INTRODUCCIÓN DEL TEMA "INTEGRALES" EN EL BACHILLERATO

Cecilia Calvo – Horacio Castagna – Verónica Molfino – Nora Ravaioli
Adm. Nacional de Educación Pública – Consejo de Educación Secundaria, URUGUAY.
ccalvopesce@hotmail.com – hcastagna@adinet.com.uy – veromol@adinet.com.uy – adecia@adinet.com.uy
Campo de investigación: Pensamiento variacional; Nivel educativo: Medio

Resumen

La presente Comunicación Breve se enmarca dentro de la producción de un grupo de trabajo de docentes uruguayos de diferentes niveles educativos reunidos por un interés común: el de cuestionarse acerca de las prácticas educativas actuales, qué tipo de aprendizaje están provocando y cómo modificarlas para mejorar dichos aprendizajes. En este caso el tema escogido fue el de la incorporación del tema "Integrales" al currículo de Secundaria. Se diseñó una propuesta de enseñanza-aprendizaje para el mismo, teniendo como principio rector el que fuera una primera aproximación de los estudiantes al tema, y por lo tanto sin sentir la necesidad de que se ajustara a lo que generalmente se presenta en los libros de texto actuales.

Introducción

El Bachillerato uruguayo se caracteriza por incluir en el programa de Matemática una introducción relativamente profunda del Cálculo Diferencial en el último año (17 – 18 años) en casi todas sus orientaciones. Sin embargo, y extrañamente, el Cálculo Integral sólo se incluye en la orientación Medicina, por lo que alumnos que después de aprobar el curso quedan habilitados para emprender estudios universitarios de Ingeniería, Arquitectura o Economía, no tienen ningún tipo de acercamiento al tema Integrales.
Un grupo de profesores de ámbitos Secundarios y Terciarios hemos constituido un equipo de trabajo dedicado a la reflexión para la mejora de la Enseñanza de la Matemática. En ese marco hemos trabajado sobre propuestas diversas y en esta oportunidad presentamos la que corresponde a la inclusión del tema integrales al currículo del bachillerato en especial en la opción ingeniería.
Nuestro interés en presentar el tema Integrales en el contexto de un curso de Cálculo en Secundaria se justifica en la idea de completar la visión que se da a los estudiantes al finalizar el Bachillerato del Cálculo Diferencial e Integral, articulando sus dimensiones numérica, gráfica y analítica. También tenemos como objetivos:

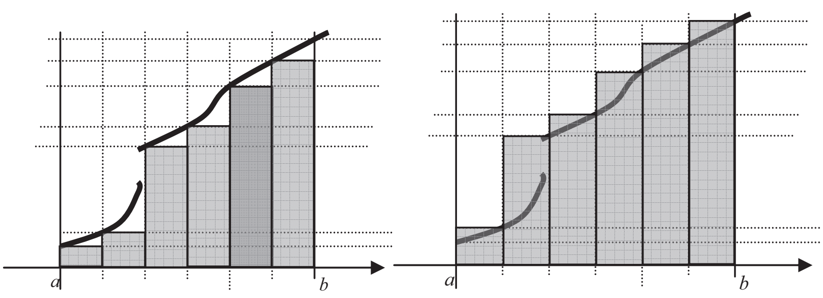
- Vincular los conceptos básicos del Cálculo con las ideas geométricas que le dieron origen.
- Integrar comentarios históricos que permitan apreciar la actividad matemática como proceso
- Trabajar con métodos numéricos completando así el acercamiento a distintas estrategias de resolución de problemas que se presentan durante la actividad matemática
- Relacionar lo continuo con lo discreto en contextos cotidianos partiendo de un intervalo continuo, considerar particiones de él (transitando así nociones discretas) y volver a un contexto continuo con el estudio del límite.

En la comunicación nos proponemos exponer y fundamentar la elección de una definición de integral, diferentes abordajes del Teorema Fundamental del Cálculo, así como algunas aplicaciones geométricas y extramatemáticas y problemas relativos a la dimensión numérica del concepto de integral.

