El estudio de la teselaciones para la enseñanza de la geometría transformacional

María Fernanda Mejía Palomino
Docente de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali
Universidad del Valle
mafanda1216@yahoo.com.ar, maferme@univalle.edu.co

Resumen
En el desarrollo del proyecto Ondas[1] titulado "Calidamente" uno de los intereses investigativos ha sido buscar las conexiones del arte y las matemáticas, por lo que las teselaciones han sido uno de los ejes de estudio. Para dar inicio a la indagación se recurre al análisis de las obras de Escher, siendo de interés el estudio de la geometría transformacional asociada a estas producciones artísticas. De este primer acercamiento surge la creación de nuevos diseños de teselaciones en Ambientes de Geometría Dinámica (Cabri Géomètre II Plus). Como parte de las reflexiones Didácticas del uso de las teselaciones en situaciones de enseñanza se analizan algunas de las *aprehensiones figurales* y las *reconfiguraciones* generadas en su construcción.
Palabras claves: aprehensiones figurales, Ambientes de Geometría Dinámica, geometría transformacional y teselaciones.

1. Introducción

Los motivos de indagación hacia las teselaciones surgen de las preocupaciones generadas por el Proyecto Ondas denominado Çalidamente"del grupo Matarte, cuyo nombre nace de la unión de tres palabras Cali da mente y Matarte por las iniciales de Matemáticas y Arte. Con el proyecto se tiene el interes de mostrarle a la comunidad de la Escuela Normal Farallones de Cali, las relaciones existentes entre el arte y las matemáticas, apoyándose en su reproducción o creación de obras de Arte y en el uso de Cabri Géomètre II Plus.

En el año lectivo 2006-2007, este grupo estaba conformado por dos estudiantes del ciclo complementario, 4 estudiantes de noveno, dos profesores y una asesora. Actualmente lo constituyen seis estudiantes del grado décimo, la asesora y quien escribe.

Las reflexiones alrededor de las teselaciones, permearon la estructuración de uno de los cursos que se ofrece actualmente en la Universidad del Valle a estudiantes de la básica Secundaria de la línea de Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática (TICEM) del área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía, en donde además de reconocer algunos conceptos y procedimientos relacionados con los polígonos y transformaciones isométricas, se miran un poco más a fondo las aprehensiones figurales involucradas en la producción de las teselas y el papel de los Ambientes de Geometría Dinámica en el diseño de situaciones de aprendizaje. Lo expuesto en este documento hace parte de la experiencia con estos estudiantes.

2. Las teselaciones

Usualmente y en el vocabulario de la mayoría de las personas suele ser desconocido el termino teselación, mientras que el termino mosaicos esta directamente relacionado con los que conoce-

[1]Los proyectos Ondas promueven la investigación de los estudiantes en secundaria, brindándoles apoyo financiero, un asesor y espacios para mostrar los resultados de sus avances. Estos proyectos son auspiciados por COLCIENCIAS y las Instituciones Educativas.

mos como embaldosar superficies planas (pisos). Al relacionar los términos teselaciones y mosaicos, inmediatamente se evoca un cuadrado como una de las piezas teselantes. Posteriormente se dan otros ejemplos de teselas que involucran otros tipos de cuadriláteros y triángulos.

Y de esa manera, entendiéndose el termino teselación se inicia la exploración que los lleva a recurrir a la función Polígono regular en Géomètre II plus, y a las transformaciones geométricas como rotaciones, traslaciones y simetrías para determinar otras teselas. En algunos casos los estudiantes en vez de utilizar las anteriores transformaciones isométricas, crean una macro que les permite de igual manera teselar, por lo que en las situaciones es necesario especificar la descripción de la teselación a partir de los movimientos en el plano de las teselas.

