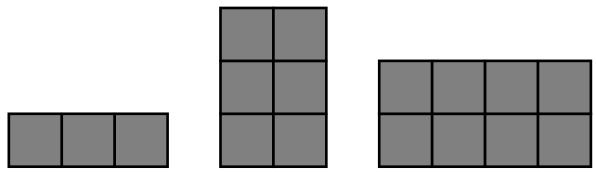


¿Como se genera un cuadrado a partir de uno dado?

Agregando horizontal y verticalmente, la cantidad de alfas necesarios, de tal forma que a partir del cuadrado de lado n se genere uno de lado $n+1$



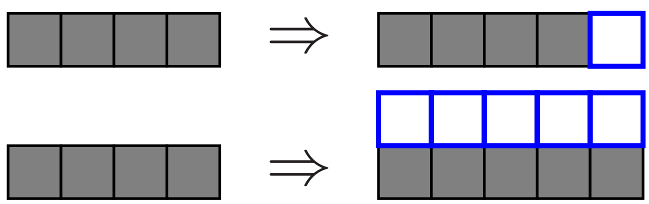
- **Rectángulo**



¿Como se genera un rectángulo a partir de uno dado?

Existen dos maneras posibles:

La primera, agregando n alfa en el extremo de la figura ya dada y la segunda, agregando una fila con la misma cantidad de alfas en la parte superior o inferior.

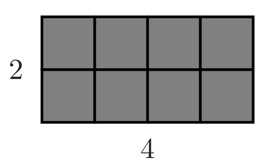


Propiedades de las figuras

Se puede demostrar algunas propiedades de las figuras por el método pitagórico, entre estas propiedades se encuentra el área y el perímetro de un cuadrado o un rectángulo.

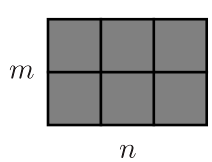
- **Perímetro:**

Rectángulo



$$P = 2(2) + 2(4) = 12$$

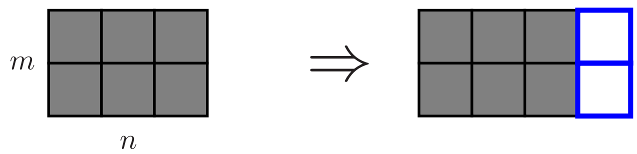
En general,



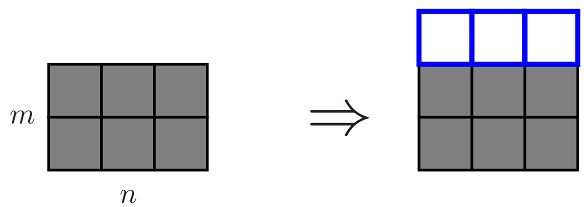
$$P = 2(m) + 2(n)$$

Demostración:

Supongamos que se cumple la fórmula del perímetro para un rectángulo de $m \times n$. Entonces existen dos formas de generar un rectángulo a partir de éste:

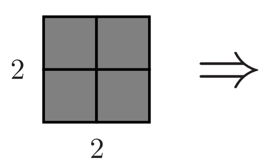


$$P = 2(m) + 2(n) \implies P = 2(m) + 2(n) + 2$$
$$P = 2(m) + 2(n+1)$$



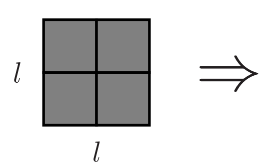
$$P = 2(m) + 2(n) \implies P = 2(m) + 2(n) + 2$$
$$P = (2m + 2) + 2n$$
$$P = 2(m+1) + 2n$$

Cuadrado



$$P = 4(2) = 8$$

En general,

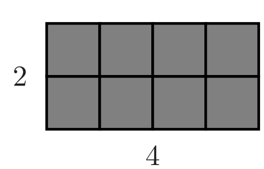


$$P = 4(l)$$

La demostración es análoga a la anterior.