Acerca de la definición escogida
Los siguientes son algunos de los criterios que hemos acordado para escoger la definición:

- Introducir el tema a partir de la noción de área –noción familiar para los estudiantes– vinculándola a partir de su acotación mediante figuras incluidas e incluyentes que sucesivamente se van acercando al área de la región en cuestión. Para esto admitiremos que la noción de área tiene sentido para los estudiantes, a partir de las experiencias escolares previas: conocen cómo calcular el área de los polígonos elementales y saben que si dos figuras A y B cumplen que $A \subset B$ entonces $á(A) \subset á(B)$ y que si A y B son figuras disjuntas entonces $á(A \cup B) = á(A) + á(B)$.
- Postergar la vinculación de la integral con la derivada a través del teorema Fundamental del Cálculo.
- Manejar una caracterización que nos permita dar tanto ejemplos de funciones integrables como ejemplos de funciones no-integrables y calcular el valor de la integral en el caso de funciones integrables.
- Trabajar con particiones de intervalos de igual longitud, ya que puede resultar más accesible para los estudiantes.
- Trabajar con una definición equivalente a la de Riemman

<u>Definición</u>
Guiados por la intuición gráfica se llama suma superior al área de una figura que incluye a la región bajo el gráfico de una función acotada cuando ésta es positiva, y de igual forma suma inferior al área de una figura incluida en tal región.
Como pretendemos que no sea necesario exigir condiciones para el signo de la función las sumas superiores las definimos de manera que respete esa intuición pero resulte aplicable también a funciones negativas o de signo no constante.
Empecemos por considerar una función acotada en un intervalo [a, b] y la partición de dicho intervalo en un número n de subintervalos del mismo tamaño.
Para ello tomaremos $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2.\frac{b-a}{n}, ..., x_n = b$ o sea $x_i = a + i.\frac{b-a}{n}$ con $i = 1, 2, ...n$ y en cada uno de los subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ se consideran l_i y u_i los valores ínfimo y supremo respectivamente de la función en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. A partir de tales valores definimos



$$s_n = l_0.\frac{b-a}{n} + l_1.\frac{b-a}{n} + ... + l_{n-1}.\frac{b-a}{n} \qquad S_n = u_0.\frac{b-a}{n} + u_1.\frac{b-a}{n} + ... + u_{n-1}.\frac{b-a}{n}$$

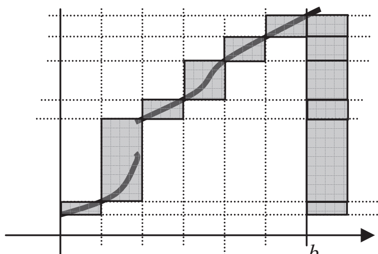
2

Proponemos definir que una función acotada es integrable cuando lim Sn = lim sn y que, en ese caso, $\int_a^b f = \lim S_n$.

Es esta igualdad la que proponemos tomar como definición, sabiendo que no es la usual (en la cual las particiones no son sólo aquellas en que todos los subintervalos tienen la misma longitud) pero que es equivalente a ella tal como se puede probar. En el trabajo original incluimos una demostración de dicha demostración.

Ejemplo: con esta definición es fácil ver que las funciones monótonas son integrables, con la siguiente demostración visual (en este caso para una función creciente):

$$S_n - s_n = suma\ \ de\ \ cuadraditos\ \ coloreados$$
$$= (f(b) - f(a)).\frac{b-a}{n}$$



Por lo tanto, para todo m > 0 se puede encontrar n tal que *Sn -sn < m*, lo que prueba que la función es integrable.

No ejemplo: $f:[0,1] \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \in R-Q \end{cases}$

Se puede probar que esta función no es integrable usando el hecho de que para cualquier partición, $S_n = 1$ y $s_n = 0$.

Teorema fundamental del Cálculo: diversas versiones

Partimos del supuesto de que introducir en un primer curso de Cálculo los temas "Integrales" y "Derivadas" en forma independiente, requiere que luego se preste especial atención a los resultados que permiten vincular ambos conceptos. Por esta razón nos propusimos encontrar diferentes maneras de trabajar dicha relación en el aula, de manera de ofrecer diferentes acercamientos. Encontramos que como esos conceptos fueron presentados a partir de los problemas geométricos que les dieron origen, resulta oportuno que el vínculo entre ellos se establezca también en el ámbito geométrico, desde una perspectiva epistemológica.

