Un método para sacar raíces cuadradas exactas

Angie Marcela Acosta Maldonado
C.E.I.P Ciutat Cooperativa
Barcelona, España
angiemar97@hotmail.com

Primitivo Belén Acosta Humánez
Departamento de Matemática Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona, España
primitivo.acosta@upc.edu

Resumen

En este artículo se presenta, con una gran variedad de ejemplos, un método para sacar raíces cuadradas exactas. Este método se presento por primera vez hace 15 años con el nombre de ley Costeana, pero a diferencia de ahora se enfatiza en el hecho que puede ser implementado en el curso de cuarto de primaria, al cual asiste la autora (primer autor) de este articulo.
Palabras clave. Criba de Eratóstenes, descomposición en factores primos, Ley Costeana, números primos, raíces cuadradas.

Introducción

Este artículo corresponde a una mejora ampliada de la conferencia (con el mismo título) presentada en el *XVIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y VI Encuentro de Aritmética en la Universidad Pedagógica Nacional* (2.007), y está fuertemente influenciado por el artículo *Ley Costeana* el cual fue publicado en las *Memorias del Primer Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemáticas* (ver [4]). Posteriormente, este método se publicó en la *Revista Notas de Matemáticas* de la Universidad Nacional de Colombia (ver [2]), en la Revista Muzangá de la Universidad de Sucre (ver [1]), en las *Memorias del Primer Seminario de Matemáticas y Ciencias Afines del Tecnológico Inespro* (ver [5]) y en el Apéndice A del libro *Aprenda Jugando y Juegue Aprendiendo Matemáticas Elementales* (ver [3]). El lector interesado puede obtenerlos en la página web http://www-ma2.upc.edu/primi

Normalmente en el curso cuarto de primaria los niños deben saber multiplicar y dividir, y es por esta razón que el método que presentamos es adecuado para niños de este año escolar. Esta afirmación se debe a que la autora de este artículo, quien hace parte del curso cuarto de primaria, lo ha expuesto ante sus compañeros. El resultado obtenido el día de la exposición fue que todos habían entendido y además, algunos estudiantes resolvieron en el tablero raíces cuadradas con este método.

Para una mayor comprensión y con fines pedagógicos, se ha tratado al máximo de respetar el lenguaje (para las definiciones, teoremas, etc..) que puede utilizar un niño que asiste a un curso de cuarto de primaria, sin demeritar la rigurosidad de los contenidos, razón por la cual se presentan muchos ejemplos.

1. Definiciones y resultados básicos

Para aplicar este método y obtener raíces cuadradas exactas se necesitan los siguientes elementos (definiciones y teoremas):

- Números primos.
- Números primos gemelos.
- Teorema fundamental de la aritmética
- Criba de Eratóstenes.
- Descomposición en factores primos.
- Raíz cuadrada.

Nota 1.1. *De ahora en adelante solo se considerarán números positivos (números naturales sin incluir el cero) .*

Definición 1.2 (Números Primos). *Los números primos son los números que solo se pueden dividir exactamente*[1] *por* 1 *y por ellos mismos. Es decir, tienen solo dos divisores.*

Ejemplo 1.3. *El número* 5 *es un número primo porque para que el resíduo sea cero solo se puede dividir por* 1 *y por* 5*.*

Definición 1.4 (Números Primos Gemelos). *Son dos números primos en donde entre los dos solo puede caber un número, es decir, son primos impares seguidos. Un caso de primos trillizos es* $3, 5, 7$*.*

Ejemplo 1.5. *Entre el número* 17 *y el número* 19 *(ambos primos) solo cabe el número* 18*. Los números* 17 *y* 19 *son primos gemelos.*

Teorema 1.6 (Teorema Fundamental de la Aritmética). *Todo número natural, distinto de* 0 *y* 1*, es primo o es producto de primos*[2]*.*

Ejemplo 1.7. *El número* 20 *es compuesto, el número* 11 *es primo, el número* 1 *no es primo y tampoco es compuesto.*

Definición 1.8 (Criba de Eratóstenes). *Es un cuadro en donde se clasifican o detectan los números primos y los números compuestos. Se trata de hacer una lista en donde vamos eliminando los múltiplos de los primos. Los números que sobrevivan a esta eliminación son los números primos.*

