El teorema de pappus en la adición y en la multiplicación

Saulo Mosquera López
Profesor Universidad de Nariño
Nariño, Colombia
samolo@udenar.edu.co

Resumen

En uno de los textos de matemáticas, utilizados como referencia en la enseñanza básica, se presenta un método geométrico para multiplicar números enteros; en este trabajo se justifica este procedimiento y se muestra cómo algunas propiedades de la adición y la multiplicación se deducen a partir del teorema de Pappus.

1. Introducción

En el libro 2 de la serie Matemática Progresiva, Editorial Norma, se presenta un método geométrico para multiplicar números enteros. ¿Cuál es la justificación de este procedimiento?

La respuesta a este interrogante es sencilla, pero al tratar de profundizar en él, es posible observar que existe un teorema geométrico, El Teorema de Pappus, que guarda una estrecha relación con algunas propiedades aritméticas de la adición y la multiplicación; esta interrelación es la que se presenta en este artículo que se ha dividido en cinco secciones.

I. El teorema de Pappus.

II. Descripción Geométrica de la Adición.

III. Implicaciones del Teorema de Pappus en la Adición.

IV. Descripción Geométrica de la Multiplicación.

V. Implicaciones del Teorema de Pappus en la Multiplicación.

2. El teorema de Pappus

Pappus de Alejandría fue un matemático de la antigua Grecia que vivió a finales del siglo III A. de C. Su gran obra "La colección" se puede considerar como el libro guía de los trabajos geométricos existentes en su época, enriqueciendo éstos con numerosas proposiciones originales, versiones mejoradas de otras, extensiones y comentarios históricos valiosos. Según los historiadores, Pappus fue el último de los geómetras griegos creadores, ya que después de él la matemática griega prácticamente desapareció y solo fue perpetuada por escritores y críticos secundarios.

El teorema de Pappus trata sobre la pertenencia recíproca de puntos y rectas, como tal pertenece a la Geometría Proyectiva y en ella desempeña un papel fundamental.

Definición 2.1. Se denomina HEXÁGONO a la figura formada por 6 puntos del plano que son los VÉRTICES del hexágono y 6 rectas que unen pares consecutivos de vértices que son los LADOS del hexágono. Se llaman LADOS OPUESTOS a los pares de lados que son opuestos si el hexágono es regular, es decir si $ABCDEF$ es un hexágono, entonces:

1. Los puntos A, B, C, D, E y F son los vértices.
2. La rectas $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ y $\overline{FA}$ son los lados.
3. $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$; $\overline{BC}$ y $\overline{FE}$; $\overline{CD}$ y $\overline{FA}$ son los pares de lados opuestos.

El Teorema de Pappus expresa una de las propiedades notables de un hexágono cuando se tiene una disposición especial de sus vértices.

Teorema 2.1 (Teorema de Pappus). "Si los vértices de un hexágono se encuentran alternadamente sobre las rectas l y m entonces los puntos de intersección de los pares de lados opuestos son colineales."

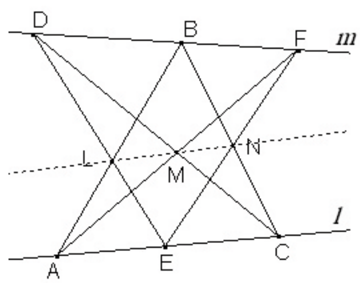

Figura 1

Una demostración de este teorema requiere algunos conceptos proyectivos y puede consultarse en [3].

Obsérvese que la existencia de los puntos L, M y N, como puntos ordinarios, depende esencialmente de la disposición de los puntos A, E, C y B, D F sobre las rectas l y m por tanto es posible considerar algunos casos particulares, entre los cuales está el siguiente: ¿Qué sucede si en el hexágono hay dos pares de lados opuestos paralelos?

Se deben considerar dos posibilidades:

1. l no es paralela con m (Figura 2). Sea O el punto de intersección de las rectas l y m, puesto que las rectas $\overline{ED}$ y $\overline{AB}$ son paralelas al igual que las rectas $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ se deduce que los triángulos AOB y EOD, y los triángulos EOF y COB son semejantes, de donde
$$\frac{AO}{BO} = \frac{EO}{DO} \;\; y \;\; \frac{EO}{CO} = \frac{FO}{BO}$$
y en consecuencia $\frac{FO}{AO} = \frac{DO}{CO}$ y por tanto $\overline{AF}$ es paralela a $\overline{CD}$.