Proponemos observar previo a la introducción del teorema:

- que es posible a partir de cada función f integrable en [a, b] considerar una nueva función F definida en ese intervalo de modo que F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ (esto ha mostrado no ser trivial para los estudiantes que tienen un primer acercamiento al cálculo).
- que las funciones que hasta el momento se estudiaron verifican que $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$. Una de los aspectos positivos de este acercamiento al tema es la cantidad de ejemplos de funciones integrales y de sus respectivas primitivas que se pueden calcular desde la introducción del tema.

- que es necesario para que se cumpla la propiedad anterior que la función f sea continua. Se analiza para ello un ejemplo de una función definida en un intervalo que no es continua en un punto, es integrable y tiene una función primitiva, pero no derivable en el punto de discontinuidad, por lo que f y F' no coinciden en todo el dominio.
- el teorema del valor medio para integrales.

En el trabajo se presentan varias versiones del Teorema Fundamental del Cálculo, resultado de un análisis del desarrollo del mismo a lo largo de la historia de la disciplina. Varios de ellos son expuestos en el apartado de Profundizaciones, al final del trabajo. Dentro de ellas optamos por estas dos versiones. Consideramos que articulándolas en clase a través de aplicaciones los estudiantes podrán manejar con precisión la relación entre el concepto de derivada y el de integral.

Primer teorema fundamental del Cálculo:
Si una función f es continua en un intervalo [a,b], c es un punto del mismo, F: [a,b] $\to$ R tal que F(x) = $\int_c^x f(t)dt$ *, entonces F es derivable en (a,b) y F'(x) = f(x)* $\forall x \in$ *(a,b).*

Segundo teorema fundamental del Cálculo (o Regla de Barrow):
Si una función f es continua en un intervalo [a,b], G una función cuya derivada coincide con f en [a,b][1] *entonces* $\int_a^x f(t)dt$ *=G(x) – G(a)*

En la demostración de este último teorema se hace explícito que todas las primitivas de una función difieren en una constante.

Aplicaciones geométricas (al cálculo de áreas y volúmenes de revolución)
Debemos aclarar que en el caso particular de las aplicaciones geométricas trabajamos con las sumas de Riemann. Esta decisión se debe a que:

- Nos permite trabajar los cálculos en forma más simple que con los máximos y mínimos en cada intervalo.
- Si una función es integrable el límite de las sumas de Riemann coincide con la integral como puede observarse, si consideramos f integrable en [*a,b*] y en ese intervalo una partición, donde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y m_i y Mi son mínimo y máximo respectivamente en cada intervalito tendremos:

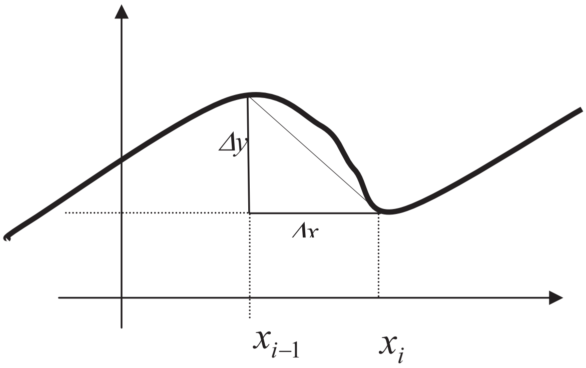
$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i).(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{i=n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

"La moraleja de este cuento es que todo lo que se asemeje a una buena aproximación de una integral lo es realmente, siempre que todas las longitudes de los intervalos de la partición sean suficientemente pequeños"

[1] Se dice en estos casos que G es una *primitiva* de f.

(Spivak, 1987).