En la exploración se encuentra que con algunos polígonos regulares, no es posible teselar con esa única pieza, recurriéndose a otras polígonos para cubrir los espacios sobrantes. Para algunos estudiantes, es necesario utilizar el color para rellenar los polígonos, y hacer evidente que hay espacios no cubiertos. En este primer acercamiento surge la definición de teselación regular, tomada de Tena (2004):

> *Una teselación se denomina regular si se utiliza un único tipo de polígono (un solo tipo de baldosa) y en cada vértice el numero de baldosas que lo rodean es el mismo. Tales polígonos pueden ser regulares (en cuyo caso se hablaría de teselación regular mediante polígonos regulares) o no (por ejemplo los rombos de cualquier retículo plano).*

Bajo esta definición toda teselación regular se denota a partir de m, n, en donde m indica el número de lados del polígono base y n el número de polígonos que concurren en cada vértice. Con esta notación y con la medida de los ángulos interiores de cualquier polígono regular, Tena (2004) presenta la demostración de que los únicos tres polígonos regulares que teselan el plano son los triángulos, los cuadrados y los hexágonos.

Antes de abordar el teorema es necesario reconocer que la expresión $t = 180°(m-2)/m$ determina la medida de los ángulos interiores de cualquier polígono regular. Para esto se recurre al proceso de construcción de los polígonos regulares en regla y compás, en donde la circunferencia se divide en un número de arcos iguales al número de lados del polígono regular (Ver figura 1). Por lo que cada polígono se puede dividir en un número de triángulos isósceles congruentes, según el número de lados del polígono regular y de esta manera los estudiantes pueden completar una tabla como la siguiente:

Número de lados del polígono regular (m)	Polígono regular	Suma de todos los ángulos interiores del polígono regular	Medida de un ángulo interior del polígono regular
3	Triángulo	180°	60°
4	Cuadrado	360°	90°
5	Pentágono	540°	108°
6	Hexágono	720°	120°
m		$180°(m-2)$	$180°(m-2)/m$

Del análisis de los datos de las columnas tres y cuatro se llega a la obtención de la expresión $t = 180°(m-2)/m$, que determina la medida de los ángulos interiores de cualquier polígono regular.

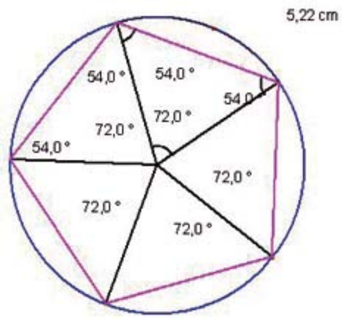


Figura 1. Construcción de un pentágono regular en Cabri Géomètre II Plus.

Con la anterior información y con algunas manipulaciones algebraicas, se puede entender el teorema que presenta Tena (2004):

> Las únicas teselaciones regulares por polígonos regulares son las $\{3,6\}$, $\{4,4\}$ y $\{6,3\}$ (teselaciones con triángulos, cuadrados y hexágonos).

Demostración:

Un polígono regular de m lados tiene ángulos de $t = 180(m-2)/m$ grados. Si en cada vértice se encuentran n polígonos debe tenerse: $180(m-2)n/m = 360$, es decir, la ecuación:

$$(m-2)(n-2) = 4$$

Ecuación cuyas únicas soluciones son las del enunciado, dado que m y n son números naturales. $\square$

Hasta el momento los estudiantes han tenido la experiencia de realizar teselaciones con polígonos convexos. Ahora, para realizar teselaciones con polígonos cóncavos, se siguió la recomendación de Gutiérrez (1990), al utilizar las obras de M. Escher como material didáctico.

A los estudiantes se les presenta algunas de las obras de Escher, ellos analizan los movimientos de la tesela y en algunas de ellas se explora la elaboración de la pieza teselante. Los detalles y el color de la tesela hace que tomen formas, estos elementos motivan a los estudiantes a crear teselas con formas de animales o cosas.

Figura 2. Algunas de las teselaciones de M. Escher

Una de las recomendaciones de Gutiérrez (1990, p.1) es la de iniciar un trabajo práctico, mecánico en el aprendizaje de las isometrías. Para que luego, en una etapa posterior, se pueda volver sobre el mismo tipo de actividades pero desde una perspectiva más formal, haciendo un análisis matemático de cómo están construidos los cubrimientos, que elementos hay que utilizar, que elementos intervienen.

