VISUALIZACIÓN DE LA RELACIÓN GEOMÉTRICA ENTRE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO CON GEOGEBRA

Doris Esperanza Álvarez Quintero
Profesora Colegio Los Nogales
Bogotá D.C, Colombia
dorisalv@gmail.com

Martha Cristina Segura Barrero
Profesora Colegio Marymount
Bogotá D.C, Colombia
cristsegura@gmail.com

Resumen

En éste artículo se presenta una propuesta para la enseñanza de los Teoremas Fundamentales del Cálculo por medio de la utilización del software Geogebra, éste software permite la visualización de cada uno de los teoremas fundamentales del cálculo, a través de la interpretación geométrica de la integral como función de área y la interpretación de la derivada como función de pendientes, posteriormente se relacionan los procesos inversos de integración y derivación.

Introducción

Este trabajo se fundamenta en la historia de los Teoremas Fundamentales del Cálculo, retomando el carácter geométrico de los problemas de áreas y tangentes que permitió establecer la relación inversa entre la derivación y la integración; y en la teoría de las representaciones haciendo uso de la tecnología, aprovechando su carácter dinámico para dar significado a los teoremas y para permitir la traducción entre distintos sistemas de representación.

El estudio histórico de los Teoremas Fundamentales del Cálculo se enmarca en la evolución de los conceptos de integral y derivada. Aunque los orígenes del cálculo infinitesimal se encuentran en los griegos (siglo V a.C. - siglo III a.C.), hasta los siglos XVII - XVIII, el cálculo presentó un desarrollo que permitió establecer por primera vez explícitamente la relación inversa entre la derivada y la integral.

Barrow demuestra con argumentos estrictamente geométricos el teorema, y luego Newton y Leibniz, trabajan esta relación en forma independiente, basados en el concepto de integración, uno en términos de áreas de rectángulos y el otro en términos de sumas de magnitudes infinitamente pequeñas.

En el siglo XIX se da la fundamentación del cálculo, gracias al desarrollo del álgebra de desigualdades, la formulación de conceptos básicos de análisis como el de función, límite, convergencia, continuidad, derivadas, integrales y sus propiedades y se obtiene la formulación y demostración rigurosa del Teorema Fundamental del Cálculo dada por Cauchy, las cuales son las que se presentan actualmente en los libros de texto.

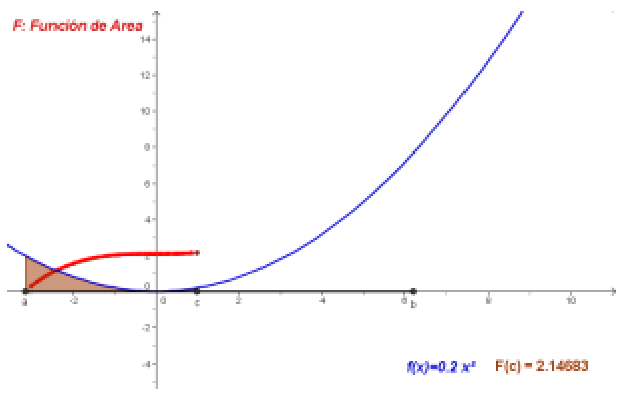
Función de área

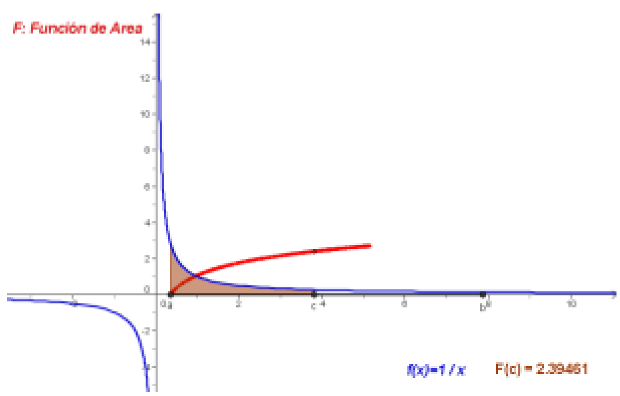
Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ se define la función de área F para cada $x \in [a, b]$ como el área bajo la gráfica de f entre a y x

La función de área es una interpretación de la integral de una función, permite construir una función a partir de los valores del área acumulada bajo la curva f desde un punto a hasta un punto x variable.

