Particiones númericas: una experiencia significativa en la enseñanza de la matemática discreta

Yeison Alexander Sánchez Rubio
Licenciado En Matemáticas Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
yei506@yahoo.es

Resumen

Generalmente lo que se estudia en teoría de números está centrado en la operación de multiplicación, y en pocas ocasiones se realizan trabajos que se centren en la operación de adición de enteros no negativos. Durante el segundo semestre del 2006, uno de los cursos del club de matemáticas de la UPN, tuvo como fin desarrollar un trabajo (con niños entre 11 y 16 años) relacionado con la adición y la sustracción de números enteros no negativos. A partir de lo anterior se planteó y desarrolló una propuesta para el curso, consistente en cuatro actividades, estrechamente relacionadas con particiones numéricas, de la cual se obtuvieron resultados bastante significativos, en la que los estudiantes hacían uso de la recurrencia para obtener conjeturas.

Las particiones numéricas

La partición de un número es la representación de esté como suma de otros, la partición de un número podría verse de manera análoga a la factorización de un número que se trabaja comúnmente, teniendo en cuenta que para la factorización se tiene a los números primos que permiten determinar una única descomposición, pero para nuestro caso no hay números especiales que me determinen de manera única la descomposición o la representación de un número como suma de otros por lo que nuestra meta principal más allá de determinar las particiones de un número, es determinar la cantidad de particiones de un número dado. Para introducir el concepto de partición, en el curso partimos de la siguiente situación:

Realiza el siguiente procedimiento paso a paso:

- *Piensa un número del* 1 *al* 9.
- *Multiplícalo por nueve.*
- *Suma las cifras del resultado, por ejemplo si dio* 25 *sume* $2+5$*, ¿Qué resultado obtienes?*
- *Ahora piensa en otro número y repite los dos pasos anteriores.*
- *¿Qué concluyes a partir de los resultados obtenidos? Justifica.*

Se esperaba que los estudiantes llegaran a la conclusión de la suma de las cifras debe dar siempre nueve. Veamos:

$$1 \times 9 = 9 \text{ la suma seria } 9$$
$$2 \times 9 = 18 \text{ la suma seria } 1 + 8 = 9$$
$$3 \times 9 = 27 \text{ la suma seria } 2 + 7 = 9$$

$$4 \times 9 = 36 \text{ la suma seria } 3 + 6 = 9$$
$$5 \times 9 = 45 \text{ la suma seria } 4 + 5 = 9$$
$$6 \times 9 = 54 \text{ la suma seria } 5 + 4 = 9$$
$$7 \times 9 = 63 \text{ la suma seria } 6 + 3 = 9$$
$$8 \times 9 = 72 \text{ la suma seria } 7 + 2 = 9$$
$$9 \times 9 = 81 \text{ la suma seria } 8 + 1 = 9$$

El fin era establecer el concepto de partición de un número, finalmente en el curso se llego al acuerdo que la partición de un número es una representación del mismo como suma de otros (distintos de cero), y que no nos interesara el orden en que esos se presenten, en nuestro ejemplo del nueve tendríamos que la partición $1+8$ es igual a la partición $8+1$. Una vez claro el concepto de partición de un número empezamos a buscar las particiones del número 9:

$$9 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$9 = 2+1+1+1+1+1+1+1$$
$$9 = 3+1+1+1+1+1+1 = 2+2+1+1+1+1+1$$
$$9 = 4+1+1+1+1+1 = 3+2+1+1+1+1 = 2+2+2+1+1+1$$
$$9 = 5+1+1+1+1 = 4+2+1+1+1 = 3+3+1+1+1 = 3+2+2+1+1 = 2+2+2+2+1$$
$$9 = 6+1+1+1 = 5+2+1+1 = 4+3+1+1 = 4+2+2+1 = 3+3+2+1 = 3+2+2+2$$
$$9 = 7+1+1 = 6+2+1 = 5+3+1 = 4+4+1 = 5+2+2 = 4+3+2 = 3+3+3$$
$$9 = 8+1 = 7+2 = 6+3 = 5+4$$

Como suma de nueve números tenemos 1 partición, como suma de ocho 1 partición, como suma de siete números 2 particiones, de seis números 3, de cinco 5, de cuatro 6, de tres 7 y de dos 4.