Ejemplo 1.9. *Hacemos la criba de Eratóstenes hasta el número* 50*, tal como se ilustra en la figura* 1*. No colocamos el número* 1 *porque no es primo y tampoco es compuesto, así que comenzamos por el número* 2 *que es un número primo y por lo tanto no lo coloreamos, pero si coloreamos de gris todos los números que se dejan dividir exactamente por el número* 2*. Luego observamos que el primer sobreviviente (número no coloreado) después del número* 2 *es el número* 3 *al cual no coloreamos, pero coloreamos todos los que se dejen dividir exactamente por el número* 3*. Luego, después del número* 3 *el primer sobreviviente es el número* 5*, repetimos este proceso hasta que nos quede el listado de todos números primos menores que* 50*, los cuales son* 3*,* 5*,* 7*,* 11*,* 13*,* 17*,* 19*,* 23*,* 29*,* 31*,* 37*,* 41*,* 43 *y* 47*.*

[1] Una división es exacta si el resíduo es cero.

[2] A estos números se les denomina números compuestos porque aparte de la unidad y de ellos mismos, tienen un número finito de divisores. De esta forma, el número 1 no es primo y tampoco es compuesto. Además, por la Nota 1.1 no consideramos el cero

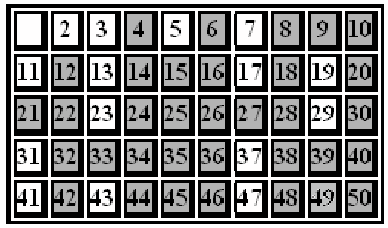

Figura 1. Criba de Eratóstenes de números primos menores de 50.

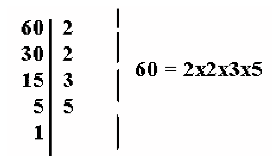

Figura 2. Descomposición en factores primos del número 60.

Definición 1.10 (Descomposición en factores primos). *La descomposición en factores primos es una forma abreviada de dividir exactamente en forma repetitiva cualquier número natural entre los números primos ordenados de mayor a menor. Se ubica a la izquierda el número que se quiera descomponer y por lo tanto es el primer dividendo, luego se ubica a la derecha el primer primo que divida exactamente a este dividendo, de manera que tanto dividendo como divisor estén separados por una línea vertical. El segundo dividendo es el primer cociente obtenido entre primer dividendo y el primer divisor, el cual es ubicado al lado izquierdo y se busca que este nuevo dividendo se divida exactamente por el mismo primo del primer dividendo o por otro que siga en orden el cual se ubicará al lado derecho de la línea vertical y así sucesivamente hasta que el último cociente*[3] *sea* 1.

Ejemplo 1.11. *Para ilustrar la anterior definición vamos a descomponer* 60 *en factores primos, tal como se puede observar en la figura* 2*. Observamos que* 60 *se puede dividir entre* 2 *y el cociente es* 30 *que a su vez se puede nuevamente dividir entre* 2 *y el nuevo cociente es* 15*. Ahora bien,* 15 *se divide entre* 3 *y el cociente es* 5 *y como* 5 *es un número primo lo dividimos por él mismo y el cociente nos da* 1*, lo cual indica que ya hemos completado la descomposición en factores primos.*

Definición 1.12 (Raiz Cuadrada). *La raíz cuadrada de un número es el número que multiplicado por si mismo nos da como resultado el número original*[4] *(el número al que se le buscaba la raíz cuadrada). El símbolo que se utiliza para la raíz cuadrada es* $\sqrt{\square}$.

Ejemplo 1.13. *Vamos a calcular la raíz cuadrada de* 25*, en símbolos se escribe* $\sqrt{25}$*, para esto buscamos un número que multiplicado por si mismo de como resultado* 25*. En este caso es el* 5 *y por lo tanto* $\sqrt{25} = 5$.

[3] El estudiante puede hacer aparte las divisiones por el método clásico e ir colocando a la izquierda los cocientes que a su vez se convierten en dividendos y a la derecha se colocan los divisores.

[4] Hay que recordar que el cuadrado de un número es el resultado de multiplicar ese número por si mismo.

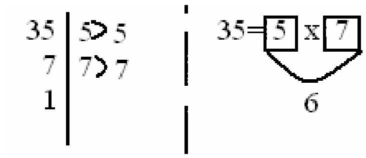

Figura 3. Procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 36.

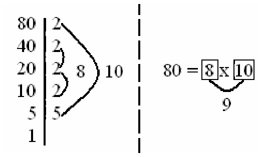

Figura 4. Procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 81.

2. Exposición del Método

En esta sección presentamos el método para sacar raíces cuadradas exactas, el cual fue comentado en la introducción, en forma de teorema.