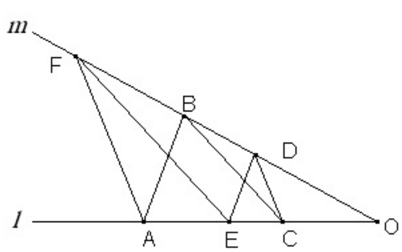

Figura 2

2. l es paralela a m (Figura 3)

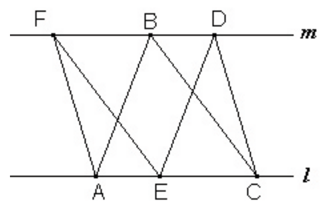

Figura 3

Como $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{ED}$ y $\overline{EF}$ es paralela a $\overline{BC}$ entonces los cuadriláteros $ABDC$ y $ECFB$ son paralelogramos de donde $AE = BD$ y $EC = BF$, y de aquí concluimos que $AC = FD$ o sea que $ACDF$ es un paralelogramo y por lo tanto $\overline{AF}$ es paralela a $\overline{CD}$.

De esta manera se ha demostrado que:

> "Si los vértices de un hexágono están alternadamente sobre dos rectas l y m y el hexágono posee dos pares de lados opuestos paralelos entonces los lados del tercer par también son paralelos."

El caso en el que las rectas l y m no son paralelas se denominará "Teorema de Pappus" y el caso en el que l y m son paralelas "El Pequeño Teorema de Pappus."

3. Descripción deométrica de la adición

La adición Geométricamente tiene su fundamento en la noción intuitiva de colocar un segmento a continuación de otro en la misma recta, es conocido, además, la correspondencia biunívoca que existe entre los puntos de una recta l, con un punto dado como origen y un segmento unidad dado, y los números reales, de manera que no se hará diferencia entre los puntos y los números.

Definición 3.1. Definición 2. Dados una recta l del plano, O un punto en ella y A, B, C tres puntos cualesquiera de l, diremos que C es la suma de A y B, $C = A + B$, si y sólo si $OC = OA + OB$, consideradas como distancia dirigidas. (Figura 4)

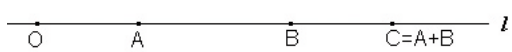

Figura 4

3.1. Algoritmo

Sea l una recta, O un punto en ella A y B y dos puntos cualesquiera sobre l, entonces (Figura 5)

a. Se traza por O una recta m diferente de l.

b. Se traza una recta l' paralela a l, entonces intercepta a m en un punto E.

c. Por B se traza una paralela a m la cual corta a l' en un punto E.

d. Se une A con D y por E se traza una paralela a $\overline{AD}$, la cual intercepta a l en un punto C.

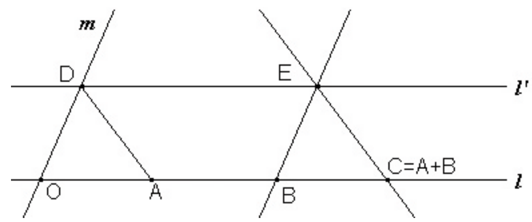

Figura 5

El punto C es tal que $C = A + B$ ya que $OC = OA + AC = OA + ED = OA + OB$.

4. Algunas consecuencias del teorema de Pappus en la adición

La adición en el conjunto de los números reales tiene las propiedades de grupo abeliano y es posible demostrar que algunas de ellas se deducen a partir del algoritmo dado, por ejemplo, la asociatividad de la adición, sin embargo otras requieren de otros conceptos. Una de ellas se deduce a continuación.

Teorema 4.1. El pequeño teorema de Pappus es equivalente a la conmutatividad de la adición.

Demostración:
Demostración. Un sentido de este resultado se obtiene así: sea l una recta del plano y O un punto en l, consideremos además, dos puntos cualesquiera A y B en l, entonces

a. Se construye $A + B$ de acuerdo con el algoritmo dado (Figura 6) con lo cual obtenemos los puntos D y E sobre la recta l' paralela a l, el punto C sobre l tal que $C = A + B$ y las rectas $m = \overline{OD}$, $\overline{EB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{EC}$ tales que $\overline{OD}$ es paralela a $\overline{BE}$ y $\overline{DA}$ es paralela a $\overline{EC}$.