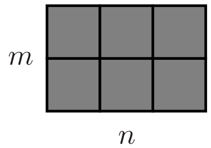
- **Área:**

  Rectángulo



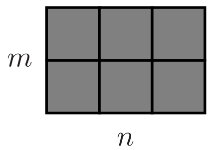
$$A = 2 \times 4 = 8$$

En general,

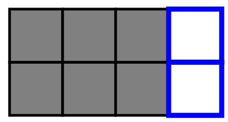


$$A = m \times n$$

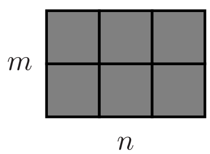
Demostración:



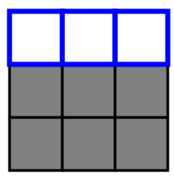
$\Longrightarrow$



$$A = m \times n \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= m \times n + m \times 1 \\ A &= m \times n + m \\ A &= m \times (n+1) \end{aligned}$$

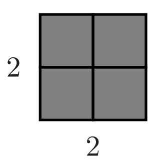


$\Longrightarrow$



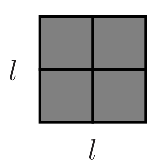
$$A = m \times n \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= m \times n + n \times 1 \\ A &= m \times n + n \\ A &= n \times (m+1) \end{aligned}$$

Cuadrado



$$\Longrightarrow \quad A = 2 \times 2 = 4$$

En general,

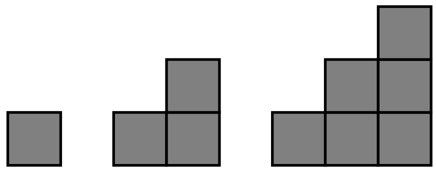


$$\Longrightarrow \quad A = l \times l = l^2$$

La demostración es análoga a la anterior.

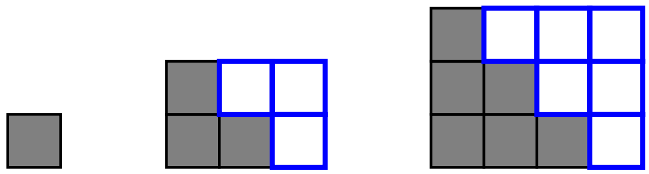
Ahora veremos que también con la didáctica pitagórica se pueden construir, la suma de los primeros n números naturales y la suma de los n primeros números impares y también se pueden hacer las demostraciones respectivas usando el método pitagórico:

Números Triangulares



$1 \qquad 1+2 \qquad 1+2+3$

Para poder encontrar la suma de éstos, completamos el rectángulo como se observa a continuación:

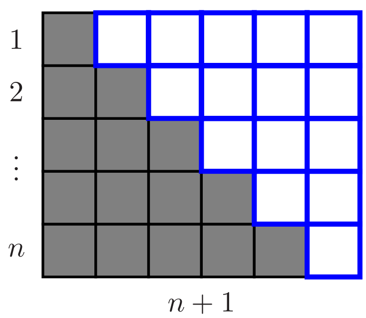


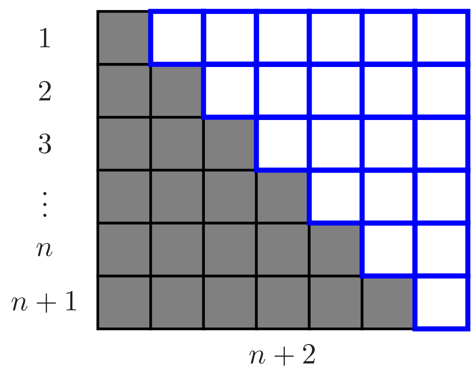
$$1 = 1 \qquad 1+2 = \frac{2\times 3}{2} \qquad 1+2+3 = \frac{3\times 4}{2}$$

De lo anterior se puede concluir que:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración:

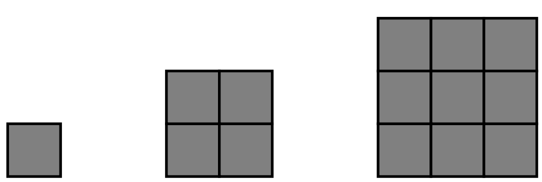




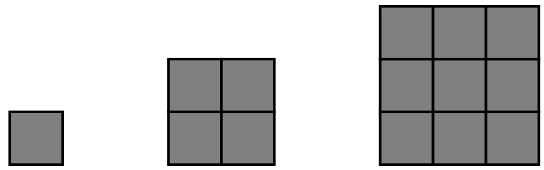
$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= \frac{n^2+3n+2}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Ahora veamos la suma de los n primeros números impares