La aplicación realizada permite

- Introducir una función f en su representación algebraica
- visualizar el área bajo la gráfica de la función f al desplazar un punto c en un intervalo cerrado $[a, b]$
- visualizar la construcción de la función de área F a partir de los valores del área acumulada desde a hasta c.
- Visualizar el valor numérico de $F(c)$





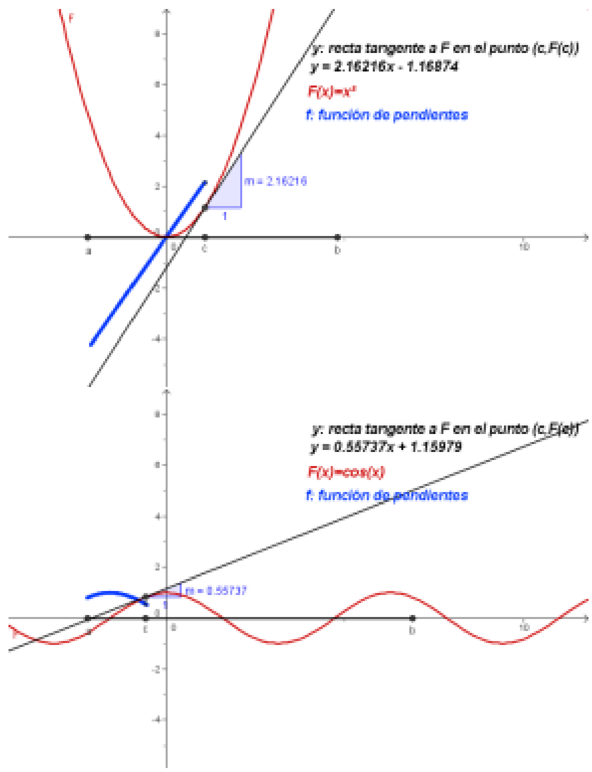
Función de pendientes

Si F es una función continua y derivable para todo $x \in [a, b]$ se define la función de pendientes f para cada $x \in [a, b]$ como el valor de la pendiente de la recta tangente a f en x

La función de pendientes es una interpretación de la derivada de una función, permite construir una función a partir de los valores de las pendientes de las rectas tangentes a F en el punto $(c, F(c))$.

La aplicación realizada permite

- Introducir una función F en su representación algebraica
- visualizar la recta tangente a F en $(c, F(c))$
- visualizar la representación algebraica de y el valor de su pendiente
- visualizar la construcción de función de pendientes f al desplazar un punto c en un intervalo cerrado $[a, b]$, a partir de los valores de las pendientes de la rectas tangentes a F en $(c, F(c))$.



Primer teorema fundamental del cálculo

Sea la función f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea x cualquier número en $[a, b]$. Si F es la función definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

entonces

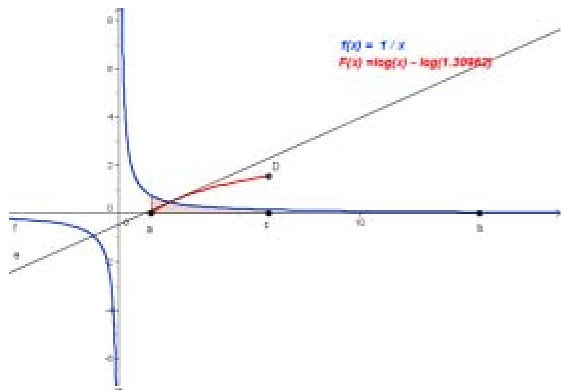
$$F'(x) = f(x)$$

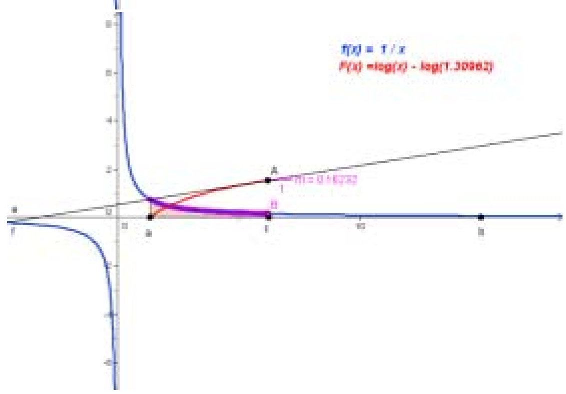
El primer teorema fundamental del cálculo permite construir una función F a partir de la integral $\int_a^x f(t)dt$. Para $f(t) \geq 0$ ésta integral corresponde a la función de área definida anteriormente. Además F es una antiderivada de f .