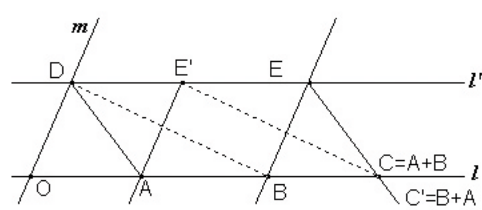

Figura 6

b. Se construye $B + A$, para lo cual se traza por A una paralela a m los cual determina el punto E' en l', unimos B con D y luego E' con C. El punto C es $B + A$ siempre que $\overline{BD}$ sea paralela con $\overline{E'C}$ lo cual se demuestra a continuación.

Puesto que por construcción $\overline{BE}$ es paralela a $\overline{OD}$ y $\overline{AE'}$ es paralela a $\overline{OD}$, entonces $\overline{BE}$ es paralela a $\overline{AE'}$ y como por construcción $\overline{AD}$ es paralela $\overline{EC}$ entonces en el hexágono $ADBECE'$ se cumplen las hipótesis del pequeño teorema de Pappus, por lo que $\overline{DB}$ es paralela a $\overline{E'C}$, luego C representa a $B + A$ y así la adición es conmutativa.

La demostración en el otro sentido procede como sigue. Se realiza la construcción, según el algoritmo, de $C = A + B$ y de $C' = B + A$ (Figura 6) con lo cual se obtiene que $\overline{OD}$ es paralela a $\overline{BE}$ y a su vez paralela $\overline{AE'}$, $\overline{AD}$ es paralela a $\overline{EC}$ y a $\overline{DB}$ es paralela a a $\overline{E'C'}$; entonces en el hexágono $EBDAE'$ hay dos pares de lados opuestos paralelos, a $\overline{BE}$ y a $\overline{AE'}$, a $\overline{AD}$ y a $\overline{EC}$ y puesto que $A + B = B + A$,C coincide con C', es decir, $\overline{DB}$ es paralela a $\overline{E'C}$ y por tanto se cumple el pequeño teorema de Pappus. $\square$

5. Descripción Geométrica de la Multiplicación.

Definición 5.1. Sea l una recta dada en el plano y O un punto en ella, se ubica un punto u en l diferente de O y se adopta $\overline{Ou}$ como segmento unidad, entonces si A, B y C son tres puntos cualesquiera de l, entonces C es el producto de A y B, $C = AB$ si y sólo si $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{Ou}$.

5.1. Algoritmo

Sea l una recta del plano, O y u puntos sobre ella con diferente de u y $\overline{Ou}$ el segmento unidad. Sean además, A y B puntos cualesquiera sobre l, entonces (Figura 7).

1. Se traza por O una recta cualquiera l' diferente de l.

2. Se selecciona sobre l' un punto u' tal que $Ou = Ou'$.

3. Se une u con u' y por B se traza una paralela a $\overline{uu'}$, esto determina en l' un punto B' tal que $OB' = OB$.

4. Se une $'$ con A y por B' y se traza una paralela a $\overline{u'A}$ la cual intercepta a l en un punto C.

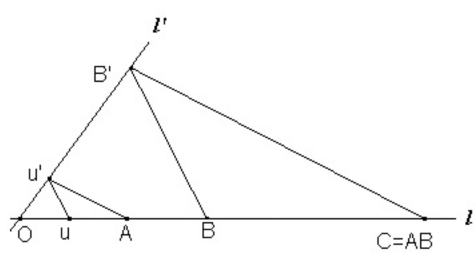

Figura 7

Este punto C es el producto de A y B ya que los triángulos $Ou'A$ y $OB'C$ son semejantes por tener un ángulo común en O y un par de lados paralelos, a saber los lados $\overline{u'A}$ y $\overline{B'C}$ de donde se obtiene que

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB'}{Ou'} = \frac{OB}{Ou} \text{ y por tanto } C = AB.$$

Obsérvese que este algoritmo proporciona una tabla de multiplicar por un número dado ya que es suficiente colocar en l el multiplicando A, en l' el multiplicador B y el segmento unidad $\overline{Ou'}$, unir u' con A y por B trazar una paralela a $\overline{Au'}$, el punto C de intersección de esta paralela y l representa el producto A (Figura 8).

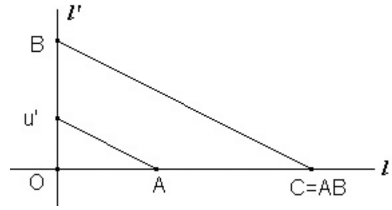

Figura 8

6. Implicaciones del teorema de Pappus en la multiplicación

De manera similar que en la adición, utilizando el algoritmo de la multiplicación se pueden probar algunas propiedades de esta operación; por ejemplo, la existencia del neutro, la distributividad y que otras pueden deducirse aplicando el teorema de Pappus. Veamos una.