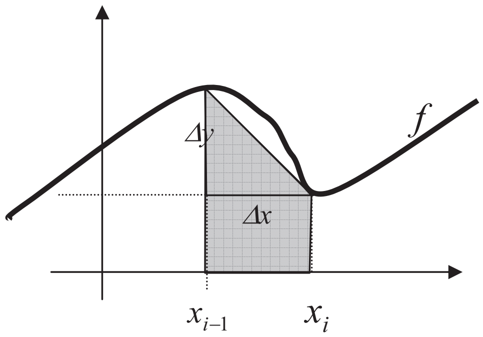
Mostraremos a continuación algunos ejemplos:
<u>Longitud de curva</u>



Es razonable pensar que tomando en $[a,b]$ intervalos de longitud suficientemente pequeña podremos aproximar la longitud de una curva con la poligonal inscrita. Si tomamos en cada uno de los intervalitos de la partición el triángulo rectángulo que tiene por catetos la diferencia de abscisas Δx y la diferencia de imágenes Δy y aplicamos el Teorema de Pitágoras obtenemos algo "parecido a una buena aproximación de una integral", por lo que la longitud de la curva en $[a,b]$ estará dada por :

$$\sum_1^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_1^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i \to \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

<u>Superficie de Revolución</u>



Es razonable pensar que tomando en $[a,b]$ intervalos de longitud suficientemente pequeña podremos aproximar en cada uno de los intervalitos de la partición la superficie de revolución (generada al hacer girar f alrededor del eje ox) con la superficie lateral de un cono truncado.
En este caso la superficie de ese cono truncado se calcula como:

$$\pi\left(f(x_i) + f(x_{i-1})\right)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

La superficie de revolución estará dada entonces por:

$$\pi\sum_1^n \left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = 2\pi\sum_1^n f(\delta)\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \to 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Estos son algunos de los ejemplos que ilustran el enfoque propuesto. Otras aplicaciones geométricas desarrolladas en el trabajo son el cálculo del área del círculo, una estrategia para la aproximación del número π y el cálculo del volumen de cuerpos de revolución.

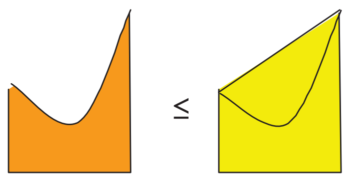
Dimensión numérica
Consideramos que desarrollar la dimensión numérica del concepto de integral se justifica tanto por la presentación de las estrategias que se ponen en juego como por la posibilidad

de dar respuesta aproximada al cálculo de la integral de funciones sin primitiva elemental como podría ser f(x)=e^{x^2} .

Como métodos de aproximación numérica de una integral trabajamos los métodos: trapezoidal, rectangulares (con altura la ordenada del extremo izquierdo de cada intervalo, con altura la ordenada del extremo derecho de cada intervalo, con altura la ordenada del punto medio de cada intervalo, con altura la ordenada de un punto cualquiera de cada intervalo, con altura el supremo de los valores funcionales de cada intervalo, con altura el ínfimo de los valores funcionales de cada intervalo) y el de Simpson.

En la propuesta se hace tanto énfasis en la búsqueda de una buena aproximación como en el control del error de dicha aproximación y en las justificaciones visuales y algebraicas que validan estas aproximaciones. Por ejemplo, en el caso de funciones (positivas y derivables varias veces), cuando la concavidad es positiva se estudia que el método trapezoidal:

- Ofrece una aproximación por exceso del área bajo la curva (la figura ilustra como resultaría aplicado a cada subintervalo de la partición)



- El error de esta aproximación es menor que

$$error \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}B$$

siendo a y b los extremos del intervalo de integración, n la cantidad de subintervalos en que se divide [a,b] y B el máximo de la derivada segunda de la función en cuestión en el intervalo [a,b].

- Ese error, para una misma partición, es menor que el que ofrece el método rectangular con altura la ordenada del punto medio de cada subintervalo.
- En el caso de la integral de f(x)= e^{x^2} en el intervalo [0,1], considerando la partición {0, ½, 1} se obtiene como aproximación por exceso $\frac{1+2\sqrt[4]{e}+e}{4}$ = 1,571... con un error menor que $\frac{e}{8}$ cuando se sabe que el valor real de esta integral es 1,462...

Bibliografía

Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M. Y Casellas, E. (1996) *Cálculo Diferencial e Integral.* Madrid, España: Ed. Síntesis.

Dalcín, M.; Molfino, V y Pérez, G. (2002). *Orígenes del Cálculo Infinitesimal: de la Antigüedad al Teorema Fundamental*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 15, Tomo I. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid, España: Ed. Pirámide.
Grupo Cero (1985). *Matemática para el bachillerato, curso 2.* España: Editorial Teide.

Spivak, M. (1987) *Cálculo infinitesimal*. España: Editorial Reverté.