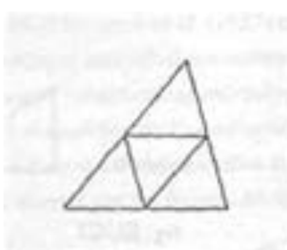
Teniendo en cuenta lo anterior, una vez los estudiantes conocen y analizan algunas de las obras de Escher, se inicia un trabajo con cartulina, regla y tijeras para generar piezas teselantes de polígonos cóncavos, antes de trabajar con Cabri Géomètre II Plus. Este proceso de elaboración de teselas abre la puerta al estudio de las aprehensiones figurales y las reconfiguraciones.

3. Aprehensiones figurales

Duval (1998) afirma que una figura puede dar lugar a diferentes tipos de aprehensión de naturaleza diferentes: aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas. Y que en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, se relacionan y en otros se oponen.

En la tesis de Mesquita (1989) se presenta con detalle cada una de las anteriores aprehensiones. A continuación se realiza una breve descripción:

- **Aprehensión perceptual**: es la aprehensión automática e inmediata de la figura. Este tipo de aprehensión es independiente del enunciado y se clasifica en global y analítica. Ejemplo:

	Aprehensión global: Esta figura puede ser vista como un triángulo mayor que tiene superpuesto un triángulo menor.  Aprehensión analítica: o puede ser determinada como cuatro triángulo pequeños unidos por sus lados. 

  Aunque ambas son dos maneras diferentes de ver la figura de la columna de la izquierda, solo la segunda determinaría una teselación, ya que en la aprehensión global, el triángulo de menor área superpuesto en el mayor estaría recubriendo el triángulo mayor y no el mismo plano que recubre el triángulo mayor. En las teselaciones, se estaría fortaleciendo una aprehensión analítica de las figuras.

- **Aprehensión operatoria**: Se centra en las modificaciones posibles de una figura, dando lugar a reconfiguraciones intermediarias, es decir reagrupamientos de subfiguras que permitan tratamientos. Estas modificaciones pueden son:
  - Mereológicas: Consiste en ver las partes de la figura para poder reconfigurarla. Estas partes son obtenidas al agregar un trazo y conseguir una nueva totalidad.

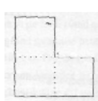
- Conjuntistas: Las partes toman un estatus de elemento constitutivo de un todo. A diferencia de la mereológica al separar un elemento del todo desaparece la aprehensión del todo inicial.
- Ópticas: Consiste en transformar una figura reduciéndola, agrandándola o deformándola. Este tipo de aprehensión puede significar un cambio del estatus de la figura
- Posicionales: Concierne a la ubicación y al lugar que ocupa la figura dentro de un medio. Frecuentemente son rotaciones o traslaciones.

En la elaboración de teselas que sean polígonos cóncavos propuestas a los estudiantes, se generan aprehensiones mereológicas y posicionales. Al descubrir la pieza inicial que dio origen a una tesela que sea un polígono cóncavo, o elaborarla en papel o en Cabri Géomètre II Plus requiere de trazos adicionales y movimientos de subfiguras.

Una de las tareas propuestas a los estudiantes en el que se evidencian aprehensiones operatorias, fue la de elaborar algunas teselaciones que se encuentran en Internet, cuyos procedimientos no se explican de manera detallada. Por otra parte, los pasos para generar la tesela parecen haber sido elaborados a mano alzada, sin anexar ningún enunciado. Los estudiantes que calquen la figura final para realizar la tesela en cartulina y que no siguen los procedimientos, no logran realizar la teselación porque el molde no encaja. Esta construcción se convierte para los estudiantes en un problema, al tratar de descifrar algunos de los procedimientos que no aparecen explícitos[2].

En la determinación de una aprehensión operatoria se hace mención de las reconfiguraciones, entiéndase este proceso como un tratamiento que consiste en la división de una figura en subfiguras, que en su comparación y en su reagrupamiento eventual genera una figura de un contorno global diferente (Marmolejo y Vega, 2002). Cada vez que se genera una pieza teselante que sea un polígono cóncavo a partir de un polígono convexo que tesela se esta generando un proceso de reconfiguración.