Teorema 2.1 (P. Acosta Humánez, [4]). *Todo número que al restarle* 1 *se descomponga en factores primos y se pueda expresar como el producto de dos números pares o impares seguidos, tiene raíz cuadrada exacta que es exactamente el único número que cabe entre los dos números pares o impares seguidos.*

Nota 2.2. *El método presentado en el teorema 2.1 sirve como criterio para detectar si un número tiene raíz cuadrada exacta, puesto que si a un número al restarle* 1 *no hay manera de expresarlo como el producto de dos números pares o impares seguidos, entonces ese número no es un cuadrado perfecto*[5].

Ejemplo 2.3. *Vamos a sacar la raíz cuadrada de* 36. *Tal como vemos en la figura* 3*, a* 36 *le restamos* 1*, descomponemos en factores primos y como* 35 *es un número impar buscamos dos números impares seguidos que multiplicados den* 35*, siendo los números buscados* 5 *y* 7*, por lo tanto la raíz cuadrada de* 36 *es* 6 *porque* 6 *es el único número que cabe entre* 5 *y* 7. *En símbolos tenemos*

$$36 - 1 = 35 = 5x7 \quad \sqrt{36} = 6.$$

Ejemplo 2.4. *Vamos a sacar la raíz cuadrada de* 81. *Tal como vemos en la figura* 4*, a* 81 *le restamos* 1*, descomponemos en factores primos y como* 80 *es un número par buscamos dos números pares seguidos que multiplicados den* 80*, siendo los números buscados* 8 *y* 10*, por lo tanto la raíz cuadrada de* 81 *es* 9 *porque* 9 *es el único número que cabe entre* 8 *y* 10. *En símbolos tenemos*

$$81 - 1 = 80 = 8x10 \quad \sqrt{81} = 9.$$

Ejemplo 2.5. *Vamos a sacar la raíz cuadrada de* 121. *Tal como vemos en la figura* 5*, a* 121 *le restamos* 1*, descomponemos en factores primos y como* 120 *es un número par buscamos dos*

[5] Cuadrado perfecto quiere decir que tiene raíz cuadrada exacta.

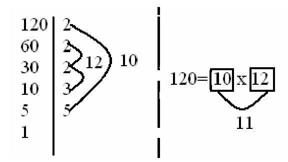

Figura 5. Procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 121.

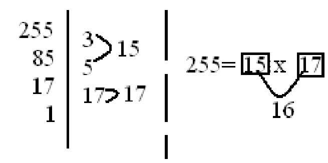

Figura 6. Procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 256.

números pares seguidos que multiplicados den 120*, siendo los números buscados* 10 *y* 12*, por lo tanto la raíz cuadrada de* 121 *es* 11 *porque* 11 *es el único número que cabe entre* 10 *y* 12*. En símbolos tenemos*

$$121 - 1 = 120 = 10x12, \quad \sqrt{121} = 11.$$

Ejemplo 2.6. *Vamos a sacar la raíz cuadrada de* 256*. Tal como vemos en la figura* 6*, a* 256 *le restamos* 1*, descomponemos en factores primos y como* 255 *es un número impar buscamos dos números impares seguidos que multiplicados den* 255*, siendo los números buscados* 15 *y* 17*, por lo tanto la raíz cuadrada de* 256 *es* 16 *porque* 16 *es el único número que cabe entre* 15 *y* 17*. En símbolos tenemos*

$$256 - 1 = 255 = 15x17, \quad \sqrt{256} = 16.$$

Ejemplo 2.7. *Vamos a sacar la raíz cuadrada de* 529*. Tal como vemos en la figura* 7*, a* 529 *le restamos* 1*, descomponemos en factores primos y como* 528 *es un número par buscamos dos números pares seguidos que multiplicados den* 528*, siendo los números buscados* 22 *y* 24*, por lo tanto la raíz cuadrada de* 529 *es* 23 *porque* 23 *es el único número que cabe entre* 22 *y* 24*. En símbolos tenemos*

$$529 - 1 = 528 = 22x24, \quad \sqrt{529} = 23.$$

Ejemplo 2.8. *Vamos a sacar la raíz cuadrada de* 1024*. Tal como vemos en la figura* 8*, a* 1024 *le restamos* 1*, descomponemos en factores primos y como* 1023 *es un número impar buscamos dos números impares seguidos que multiplicados den* 1023*, siendo los números buscados* 31 *y* 33*,*

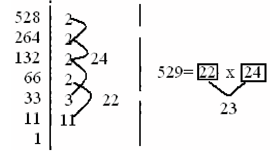

Figura 7. Procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 529.

