

EL CONCEPTO DE LÍMITE EN LOS LIBROS DE TEXTOS UNIVERSITARIOS

Nora Gatica, Gladys May, Analía Cosci, Graciela Echevarría, Juan Renaudo, Marcela Carranza

nimberti@fices.unsl.edu.ar; gcmay@fices.unsl.edu.ar; gecheva@fices.unsl.edu.ar
Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales Universidad Nacional de San
Luis (Argentina)

Campo de investigación: Educación continua; Nivel educativo: Superior

RESUMEN

El aprendizaje de los temas de Cálculo en primer año de la Universidad, suele ser problemático para los alumnos, lo que conlleva a una gran cantidad de fracasos y posteriormente, en muchos casos, a la deserción de los estudiantes.

En el presente trabajo, tomando como referencia los registros de representación semiótica (Duval, 1998), analizaremos las distintas formas de abordar la definición del concepto de límite en los libros de textos que forman parte de los recomendados en la asignatura.

Dado el carácter exploratorio de la investigación que hemos abordado, el estudio de los textos no tiene un carácter exhaustivo ni representatividad estadística.

INTRODUCCIÓN

Como docentes de las carreras de Ingeniería, una de las problemáticas que nos preocupa, es la enseñanza del concepto de límite en los alumnos de primer año de esta carrera.

Elegimos este tema, por tratarse de una noción que requiere altos niveles de abstracción, su aprendizaje se reduce a una mera memorización de la definición del concepto, la que fácilmente es olvidable, ya que no tienen una interpretación funcional de la misma, presumiblemente, por la falta de articulaciones entre varios registros. Sin embargo, los alumnos después de su enseñanza, pueden realizar el cálculo correspondiente sin mayores (o con ciertas) dificultades.

Lo expresado anteriormente, en parte, es avalado a través del bajo rendimiento en las evaluaciones correspondientes, a través de los años.

Desde otra perspectiva, los estudiantes de las carreras de Ingeniería tienen el convencimiento de que sólo les interesan las matemáticas que tienen aplicaciones directas y, por tanto, el concepto de límite, tal y como se viene enseñando en los estudios de Ingeniería, les resulta demasiado árido, no saben aplicarlo ni a situaciones problema ni a nuevos planteamientos matemáticos, y ni siquiera son capaces de establecer conexiones con el cálculo de límites.

La verdadera dificultad para poder comprender esta definición radica en el hecho de que debemos concebirla como una idea dinámica como si fuese el resultado de un movimiento: recorreremos los valores de la variable x hacia un determinado punto y observamos el comportamiento de la función.

En el estudio que presentamos, nos hemos dedicado a analizar el significado institucional del concepto de límite funcional. O sea, el significado que el docente al momento de enseñar el tema lleva incorporado. Pero, ¿Cómo lo determinamos? Dado que los libros de textos son el principal referente para los docentes al momento de preparar el tema, nos hemos abocado en el análisis de distintos textos.

Este trabajo forma parte de una investigación mas amplia en el que hemos analizado el significado personal de los alumnos mediante cuestionarios, como así también el desarrollo histórico del concepto.

MARCO TEORICO DUVAL

Para el análisis de textos hemos considerado los registros de representación semiótica de Duval.

Debido a que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, Duval (1998) enfatiza la importancia de la *representación* en Matemáticas, estableciendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella.

A estas representaciones, la clasifica en dos clases:

Registros de representación semiótica

Duval introduce el concepto de *sistema semiótico* como un *sistema de representación*, el cual puede ser un *registro de representación* si permite tres actividades cognitivas, a saber:

- La **presencia de una representación** identificable como una representación de un registro dado. Por ejemplo: el enunciado de una frase o la escritura de una fórmula.
- El **tratamiento de una representación** que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
- La **conversión de una representación** que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Esta actividad cognitiva es diferente e independiente a la del tratamiento.

La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente del tratamiento. Duval afirma que no existen y no pueden existir reglas de conversión a la manera que existen reglas de tratamiento y de conformidad.

En esta teoría se considera que la *comprensión integral de un concepto* está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica. Algunos ejemplos de estos registros pueden ser el lenguaje natural, las escrituras algebraicas o los gráficos cartesianos.