- Aprehensión figural secuencial: Esta ligada al orden de construcción de una figura. Por ejemplo: Una figura en forma de L, puede ser determinada como

 Tres cuadrados unidos por sus lados o como

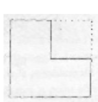
 Un cuadrado al que se le quita un cuadrado que corresponde a su cuarta parte.

Figura 3. Aprehensión secuencial

Esta aprehensión indica que cada vez que al estudiante se le expone un manera de construir una tesela, dicho procedimiento determina una manera de verla.

[2] La página en mención es http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates12/dematesna0001/opciones /MundoTeselaciones

- Aprehensión discursiva: es inseparable de la semántica de los objetos matemáticos y de una axiomática local. La aprehensión de la figura tiene que ver con las propiedades mencionadas en el enunciado y no con su trazado. En una de las situaciones propuestas, se les indica a los estudiantes construir una teselación utilizando como única tesela un pentágono cuyos lados son iguales pero que no es un polígono regular. Adicional a la información se le anexa la imagen de la teselación tomada de Minerva y Codina (2004). En esta situación el enunciado y la imagen aportan informaciones complementarias y diferentes que les permite realizar la tarea.

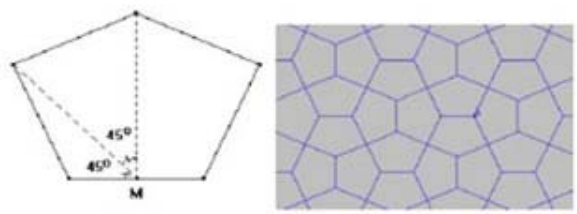


Figura 4. Pentágono no regular cuyos lados son de igual medida (teselación del Cairo)

4. Algunos teselaciones en Cabri Géomètre II Plus

Es innegable que el proceso de realización de teselaciones juega un papel importante las diferentes aprehensiones figurales y las reconfiguraciones. También es necesario aclarar, que antes de trabajar en Cabri Géomètre II Plus, la experiencia del uso de cartulina, tijeras y regla para elaborar la pieza teselantes de polígonos cóncavos y su teselación utilizando está única pieza, permitió entender su proceso de construcción, que no es tan fácil como en las teselaciones cuyas teselas son polígonos convexos.

Para elaborar una tesela que sea un polígono cóncavo en Cabri Géomètre II plus, se utiliza un polígono convexo que permita realizar una teselación, como un triángulo. En la figura 5 se presenta un triángulo equilátero, que a partir del punto medio de la mitad de uno de los lados se elabora un triángulo equilátero, este triángulo se rota 60° con respecto al punto O. La mitad del triángulo equilátero de la derecha, es lo que se le va a quitar al triángulo mayor y se va a colocar por fuera de la región de este triángulo. Así que utilizando polígono se recubre el nuevo contorno y se ocultan los tres triángulos. La figura final es un polígono cóncavo con igual área del triángulo equilátero inicial.

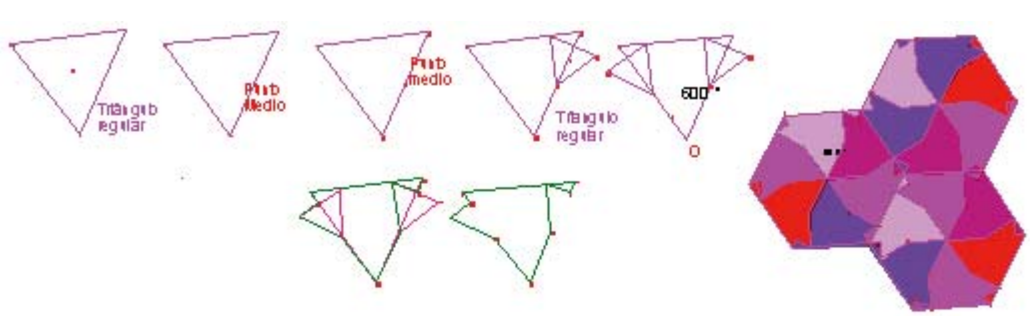


Figura 5. Elaboración de una tesela que es un polígono cóncavo.