La aplicación realizada permite

- Introducir una función f en su representación algebraica

- visualizar la función de área F, al desplazar un punto c en el intervalo cerrado $[a, b]$
- Comprobar usando la función de pendientes, que la función F es una antiderivada de f, desplazando el punto A sobre la función F (ya que al desplazar el punto A sobre la función F deja el rastro sobre la función f original)
- Visualizar la representación algebraica de la antiderivada F





Segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

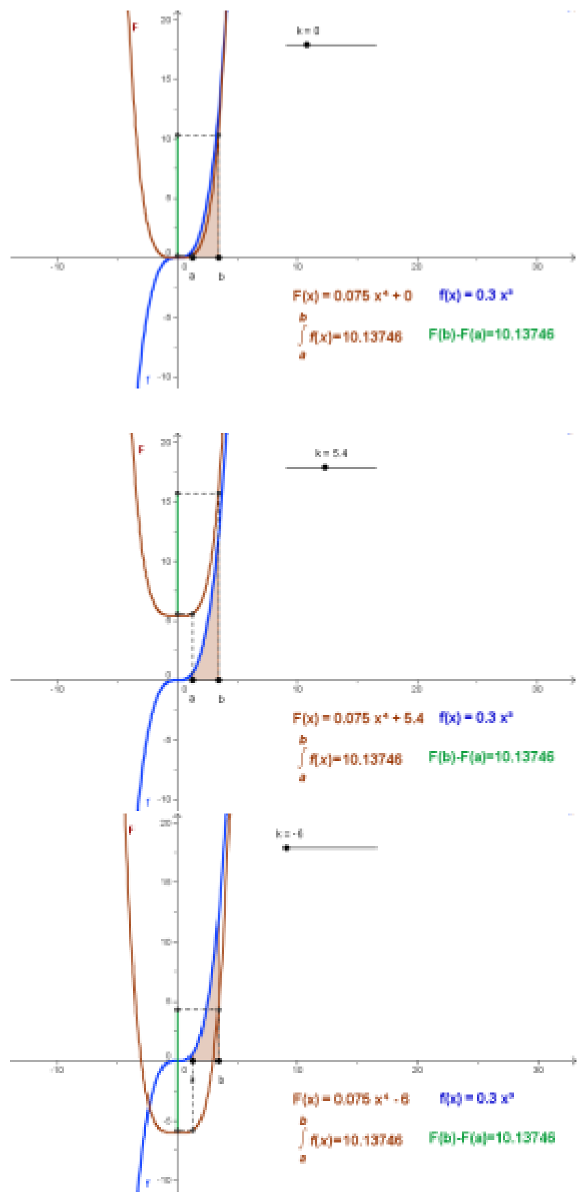
El segundo teorema fundamental del cálculo permite evaluar una integral definida por medio de una antiderivada. La representación geométrica del teorema permite establecer la relación entre el área bajo la curva de f entre a y b y la longitud del segmento con extremos $(0, F(a))$ y $(0, F(b))$.

Dada cualquier función f, Geogebra permite hallar algebraica y gráficamente una antiderivada F, por medio del comando *integral (f)*. La construcción de otras antiderivadas se realiza por medio del deslizador.

La aplicación realizada permite

- Introducir una función f en su representación algebraica

- Visualizar la función f en su representación geométrica
- Visualizar una función F antiderivada de f, tanto en su representación algebraica como geométrica.
- Visualizar los valores numéricos correspondientes a $\int_a^b f(x)dx$ y $F(b) - F(a)$ a partir de la cual se comprueba la igualdad $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- Visualizar $\int_a^b f(x)dx$ como el área bajo la curva de la función f y $F(b) - F(a)$ como la longitud de un segmento con extremos $(0, F(a))$ y $(0, F(b))$
- Visualizar antiderivadas $F(x) + k$ de la función f donde el valor de k cambia al accionar un deslizador sobre la zona gráfica



Observamos como al mover el deslizador y obtener otra antiderivada, la longitud $F(b) - F(a)$ no cambia.

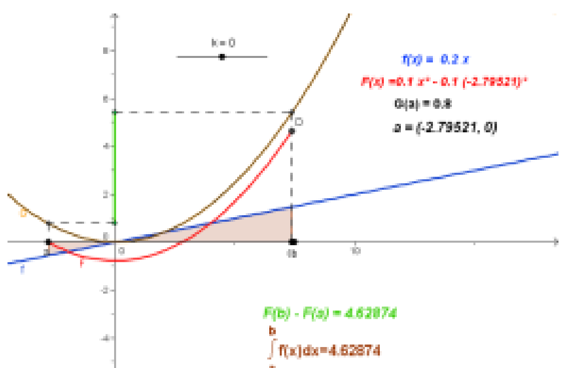
Relación entre los dos teoremas fundamentales del cálculo