En estos momentos decidimos que era un trabajo bastante tedioso encontrar todas las particiones de un número, por lo que solo buscaríamos determinar la cantidad de particiones que tiene un número dado, para ello decidimos estudiar las particiones de cada uno de los números desde 2 en adelante, si no estudiar primero todas las particiones como suma de dos, luego las de suma de tres, y así sucesivamente.

Representación de un número como suma de otros dos

Tenemos que el menor número que podemos representar como suma de dos números, es precisamente el dos, luego comenzaremos desde dos:

$$\begin{array}{lllll}
2 = 1+1 & 3 = 2+1 & 4 = 3+1 & 5 = 4+1 & \\
 & & = 2+2 & = 3+2 & \\
6 = 5+1 & 7 = 6+1 & 8 = 7+1 & 9 = 8+1 & 10 = 9+1 \\
 = 4+2 & = 5+2 & = 6+2 & = 7+2 & = 8+2 \\
 = 3+3 & = 4+3 & = 5+3 & = 6+3 & = 7+3 \\
 & & = 4+4 & = 5+4 & = 6+4 \\
 & & & & = 5+5
\end{array}$$

Construyendo una tabla con los resultados obtenidos tenemos:

Número	Suma de uno	Suma de dos
1	1	
2	1	1
3	1	1
4	1	2
5	1	2
6	1	3
7	1	3
8	1	4
9	1	4
10	1	5

De la tabla podemos conjeturar que dado un número natural n. Si n es par se puede representar como suma de dos números de $\frac{n}{2}$ formas diferentes y si n es impar se puede representar como suma de otros dos números de $\frac{n-1}{2}$ formas diferentes. Con esta conjetura ya tendríamos resuelto el caso de hallar las particiones de un número cualquiera como suma de otros dos.

Representación de un número como suma de otros tres

El menor número que podemos expresar como suma de tres números es el tres, luego tenemos que:

$$3 = 1+1+1 \qquad 4 = 2+1+1$$

$$\begin{aligned} 5 &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 3+2+1 \\ &= 4+2+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6 &= 4+1+1 \\ &= 2+2+2 \\ &= 3+2+2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 7 &= 5+1+1 \\ &= 3+3+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 &= 6+1+1 \\ &= 5+2+1 \\ &= 4+2+2 \\ &= 3+3+2 \\ &= 4+3+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 9 &= 7+1+1 \\ &= 6+2+1 \\ &= 5+3+1 \\ &= 4+4+1 \\ &= 5+2+2 \\ &= 4+3+2 \\ &= 3+3+3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10 &= 8+1+1 \\ &= 7+2+1 \\ &= 6+3+1 \\ &= 5+4+1 \\ &= 6+2+2 \\ &= 5+3+2 \\ &= 4+4+2 \\ &= 4+3+3 \end{aligned}$$

Registrando los datos en una tabla tenemos:

Número	Suma de uno	Suma de dos	Suma de tres
1	1		
2	1	1	
3	1	1	1

4	1	2	1
5	1	2	2
6	1	3	3
7	1	3	4
8	1	4	5
9	1	4	7
10	1	5	8

Como podemos observar, no se ve un comportamiento fácil para poder sacarle una regularidad, para llegar a una formulación para las particiones de un número como suma de otros tres, fijémonos en los procedimientos que utilizamos para crear las particiones de un número como suma de tres, podemos construir estas particiones a partir de las particiones como suma de dos, por ejemplo $6 = 4+2$, pero sabemos como puedo escribir a 4 como suma de otros dos números, luego si lo reemplazamos a 4 por sus particiones obtenemos que $6 = (2+2)+2$ y $6 = (3+1)+2$.