Con esta pieza se inicia la teselación, realizando rotaciones de 60° con relación al punto O. Finalizadas las rotaciones se observa que seis piezas forman un hexágono regular, para continuar la teselación se siguen formando hexágonos, para ello se realiza una simetría axial de una las teselas para continuar con el primer procedimiento (ver figura 5).

A continuación se presentan algunas de las teselaciones que han realizado los estudiantes en Cabri Géomètre II Plus. Además de producir la teselación los estudiantes describen el procedimiento que realizaron.

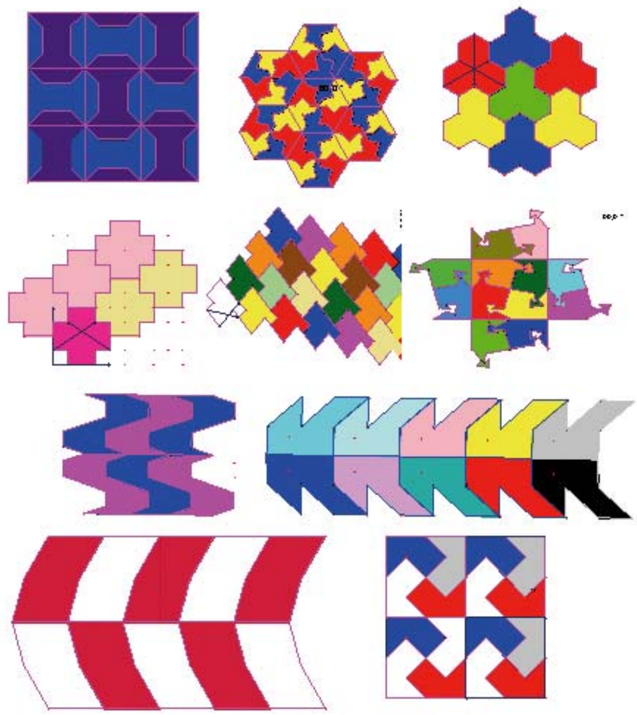


Figura 6. Algunas de las teselaciones elaboradas en Cabri Géomètre II Plus

5. Consideraciones finales

Las teselaciones brindan un contexto diferente a lo que usualmente se propone para el estudio de las propiedades de los polígonos y de las transformaciones isométricas como las rotaciones, translaciones y simetrías. Esta temática permite conocer obras de Arte como las de Escher, de cuyos análisis se pueden obtener elementos para la elaboración de las teselaciones que motiva a los estudiantes a crear. Lo presentado son algunas reflexiones que han surgido del trabajo de la construcción de teselaciones en cartulina y Cabri Géomètre II Plus que espera sean fuente para el diseño en el aula. Es importante destacar las diferentes aprehensiones figurales que se generaron en las situaciones propuestas.

Bibliografía

[1] DUVAL, R (2000). *Approveche Cognitive des Problèmes de geometría en termes de congruence*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. 1998. Tomado de Marmolejo y Vega.

[2] GUTIÉRREZ, A. (1990): *Los cubrimientos de M.C. Escher como material didáctico en la enseñanza de las isometrías (texto de la conferencia en el "Congreso de arte y matemáticas. M.C. Escher: Entre la geometría y el arte"*. Universidad de Granada. Granada (España), 7-25 de mayo de 1990). Manuscrito.

[3] MARMOLEJO, G. y VEGA, M. (2002). *Geometría desde una perspectiva semiótica: visualización, figuras y áreas*. Universidad del Valle.

[4] MESQUITA, A. (1989) *La influencia de los aspectos figurales en la argumentación de los alumnos en geometría: elementos para una tipología*. Universidad de Luís Pasteur

[5] MINERVA, M. y CODINA, M (2004). *Taller de Teselación*. En: Iberocabri 2004 Disponible en http://www.iberocabri.org/ProgramaIberocabri2004.htm

[6] TENA, J. (2004). *Grupo de simetrías en el plano*. Universidad de Valladolid.