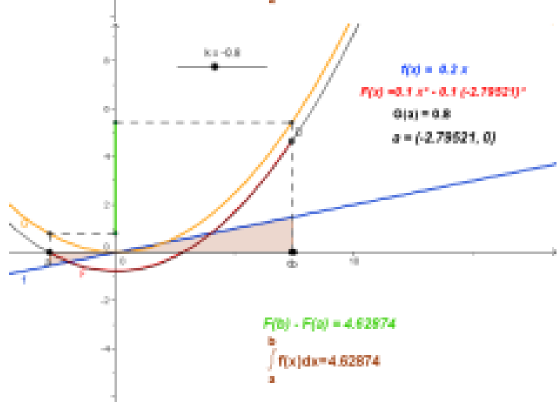
Del primer teorema al segundo

El paso del primer al segundo teorema fundamental implica evaluar la función F en b, esto es, dada la función de área $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (la antiderivada de f que depende de a) hallar la integral definida $\int_a^x f(t)dt$ y comprobar que éste valor es igual a $F(b) - F(a)$

La aplicación realizada permite

- Introducir una función f en su representación algebraica
- Visualizar la función f y la función de área $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ en su representación algebraica y geométrica
- Visualizar la función G antiderivada de f generada por geogebra (*integral (f)*. donde la constante es 0)
- Comparar la función de área F con la antiderivada G para deducir que la función de área es una antiderivada donde la constante es $-G(a)$ por medio del deslizador que permite visualizar las antiderivadas.





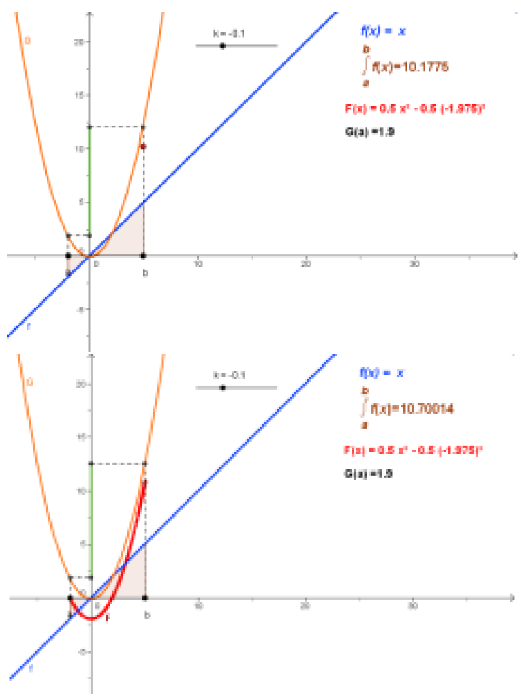
Del segundo teorema al primero

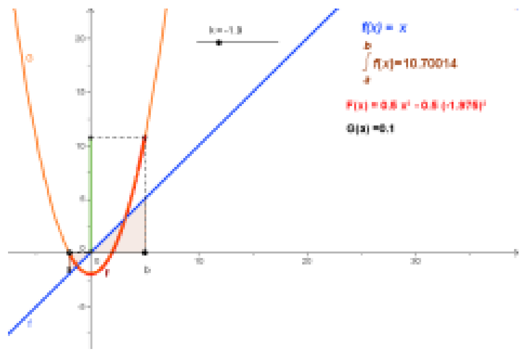
El paso del segundo al primer teorema fundamental implica construir la función de área para cada valor a, esto es, dada cualquier antiderivada G se tiene $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ de donde al variar b se obtiene $\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$. Se observa que si $G(a) = 0$ se obtiene la función de área

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) = F(x)$$

La aplicación realizada permite

- Introducir una función f en su representación algebraica
- Visualizar la función G antiderivada de f generada por geogebra (*integral (f)*. donde la constante es 0)
- Construir la función de área al desplazar b sobre el eje x
- Verificar que la función G corresponde a la función de área cuando $G(a = 0)$, por medio del deslizador que permite trasladar a G





Bibliografía

[1] ALVAREZ, D y SEGURA, C (2007) "El tratamiento didáctico dado a los teoremas fundamentales del Cálculo en algunos libros de texto de 1985 a 2007"Tesis de Maestría

[2] APOSTOL, Tom y otros (1992) *A Century Of Calculus. Part II 1969-1991.* The Raymond W. Brinky Selected Mathematical Papers The Mathematical Association Of America. Printed In The United States of America.

[3] BOYER, Carl (1986) *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

[4] TALL, D. (1991) *Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus* En: Visualization in Mathematics, MAA, Notes No. 19, 105-119

[5] TURÉGANO, P. (1998). *Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo.* En: Enseñanza de las Ciencias, Vol. 16(2), pp. 233-249.