$1 \qquad 1+3 \qquad 1++3+5$

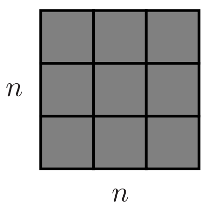


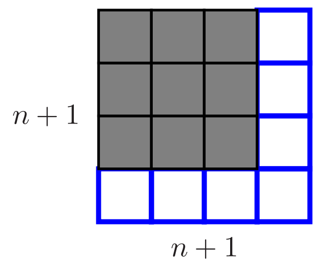
$1 = 1^2$ $\quad$ $1 + 3 = 2^2$ $\quad$ $1 + +3 + 5 = 3^2$

En general,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Demostración:



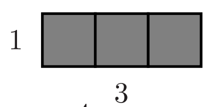


$$1 + 2 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

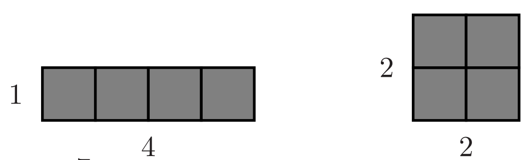
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) &= n^2 + 2(n + 1) - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

¿Cuántos rectángulos se pueden formar con un número dado de alfas?

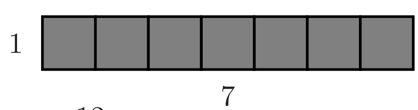
- Para $n = 3$



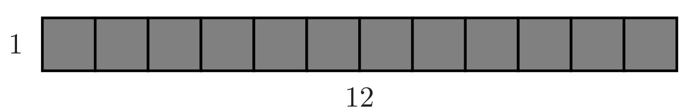
- Para $n = 4$

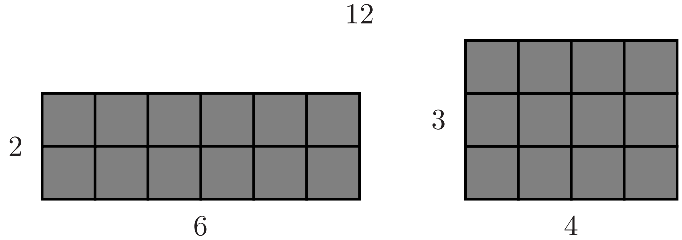


- Para $n = 7$



- Para $n = 12$





De lo anterior podemos concluir el siguiente teorema:

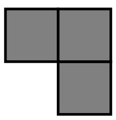
Teorema: Dado un número n, existe un único rectángulo de área n, si sólo si n es un número primo.

- Si n es un número que no es primo, *¿Cuántos rectángulos de área n se pueden construir?*

Se puede construir tantos rectángulos como factorizaciones tenga el número.

En una figura existen **nodos** que son los mismos vértices, **lados** y **regiones** que son las formadas por cada uno de los alfas, incluyendo la región infinita que es el plano en donde se encuentra la figura.

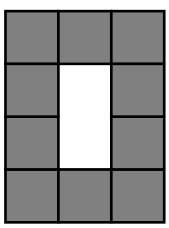
Ejemplos:

1. 

   Nodos: 8

   Lados: 10

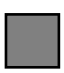
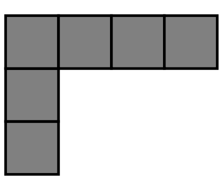
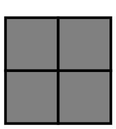
   Regiones: 4

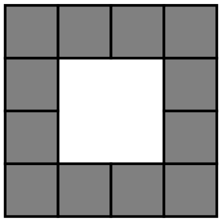
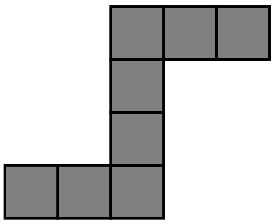
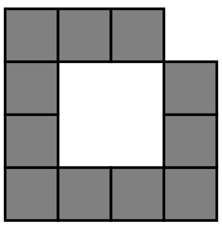
2. 