Realizando este procedimiento obtenemos y tachando las particiones repetidas tenemos:

$$
\begin{aligned}
&3 = 2+1\\
&3 = (1+1)+1 \text{ Reemplazando } 2\\
&4 = 3+1 = 2+2\\
&4 = (2+1)+1 \text{ Reemplazando } 3\\
&\ \ = (1+1)+2 \text{ Reemplazando } 2\\
&5 = 4+1 = 3+2\\
&5 = (3+1)+1 = (2+2)+1 \text{ Reemplazando } 4\\
&\ \ = (2+1)+2 \text{ Reemplazando } 3\\
&6 = 5+1 = 4+2 = 3+3\\
&6 = (4+1)+1 = (3+2)+1 \text{ Reemplazando } 5\\
&\ \ = (3+1)+2 = (2+2)+2 \text{ Reemplazando } 4\\
&\ \ = (2+1)+3 \text{ Reemplazando } 3\\
&7 = 6+1 = 5+2 = 4+3\\
&7 = (5+1)+1 = (4+2)+1 = (3+3)+1 \text{ Reemplazando } 6\\
&\ \ = (4+1)+2 = (3+2)+2 \text{ Reemplazando } 5\\
&\ \ = (3+1)+3 = (2+2)+3 \text{ Reemplazando } 4\\
&8 = 7+1 = 6+2 = 5+3 = 4+4\\
&8 = (6+1)+1 = (5+2)+1 = (4+3)+1 \text{ Reemplazando } 7\\
&\ \ = (5+1)+2 = (4+2)+2 = (3+3)+2 \text{ Reemplazando } 6\\
&\ \ = (4+1)+3 = (3+2)+3 \text{ Reemplazando } 5\\
&\ \ = (3+1)+4 = (2+2)+4 \text{ Reemplazando } 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
9 &= 8+1 = 7+2 = 6+3 = 5+4 \\
9 &= (7+1)+1 = (6+2)+1 = (5+3)+1 = (4+4)+1 \text{ Reemplazando 8} \\
&= (6+1)+2 = (5+2)+2 = (4+3)+2 \text{ Reemplazando 7} \\
&= (5+1)+3 = (4+2)+3 = (3+3)+3 \text{ Reemplazando 6} \\
&= (4+1)+4 = (3+2)+4 \text{ Reemplazando 5} \\
10 &= 9+1 = 8+2 = 7+3 = 6+4 = 5+5 \\
10 &= (8+1)+1 = (7+2)+1 = (6+3)+1 = (5+4)+1 \text{ Reemplazando 9} \\
&= (7+1)+2 = (6+2)+2 = (5+3)+2 = (4+4)+2 \text{ Reemplazando 8} \\
&= (6+1)+3 = (5+2)+3 = (4+3)+3 \text{ Reemplazando 7} \\
&= (5+1)+4 = (4+2)+4 = (3+3)+4 \text{ Reemplazando 6} \\
&= (4+1)+5 = (3+2)+5 \text{ Reemplazando 5}
\end{aligned}
$$

Como podemos observar, para obtener las representaciones como suma de tres números de un número n, tomamos sus representaciones como suma de dos números y en cada una de ellas reemplazamos el primer sumando por una de sus representaciones como suma de dos; en la primera línea estamos reemplazando el número inmediatamente anterior al que queremos representar, es decir reemplazamos a $(n-1)$, y al hacerlo no obtenemos representaciones repetidas, en la segunda línea, reemplazamos $(n-2)$, pero en esta línea encontramos una representación que ya teníamos, en la tercera línea reemplazamos a $(n-3)$ y encontramos dos representaciones repetidas, y así sucesivamente. Concluyendo, si quiero conocer las particiones como suma de tres de un número n, puedo utilizar las particiones como suma de dos de los números anteriores, tomo un número anterior t anterior y busco la cantidad de representaciones como suma de dos que tiene t llamemos x a esa cantidad y realizo la operación $(x+1)-(n-t)$ si el número que obtengo no es negativo entonces lo sumo a la cantidad de particiones como sumo de tres de n y así sucesivamente con cada número anterior, veamos esto en una tabla:

Núm.	Suma de 1	Suma de 2	Suma de 3	Procedimiento
2	1	1	-	-
3	1	1	1	(1)=1=1
4	1	2	1	(1)=1=1
5	1	2	2	(2)=2=2
6	1	3	3	(2)+(2-1)=2+1=3
7	1	3	4	(3)+(2-1)=3+1=4
8	1	4	5	(3)+(3-1)=3+2=5
9	1	4	7	(4)+(3-1)+(3-2)=4+2+1=7
10	1	5	8	(4)+(4-1)+(3-2)=4+3+1=8
11	1	5	10	(5)+(4-1)+(4-2)=5+3+2=10
12	1	6	12	(4)+(5-1)+(4-2)+(4-3)=5+4+2+1=12

Es decir que para las particiones de tres obtenemos la siguiente serie:

$$\begin{array}{lr} 1 & 4+2+1 \\ 1 & 4+3+1 \\ 2 & 5+3+2 \\ 2+1 & 5+4+2+1 \\ 3+1 & 6+4+3+1 \\ 3+2 & 6+5+3+2\ldots \end{array}$$

Podemos observar que cada tres elementos, la serie tiene un nuevo término, y si miramos los términos de abajo hacia arriba son precisamente las particiones como suma de dos.

Otra opción propuesta por los estudiantes del club, para poder llegar a inducir una formula es organizar las particiones por colas, es decir por el ultimo número que se suma, si la partición termina en +1 o en +2, etc. Tenemos entonces que:

$$3 = 1+1+1 \qquad 4 = 2+1+1 \qquad \begin{aligned} 5 &= 3+1+1 \\ &= 2+1+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 &= 4+1+1 = 2+2+2 \\ &= 3+2+1 \\ 7 &= 5+1+1 = 3+2+2 \\ &= 4+2+1 \\ &= 3+3+1 \\ 8 &= 6+1+1 = 4+2+2 \\ &= 5+2+1 = 3+3+2 \\ &= 4+3+1 \end{aligned}$$

Y así sucesivamente, organizando los resultados en una tabla tenemos:

Núm.	Suma de 1	Suma de 2	+1	+2	+3	+4	+5	TOTAL
2	1	1	-	-	-	-	-	-
3	1	1	1	-	-	-	-	1
4	1	2	1	-	-	-	-	1
5	1	2	2	-	-	-	-	2
6	1	3	2	1	-	-	-	3
7	1	3	3	1	-	-	-	4
8	1	4	3	2	-	-	-	5
9	1	4	4	2	1	-	-	7
10	1	5	4	3	1	-	-	8
11	1	5	5	3	2	-	-	10
12	1	6	5	4	2	1	-	12

Nuevamente obtenemos la misma serie que con la tabla anterior. El trabajo ahora es encontrar una formula para esta serie.

Diagramas de Ferrer

Los diagramas de Ferrer son una matriz de puntos, con la cual podemos representar una partición de n, esta matriz tiene tantas filas como sumandos no nulos, y en cada fila hay tantos puntos como el valor del sumando, en nuestro caso utilizaremos los diagramas para llegar a la formulación de algunas sumas importantes como lo son la suma de los pares, los impares, los naturales, etc.