Este marco teórico nos ayudará a analizar que cambios de registros ofrecen los libros de textos para la enseñanza del tema, además que libros de textos dan mayor motivación, que tipo de definición utilizan, si hay actividades en donde se solucionen problemas de la vida real, pero nos enfocaremos principalmente en las actividades propuestas, en lo que se refiere a cambios de registros, si son actividades de tratamientos entre registros (tipo calculo) o de conversión entre ellos, ya que Duval establece que para que haya verdadera comprensión es necesario dar actividades de cambios de registros

Análisis de los Libros de Texto

Los aspectos analizados en estos libros se refirió a:

1. Si los libros relacionaban este tema con los estudiados anteriormente (Enlace con ideas previas)
2. Si se especificaba cuales eran los conocimientos necesarios para abordar este tema (conocimientos previos)
3. ¿Estaban planteados claramente los objetivos pretendidos al desarrollar el tema?

4. Se apoyaron en la historia para introducir el tema? (referencias históricas)
5. Como introducían el tema en lo referente a si planteaban problemas, gráficos, tablas o algún otro tipo de instrumento didáctico?
6. ¿Definían el límite en forma intuitiva o formalmente?
7. Proponen algún tipo de actividad con el objetivo de mostrar la necesidad de la utilización de este concepto.
8. Se apoyan en el registro gráfico para explicar esta definición.
9. Que tipos de actividades o ejercicios presentan estos libros de texto.

**Elementos de Cálculo Diferencial e Integral - Sadosky Guber
Editorial Alsina. 1973 (Décima edición corregida y aumentada).**

Enlace con ideas previas	No
Conocimientos previos	Unidad anterior funciones
Objetivos	No
Referencias históricas	No
Introducción	No contiene
Definición de Límite	Definición intuitiva (no contiene). Definición rigurosa: Se dice que una función $y = f(x)$ tiende el límite L cuando x tiende al valor a si el valor absoluto de la diferencia $f(x) - L$ puede hacerse tan pequeña como se quiera en las proximidades del punto $x = a$ (sin interesarnos lo que ocurre en el punto $x = a$).
Situaciones que dan sentido al concepto	Mediante el ejemplo de $f(x) = (x - 1)^3$. Contiene seis ejemplos expresados en el mismo registro. Ejemplos de funciones expresados en registro algebraico y gráfico. Tratamiento gráfico de la definición sobre la misma Ejemplos donde se solicita conversiones entre registros y tratamientos en el mismo registro.
Definición : gráfica	Si
Ejercicios a resolver	Siete ejercicios donde se solicita la demostración de existencia de límite.

Obeservación: Con respecto a esta definición la da en forma coloquial y no en forma algebraica como normalmente se la damos a nuestros alumnos.

**Cálculo Diferencial e Integral . Tomo I – N.Piskunov
Ed. Mir Moscú. Ed. 3ra- 1977**

Enlace con ideas previas	Número Variable y función
Conocimientos previos	No Presenta
Objetivos	No Presenta
Referencias históricas	No Presenta

Introducción	Da una definición intuitiva de límite a través de sucesiones.
Definición de Límite	Definición rigurosa: Supongamos que $y = f(x)$ está definida en determinada vecindad del punto a o en ciertos puntos de la misma. La función $y = f(x)$ tiende al límite b ($y \rightarrow b$) cuando x tiende a a ($x \rightarrow a$), si para cada número positivo ε por pequeño que este sea es posible indicar un número positivo δ tal que para todos los valores de x ,diferentes de a , que satisfacen la desigualdad $ x - a < \delta$, se verificará la desigualdad $ f(x) - b < \varepsilon$
Situaciones que dan sentido al concepto	No hay
Definición : gráfica	Si hay
Ejercicios a resolver	Siete ejercicios donde se solicita la demostración de existencia de límite

**El Cálculo con Geometría Analítica – Louis Leithod.
Ed. Harla México. Ed. 6ta Edición - 1992**

Enlace con ideas previas	En la unidad anterior hay números reales, funciones y gráficas
Conocimientos previos	Intervalos y Entornos
Objetivos	No Presenta
Referencias históricas	No Presenta
Introducción	No Presenta
Definición de Límite	Definición intuitiva con un ejemplo Definición rigurosa: utiliza el ejemplo anterior para introducir la definición formal. Sea f una función definida en todo número de algún intervalo abierto I que contenga a a excepto, posiblemente en el número a mismo. El límite de $f(x)$, cuando x tiene a a es L , y se escribe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, si el siguiente enunciado es verdadero. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, sin importar cuan pequeño sea, existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta$ entonces $ f(x) - L < \varepsilon$
Situaciones que dan sentido al concepto	Ejemplos de funciones expresados en registro gráfico y registro algebraico. Ejemplos donde se solicita conversiones entre registros y tratamientos en el mismo registro.
Definición : gráfica	Si presenta