   Nodos: 20

   Lados: 30

   Regiones: 12

Figura	**Nodos (N)**	**Lados (L)**	**Regiones (R)**
 **F1**	4	4	2
 **F2**	14	19	7
 **F3**	9	12	5

 **F4**	24	36	14
 **F5**	18	25	9
 **F6**	23	34	13

La anterior información se condensa en la siguiente tabla:

Figura	**Nodos**	**Lados**	**Regiones**
F1	4	4	2
F2	14	19	7
F3	9	12	5
F4	24	36	14
F5	18	25	9
F6	23	34	13

Al analizar la anterior tabla se deduce la siguiente ecuación:

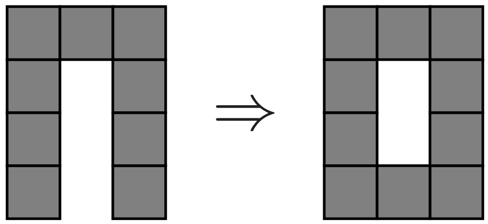
Teorema 1: ***(Ecuación de Euler)***

$$(N + R) - L = 2$$

Esta ecuación vale para cualquier figura que cumpla la Definición 1.

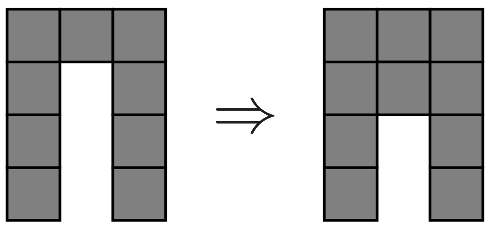
Demostración:

Para ver la demostración del anterior teorema, se debe analizar los casos que se pueden presentar, suponiendo una figura con n alfas y a partir de esta construir la figura $n + 1$ alfa:

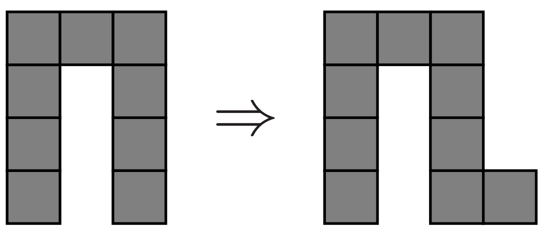


N=0
R=2
L=2

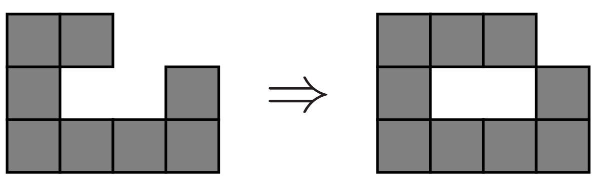
Se puede ver que al generar la figura $n+1$, no se agrega ningún nodo, pero si se agregan dos regiones y dos lados, lo cual implica que si aplicamos el teorema de Euler no se está agregando nada en la figura $n+1$, de la misma manera ocurre con los siguientes posibles casos:



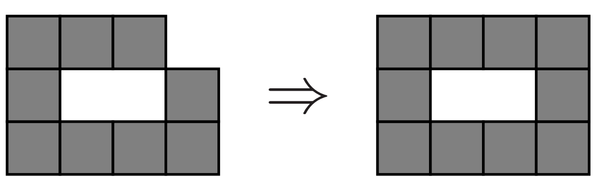
N=0
L=1



R=1
N=2
R=1
L=3



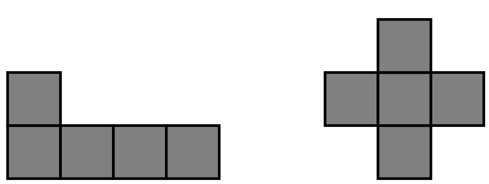
N=1
R=2
L=3



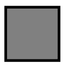
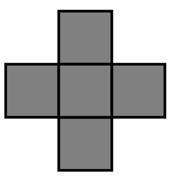
N=1
R=1
L=2

Definición 3: (Cinta tipo 1) Es una figura simplemente conexa en la cual no hay un nodo con cuatro regiones finitas adyacentes.