Para introducir los diagramas de Ferrer. Recordamos que al inicio del curso, habíamos mencionado que podíamos representar un número de diversas maneras, una posible manera de hacerlo, consiste en tomar un símbolo y escribirlo varias veces hasta que por un conteo lleguemos al número que queremos representar por ejemplo

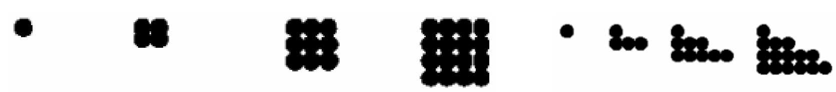
$$4 = \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \qquad 8 = \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet$$

Como ya tenemos una nueva forma de representar un número, cómo realizaríamos sumas con estas representaciones, sin necesidad de introducir un nuevo símbolo. ¿Si no utilizamos un símbolo cómo sabemos cuando se esta sumando o cunado se esta representando otra cosa? Para poder identificar las representaciones de una suma se hizo necesario entonces crear algunas reglas para la escritura de la misma:

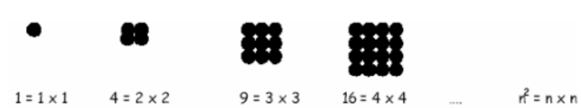
- Siempre que queramos representar una suma colocaremos un número encima del otro.
- No se puede colocara la representación de un número mayor sobre un número menor.
- La representación de los números debe ir siempre alineada hacia la izquierda, es decir que la escritura de las representaciones se realizara de de izquierda a derecha sin dejar espacios intermedios.

Una vez creada las reglas de escritura, empezamos a mirar las ventajas que tenia está, de la usual, para ello empezamos a trabajar con series.

Suma de Números Impares: Se les pidió a los estudiantes que observaran las siguientes secuencias de sumas:



En la primera de ellas la forma cuadrada que tenían los diagramas permitía con gran facilidad determinar la cantidad de puntos que se tenia en cada una de las sumas o partición representada:



También podemos observar la diferencia entre la cantidad de puntos que hay entre cada una de las particiones de la secuencia:

Registrando esto en una tabla tenemos:

N. de la Representación	Lado del Cuadrado	Número Total de puntos	Puntos que Agregamos	Suma que representa
1	1	$1 \times 1 = 1$	1	1
2	2	$2 \times 2 = 4$	3	$2 + 2$
3	3	$3 \times 3 = 9$	5	$3 + 3 + 3$
4	4	$4 \times 4 = 16$	7	$4 + 4 + 4 + 4$
n	n	$n \times n$	$2n - 1$	$n + n + n + n + \cdots + n$

Aunque en la segunda secuencia no podemos reconocer fácilmente la cantidad de puntos si podemos establecer fácilmente la diferencia entre cada una de las particiones representadas

En una tabla tenemos que:

N. Representación	Total de puntos	Puntos que Agregamos	Suma que representa
1	1	1	1
2	4	3	$1 + 3$
3	9	5	$1 + 3 + 5$
4	16	7	$1 + 3 + 5 + 7$
N	¿?	$2n - 1$	$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$

Relacionando las dos secuencias de particiones, tenemos que las diferencias que se presentan entre las particiones es la misma y ambas comienzan con un punto en la primera partición, por lo tanto podemos afirmar que al número representado en cada una de las particiones de las secuencias es el mismo uno a uno, de donde concluimos que:

$$
\begin{aligned}
&1 = 1 \times 1 = 1\\
&1 + 3 = 2 + 2 = 2 \times 2 = 4\\
&1 + 3 + 5 = 3 + 3 + 3 = 3 \times 3 = 9\\
&1 + 3 + 5 + 7 = 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 4 = 16\\
&1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n + n + n + \cdots + n = n \times n
\end{aligned}
$$

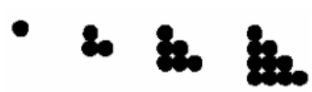
Suma de Números Pares: Se les pidió a los estudiantes que observaran las siguientes secuencias de sumas:

De manera análoga al caso anterior se puede llegar a la siguiente conclusión:

$$2 = 2 \times 1 = 2$$
$$2 + 4 = 3 + 3 = 3 \times 2 = 6$$
$$2 + 4 + 6 = 4 + 4 + 4 = 4 \times 3 = 12$$
$$2 + 4 + 6 + 8 = 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 4 = 20$$
$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + (2n) = (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1) = (n + 1) \times n$$