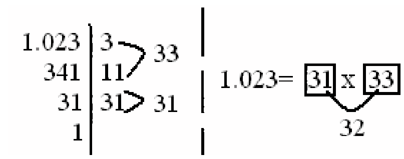

Figura 8. Procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 1,024.

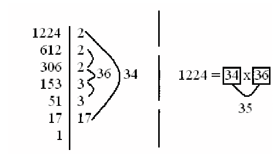

Figura 9. Procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 1,225.

por lo tanto la raíz cuadrada de 1024 *es* 32 *porque* 32 *es el único número que cabe entre* 31 *y* 33. *En símbolos tenemos*

$$1024 - 1 = 1023 = 31x33, \quad \sqrt{1024} = 32.$$

Ejemplo 2.9. *Vamos a sacar la raíz cuadrada de* 1225. *Tal como vemos en la figura* 9*, a* 1225 *le restamos* 1*, descomponemos en factores primos y como* 1224 *es un número par buscamos dos números pares seguidos que multiplicados den* 1224*, siendo los números buscados* 34 *y* 36*, por lo tanto la raíz cuadrada de* 1225 *es* 35 *porque* 35 *es el único número que cabe entre* 34 *y* 36*. En símbolos tenemos*

$$1225 - 1 = 1224 = 34x36, \quad \sqrt{1225} = 35$$

Ejemplo 2.10. *Vamos a sacar la raíz cuadrada de* 1681. *Tal como vemos en la figura* 10*, a* 1681 *le restamos* 1*, descomponemos en factores primos y como* 1680 *es un número par buscamos dos números pares seguidos que multiplicados den* 1680*, siendo los números buscados* 40 *y* 42*, por lo tanto la raíz cuadrada de* 1681 *es* 41 *porque* 41 *es el único número que cabe entre* 40 *y* 42*. En símbolos tenemos*

$$1681 - 1 = 1680 = 40x42, \quad \sqrt{1681} = 41.$$

3. Conclusiones y Comentarios Finales

Tal como mencionamos en la nota 2.2, este método puede utilizarse como criterio para determinar si un número entero tiene raíz cuadrada entera o no. También anotamos que existen varios

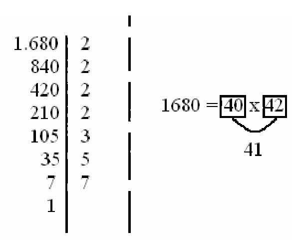

Figura 10. Procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 1,681.

métodos para sacar raíces cuadradas exactas, entre ellos está el de descomponer directamente el número sin restarle 1, pero pueden haber dificultades como en el caso de que la raíz cuadrada sea un numero primo grande. Por ejemplo, para calcular $\sqrt{529}$ hay que ir buscando un número primo que divida exactamente a 529. Con el método presentado aquí, podemos ver que éstos son los casos sencillos tal como presentamos en los ejemplos 2.5, 2.7 y 2.10. Sin embargo, también se presentan problemas con el método presentado en este artículo, estos problemas se dan cuando al restarle 1 a un número par[6], éste se descomponga como el producto de dos primos gemelos grandes. Como ejemplo, el lector puede intentar resolver $\sqrt{324}$ y debe darse cuenta de la dificultad de descomponer en factores primos al 323, puesto que dichos factores son 17 y 19.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a los organizadores del XVIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y VI Encuentro de Aritmética, Carlos Luque y Reinaldo Núñez, por permitirnos participar en el evento.

La autora desea agradecer al profesor Paco, a los compañeros del curso cuarto de primaria, a los funcionarios del CEIP Ciutat Cooperativa y a sus padres por el apoyo en la preparación de la conferencia.

Bibliografía

[1] P. Acosta Humánez, *Algunas Propiedades de sucesiones aritméticas*, Revista Muzangá **2**, Universidad de Sucre, Sincelejo (1.997)

[2] P. Acosta Humánez, *Algunas Regularidades de las sucesiones aritméticas*, Revista Notas de matemáticas **32**, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá (1.997)

[3] P. Acosta Humánez, "Aprenda Jugando y Juege Aprendiendo Matemáticas elementales", Primy Math Ediciones, Bogotá (1.998)

[4] P. Acosta Humánez, *Ley Costeana*, en Memorias del primer encuentro Nacioanl de Estudiantes de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán (1.992)

[5] P. Acosta Humánez, "Memorias del Primer Seminario de Matemáticas y Ciencias Afines del Tecnológico Inespro", Bogotá (1.998)

[6] Se está hablando del número al cual se le quiere sacar la raiz cuadrada exacta.