- Son cintas de tipo 1



- No son cintas de tipo 1

Cinta Tipo 1	**Nodos (N)**	**Regiones (R)**	**Lados (L)**
	4	2	4
	6	3	7
	8	4	2
	12	6	16
n-ésima	$2n+2$	$n+1$	$3n+1$

De la anterior tabla se puede establecer unas ecuaciones para poder determinar los nodos, lados y regiones en términos de la cantidad de alfas para lãs cintas de tipo 1. Veamos a continuación las demostraciones.

Demostración:

- **Nodos:**

$2n+2$ $\qquad$ $2n+2+2$

$$(2n+2)+2 = 2(n+1)+2$$

- **Lados:**

$3n+1$ $\qquad$ $3n+1+3$

$$(3n+3)+1 = 3(n+1)+1$$

- **Regiones:**

$n+1$ $\qquad$ $n+1+1$

$(n+1)+1$

Durante la actividad realizada con el grupo de estudiantes de Pré-talentos, el niño Cristian Spina, plantea el siguiente ecuación:

Teorema 2: ***(Cristian)***

$$(L+R)-N=2n$$

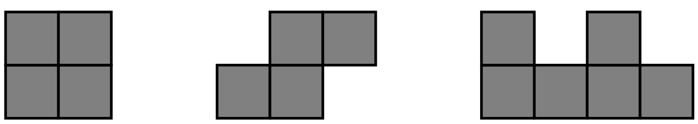
n es el número de alfas y se cumple para cintas de tipo 1.

Demostración:

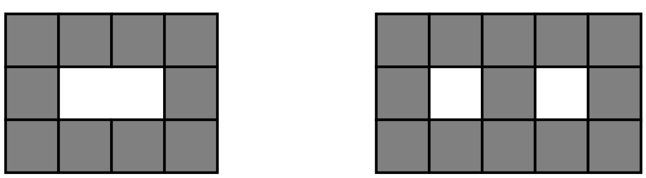
$$\begin{aligned}(L+R)-N &= (3n+1+n+1)-(2n+2)\\ &= 4n+2-2n-n\\ &= 2n\end{aligned}$$

Definición 4: (Cinta tipo 2) es una figura simplemente conexa.

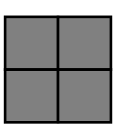
- Son cintas de tipo 2:



- No son cintas de tipo 2:



¿Se cumple el Teorema 2 para cintas de tipo dos?



L R N

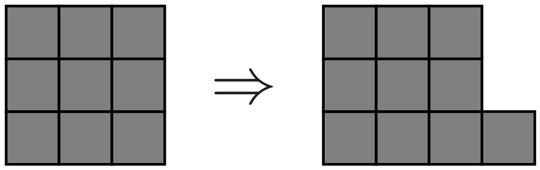
$12+5-9=2(4)$ (Si se cumple)

Teorema 2: ***(Cristian)***

$$(L+R)-N=2n$$

n es el número de alfas y se cumple para cintas de tipo 2.

Demostración:



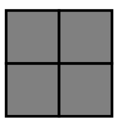
$$(L+R)-N=2n \qquad (L+3)+(R+1)-(N+2)=L+R-N+2$$
$$=2n+2$$
$$=2(n+1)$$

Generalizando el anterior teorema, se tiene que:

Teorema 3:

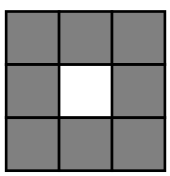
$$(L+R)-N=2(R-1)$$

Este teorema se cumple para cualquier figura que cumpla la Definición 1.