De igual se presentaron las siguientes series de particiones:

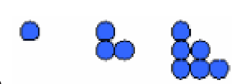
Números Triangulares, La Serie T:

 las diferencias son: 

Observamos que en esta nueva secuencia las representaciones que obtenemos tienen forma de triangulo, por lo que podríamos pensar en un primer momento que realizando cierta analogía con los rectángulos, ya que si la formula del área del rectángulo (base por altura), soluciona una de las series anteriores, tal vez en esta secuencia podría funcionar el área del triángulo, si multiplicamos la base por la altura y la dividimos entre dos y confrontamos los resultados conseguidos de esta forma con la cantidad de puntos de cada partición, nos daremos cuenta que no corresponden por la forma en que se están representando, se hace necesario entonces crear una estrategia para poder contar más rápidamente la cantidad de puntos.

Los estudiantes propusieron dos estrategias para contar más fácilmente los puntos de una partición, la primera de ellas consistía en completar cuadrados y la segunda en completar rectángulos.

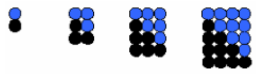
Completando cuadrados tenemos:

 estamos agregando 

Registrando esto en una tabla tenemos:

N. Representación	Lado del cuadrado que completamos	Total de puntos que completamos	Puntos que agregamos	Total de puntos originales
1	1	$1 \times 1 = 1$	0	$l - 0 = 1$
2	2	$2 \times 2 = 4$	1	$4 - 3 = 3$
3	3	$3 \times 3 = 6$	3	$9 - 3 = 6$
4	4	$4 \times 4 = 16$	6	$16 - 6 = 10$
n	N	$n \times n$	?	$(n \times n)-?$

Como podemos observar, nuevamente tenemos el problema de no tener una formula para conocer la cantidad de puntos que agregamos lo que nos impide conocer una formula para los números triangulares.

 estamos agregando 

Completando rectángulos tenemos:

Si llamamos Tn al número representado en el lugar n de la secuencia de triangulares, y registramos los datos en una tabla tenemos que:

N. De la Representación	Base del Rectángulo que Completamos	Altura del Rectángulo que Completamos	Puntos que Agregamos	Puntos Orígínales	Puntos Orígínales
1	1	2	1	1	$(1 \times 2) - 1$
2	2	3	3	3	$(2 \times 3) - 3$
3	3	4	6	6	$(3 \times 4) - 6$
4	4	5	10	10	$(4 \times 5) - 10$
n	n	$n+1$	T_n	T_n	$(n \times (n+1)) - T_n$

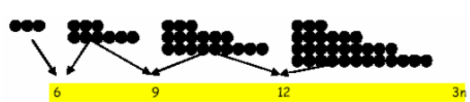
Si observamos detenidamente, la cantidad de puntos que agregamos que en este caso coincide con la cantidad de puntos que teníamos originalmente de donde tenemos que:

$T_n = (n \times (n+1)) - T_n$ de donde $T_n = \dfrac{n \times (n+1)}{2}$ obtenemos así una forma para los números triangulares, y si tenemos en cuenta las diferencias entre las particiones finalmente concluimos que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Números de la Forma *3k*, La Serie F:

Miremos las diferencias entre las particiones



Podemos observar que la particiones van aumentando en múltiplos de tres, ahora para poder contar más fácilmente la cantidad de puntos de cada partición utilizaremos la misma estrategia de completar rectángulos, tenemos que estamos agregando la misma cantidad de puntos que teníamos originalmente. Si llamamos F_n al número representado en el lugar n de la serie, y registramos los datos en una tabla tenemos que:

N. Rep.	Base Rectángulo Completado	Altura Rectángulo completado	Puntos Del Rectángulo	Puntos Agrega.	Puntos de la Representación	Suma que Representa
1	3	2	$3 \times 2 = 6$	F_1	$6 - F_1$	3
2	6	3	$6 \times 3 = 18$	F_2	$18 - F_2$	$3 + 6$
3	9	4	$9 \times 4 = 36$	F_3	$36 - F_3$	$3 + 6 + 9$
4	12	5	$12 \times 5 = 60$	F_4	$60 - F_4$	$3 + 6 + 9 + 12$
n	$3n$	$n + 1$	$3n \times (n + 1)$	F_n	$3n(n + 1) - F_n$	$3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 3n$

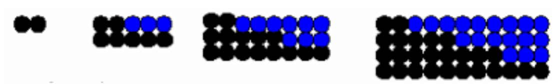
De donde podemos concluir:

$F_n = 3n \times (n + 1) - F_n$ de donde $Fn = \dfrac{3n \times (n + 1)}{2}$

$3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 3n = F_n = \dfrac{3n \times (n + 1)}{2}$

Números de la forma *3k + 2*, La Serie H:

Para poder formular esta serie utilizamos la estrategia de completar rectángulos:



estamos agregando

Si llamamos F_n al número representado en el lugar n de la serie, y registramos los datos en una tabla tenemos que:

N. Rep.	Base Rectángulo Completado	Altura Rectángulo completado	Puntos Del Rectángulo	Puntos Agrega.	Puntos de la Representación	Suma que Representa
1	2	1	$2 \times 1 = 2$	0	2	2
2	5	2	$5 \times 2 = 10$	F_1	$10 - F_1$	$2 + 5$
3	8	3	$8 \times 3 = 24$	F_2	$24 - F_2$	$2 + 5 + 8$
4	11	4	$11 \times 4 = 44$	F_3	$44 - F_3$	$2 + 5 + 8 + 11$
n	$3n - 1$	n	$(3n - 1) \times n$	F_{n-1}	$3n(n + 1) - F_{n-1}$	$2 + 5 + 8 + 11 + \cdots + (3n - 1)$

Por lo que concluimos:

$$H_n = ((3n - 1) \times n) - F_{n-1} = (3n - 1)n - \frac{3(n - 1)n}{2} = \frac{3n^2 + n}{2}$$

De manera similar tenemos los números de la forma $3k + 2$, Serie J:

donde $J_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$

Se dividió el curso en 6 grupos y cada uno de los grupos obtuvo la formula para hallar la cantidad de puntos de cada una de las siguientes seis series, a diferencia de las series anteriores, en estas para facilitar el conteo de puntos no se completaron rectángulos, si no que se completan números triangulares; los resultados fueron los siguientes:

Serie A:

donde $A_n = 3n^2 - 3n + 1$

Serie B:

donde $B_n = 3n^2 - 2n$

Serie D:

donde $D_n = 3n^2 - n$

Serie E:

donde $E_n = 3n^2$

Serie G

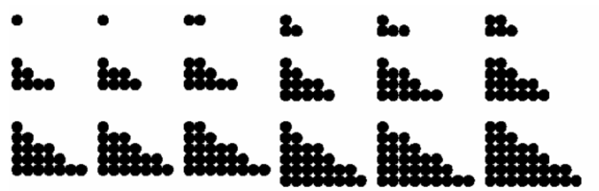
donde $G_n = 3n^2 + n$

Serie I

donde $I_n = 3n^2 + 2n$

Una Antigua Serie, Particiones de un número como suma de otros tres: Miremos nuevamente la serié que habíamos obtenido cuando queríamos determinar la cantidad de particiones que tiene un número como suma de otros tres (recordemos que el menor número que se representa como suma de otros tres es el 3), pero esta vez representada con diagramas de Ferrer:

Nuevamente nos enfrentamos con el problema de obtener la formulación de esta serie, sin embargo si observamos detenidamente esta serie podemos construir la siguiente tabla:



N. de la Repre	Cantidad de Puntos
3	A_1
4	B_1
5	D_1
6	E_1
7	G_1
8	I_1
9	A_2
10	B_2
11	D_2
12	R_2
13	G_2
14	I_2
15	A_3
16	B_3
17	D_3
18	E_3
19	G_3
20	I_3

Es claro que nuestra secuencia se parte o se divide en las seis secuencias que estábamos trabajando anteriormente, pero este comportamiento tiene mucho sentido ya que si recordamos cuando caracterizamos por primera vez esta secuencia por colas observamos que era importante si el número era par o impar, por que seguían patrones distintos, por otro lado el número de términos de cada uno de las representaciones iba aumentando cada tres, por lo cual era importante observar si el numero era múltiplo de tres, o si al dividir por tres dejaba residuo uno o dos, es decir que debíamos mirar simultáneamente si era múltiplo de tres y si era múltiplo de dos, esto lo logramos cuando analizamos los múltiplos de seis. Miremos:

Si $k = 6n$, es par y múltiplo de tres.
Si $k = 6n + 1$, es impar y al dividirlo por tres su residuo es uno.
Si $k = 6n + 2$, es par y al dividirlo por tres su residuo es dos...
Si $k = 6n - 3$, es impar y múltiplo de tres.
Si $k = 6n - 2$, es par y al dividirlo por tres su residuo es uno.
Si $k = 6n - 1$, es impar y al dividirlo por tres su residuo es dos.

Para poder formular tan solo debemos separar cada una de las secuencias, por ejemplo si tomamos las serie A se le aplica a k de la forma $6n - 3$, lo que debemos hacer es jugar con la variables, veamos:

n	k	Total de Puntos
1	3	$1 = A_1$
2	9	$7 = A_2$
3	15	$19 = A_3$
4	21	$37 = A_4$
n	$6n-3$	A_n

Tenemos que $A_n = 3n^2 - 3n + 1$ y que $n = \dfrac{k+3}{6}$ reemplazamos n y tenemos que la cantidad de puntos en función de k es $\dfrac{k^2+3}{12}$ de igual forma podemos actuar sobre cada una de las series en que se divide y así obtendremos finalmente la formula para poder determinar la cantidad de formas en que se puede representar un número entero como suma de otros 3 no nulos.

La formula es la siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{k^2}{12} & \text{si } k = 6n \\ \dfrac{k^2-1}{12} & \text{si } k = 6n+1 \text{ o } k = 6n-1 \\ \dfrac{k^2-4}{12} & \text{si } k = 6n+2 \text{ o } k = 6n-2 \\ \dfrac{k^2+3}{12} & \text{si } k = 6n-3 \end{cases}$$

Por supuesto nuestra meta aún no esta completa ya que lo que se quería era determinar todas las particiones de un número, el trabajo sería bastante arduo, consideramos que así como la formula de las particiones en dos números esta dividida en dos, las de tres números en seis, probablemente las de cuatro estarían divididas en 24, lo que ya complicaría bastante nuestro trabajo, sin embargo, si el lector podrá encontrar en la bibliografía algunas formulas propuestas, por otros autores para determinar la cantidad de particiones totales de un número entero positivo, diferentes a las aquí planteadas.

Este temas fue desarrollado en el curso de particiones numéricas del club de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el II semestre del 2006, junto con otros temas involucrados como lo son los grafos garbosos y combinatoria y técnicas de conteo; y su orientación se debe más a las hipótesis y trabajo de los estudiantes.

Bibliografía

[1] AGUADO, J. *Funciones Generadoras, Particiones y Diagramas de Ferrer*, Universidad Nacional del Centro de La Provincia de Buenos Aires.

[2] FERNANDEZ, P., FERNADEZ, J. *Notas de Matemática Discreta.* Universidad Autónoma de Madrid, 2004

[3] SANCHEZ, Y. *Modulo de Particiones Numéricas.* Universidad Pedagógica Nacional, 2006