Propiedad 6.1. El teorema de Pappus es equivalente a la conmutatividad de la multiplicación.

Demostración:

Sea l una recta del plano, O y u puntos diferentes sobre ella y el segmento unidad. Sean además, A y B puntos arbitrarios de l, entonces

1. Se construye AB de acuerdo con el algoritmo dado, con ello se obtiene los puntos u', B' sobre l', el punto C sobre l que representa AB y las rectas $\overline{uu'}$, $\overline{uA}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{BC}$ tales que $\overline{uu'}$ es paralela a $\overline{BB'}$ y $\overline{u'A}$ es paralela a $\overline{B'C}$. (Figura 9).

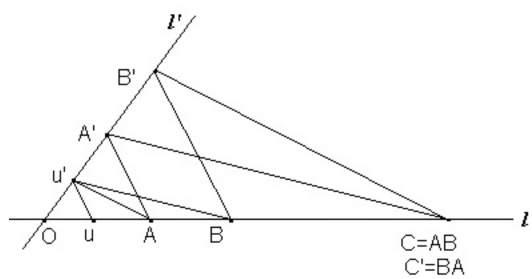

Figura 9

2. Se construye BA, para lo cual se traza por A una paralela a $\overline{u'}$ que determina en l' el punto A'; se une B con u' y A' con C. Para que C represente AB se debe cumplir que las rectas $\overline{u'B}$ y $\overline{A'C}$ sean paralelas. Veamos esto:

Puesto que por construcción $\overline{uu'}$ es paralela a las rectas $\overline{BB'}$ y $\overline{AA'}$ entonces $\overline{BB'}$ es paralela a $\overline{AA'}$ y como por construcción $\overline{u'A}$ es paralela a $\overline{B'C}$ entonces el hexágono $u'BB'CA'A$ tiene dos pares de lados opuestos y por el teorema de Pappus el tercer par tiene sus lados paralelos, es decir, $\overline{u'B}$ es paralela a $\overline{A'C}$ y por tanto C representa $\overline{BA}$ y así $C = AB = BA$.

La demostración en el otro sentido es análoga a la de la adición.

Como última consideración debe observarse que la tabla de multiplicar dada, proporciona un procedimiento para "probar" las leyes de los signos de la multiplicación, como puede deducirse de las siguientes gráficas.

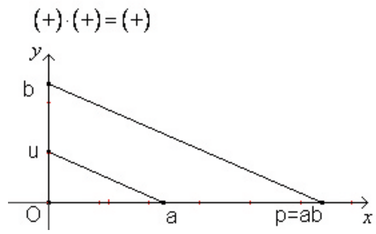

Figura 10.1

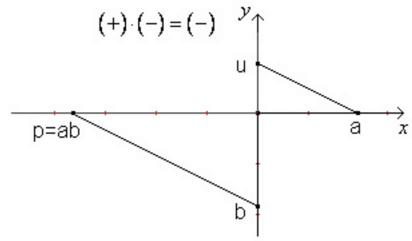

Figura 10.2

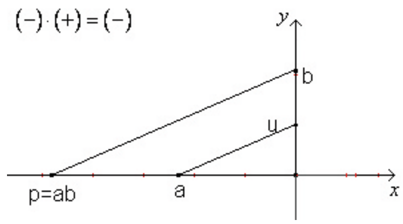

Figura 10.3

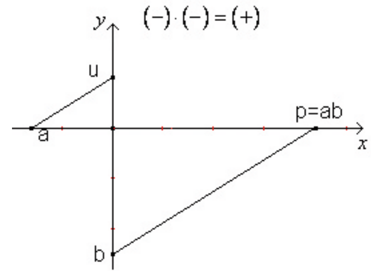

Figura 10.4

□

Bibliografía

[1] Blumenthal, L. *A Modern View of Geometry.* W. H. Freeman and company, San Francisco, 1961.

[2] Rodriguez Carlos. *Sistemas Numéricos.* (Apuntes). XII Coloquio Colombiano de Matemáticas, Universidad Santiago de Cali, Cali, 1982.

[3] Seidenberg, A. *Elementos de Geometría Proyectiva.* Editorial Continental. México, 1965.