$L+R-N=2(R-1)$ (Si se cumple)

$12+5-9=2(5-10)$



$24+10-16=2(10-1)$ (Si se cumple)

Demostración:

Sabemos que $N+R-L=2$ entonces,

$$\begin{aligned} N+R-L+2L &= 2+2L \\ N+R+L &= 2+2L \\ N-2N+R+L &= 2+2L-2N \\ (L+R)-N &= 2(1+L-N) \\ (L+R)-N &= 2(1+L-N+1-1) \\ (L+R)*N &= 2(R-1) \end{aligned}$$

Todo lo anterior se puede trabajar utilizando como alfas triángulos equiláteros o con polígonos regulares del mismo tamaño.

Ahora generalicemos la teoría:

- Reglas para formar figuras
- Generalización del Teorema de Euler

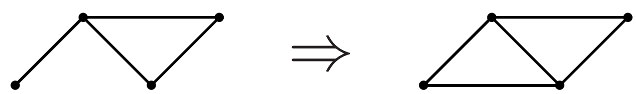
- Generalización para Teorema 3

1. Reglas para formar figuras

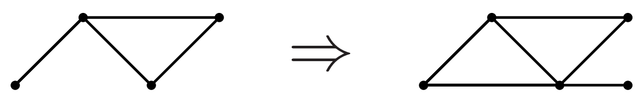
   1.1. Un punto es una figura.

   1.2. Si se tiene una figura se puede construir a partir de ella otra figura de 2 maneras posibles:

   a. Se cierra la figura uniendo dos puntos sin que se intersecten 2 segmentos.



   b. Agregar un punto y unirlo con un segmento de línea a un punto de la figura dada, sin cortar ningún segmento.



A continuación veremos que también se sigue cumpliendo el Teorema de Euler y el Teorema 3

Teorema de Euler:

$$(N + R) - L = 2$$

Demostración:

i.

$$\begin{array}{ccc} N & R & L \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$1 + 1 - 0 = 2 \qquad \text{(si)}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \end{array}$$

$$2 + 1 - 1 = 2 \qquad \text{(si)}$$

ii. Supongamos que el teorema se cumple para una figura dada. Probemos que vale para la figura nueva hay dos casos:

   a. Cerrando la figura la cuenta nos daría:

$$\begin{array}{ccc} N & R & L \end{array}$$

$$0 + 1 - 1 = 0 \quad \text{(No se añade nada)}$$

   b. Añadiendo a la figura un punto y un segmento la cuenta nos daría:

$$\begin{array}{l} N \quad R \quad L \\ 1 + 0 - 1 = 0 \quad \text{(No se añade nada)} \end{array}$$

Teorema 3:

$$(L + R) - N = 2(R - 1)$$

Demostración:

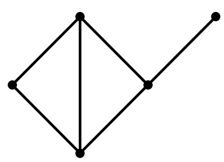
i.

$$L \quad R \quad N$$

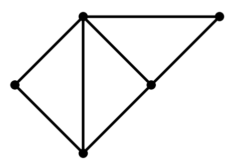
$$0 + 1 - 1 = 2(1 - 1)$$

$$1 + 1 - 2 = 2(1 - 1)$$

ii. Dada uma figura se puede construir otra de dos maneras posibles según lo explicado anteriormente, por lo tanto, se debe analizar los siguientes casos:



$$\Rightarrow$$

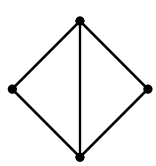


$$(L + R) - N = 2(R - 1) \quad \Rightarrow \quad (L + 1) + (R + 1) - (N + 0) = 2((R + 1) - 1)$$

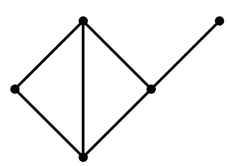
$$L + R - N + 2 = 2R$$

$$(L + R) - N = 2R - 2$$

$$(L + R) - N = 2(R - 1)$$



$$\Rightarrow$$



$$(L + R) - N = 2(R - 1) \quad \Rightarrow \quad (L + 1) + (R + 0) - (N + 1) = 2((R + 0) - 1)$$

$$L + 1 + R - N = 2(R - 1)$$

$$(L + R) - N = 2(R - 1)$$

Bibliografía

[1] GRUPO MUSA.E1, Universidad Sergio Arboleda. *Cuatro propuestas DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICAS*, Colciencias, Bogotá, Colombia, 2005.