Cálculo Conceptos y Contextos - Stewart, James
Ed. International Thompson Editores (1999)

Enlace con ideas previas	Si (Fotográficamente)
Conocimientos previos	Si (tangente a la curva)
Objetivos	No
Referencias históricas	Artículo Newton y los límites.
Introducción	Como surgen los límites cuando se intenta hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto. Presentando dos ejemplos.
Definición de Límite	<i>Definición intuitiva</i> A través de registro tabular. Dando distintos ejemplos, presentado diferentes situaciones. <i>Definición rigurosa:</i> Escribimos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y decimos “el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a , es igual a L ”. Si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como deseemos), escogiendo una x lo bastante cerca de a , pero no igual a a .
Situaciones que dan sentido al concepto	Ejemplos de funciones expresados en registro tabular, algebraico y gráfico. Tratamiento gráfico de la definición sobre la misma Ejemplos donde se solicita conversiones entre registros y tratamientos en el mismo registro.
Definición : gráfica	No contiene
Ejercicios a resolver	Presenta ejercicios en los tres registros del concepto de límite.

Cálculo con Geometría Analítica – Dennis G. Zill.
Grupo Editorial Iberoamérica. (1987)

Enlace con ideas previas	Funciones
Conocimientos previos	No
Objetivos	No
Referencias históricas	Al finalizar el capítulo hay una referencia histórica.
Introducción	Da una noción intuitiva del concepto de límite relacionado los distintos registros (algebraico, gráfico y tabular). Donde cada ejemplo es una situación diferente. A continuación presenta teoremas acerca de límite, concepto de continuidad. Luego da la definición rigurosa de límite
Definición de Límite	<i>Definición rigurosa:</i> Supóngase una función f definida en un intervalo abierto que contiene al número a , excepto posiblemente en el propio a . Entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

	$ f(x)-l < \varepsilon$, siempre que $0 < x-a < \delta$
Situaciones que dan sentido al concepto	Ejemplos de funciones expresados en registro algebraico y gráfico. Tratamiento gráfico de la definición sobre la misma Ejemplos donde se solicita conversiones entre registros y tratamientos en el mismo registro.
Definición : gráfica	Si contiene
Ejercicios a resolver	Presenta ejercicios en los tres registros del concepto de límite.

Conclusiones

Dado que los libros de textos son el principal referente para los docentes al momento de preparar un tema es por ello que hemos hecho este análisis, del cual extraemos las siguientes conclusiones:

- Es notable el cambio que se ha producido en el abordaje del tema en las últimas décadas, comparadas con libros.
- La rigurosidad de la definición utilizada en los libros mas viejos con respecto al enfoque dado por los libros mas recientes es notable, tanto en el Stewart como en el Zill, este tema se trata desde el punto de vista , descriptivo gráfico numérico y algebraico. Dejando la definición precisa épsilon delta de límite en el apéndice, para aquellos alumnos que quieran profundizar sobre el tema. (A pesar de que estos autores declaman "...que aún espero que en mis propias clases los estudiantes sepan la definición formal de límite y que sean capaces de interpretarla gráficamente...". Me gustaría que supieran que la intuición, las gráficas y los cálculos puedan ser convincentes, pero que a menudo tienen por así decirlo sus propias limitaciones (Zill, 1987, pag.
- Otra observación es la tendencia de atraer visualmente al lector, con el uso de los diferentes registros.
- Se ha ido incluyendo cada vez más en la introducción de tema los cambios de registros para la comprensión de tema.
- El avance tecnológico (el uso de computadoras) es más utilizado en libros recientes.
- En los dos primeros libros se hace mas hincapié en la definición épsilon – delta. (Piskunov, Sadosky).
- Zill “ yo no pongo mucho énfasis en la búsqueda , a menudo poco compensatoria, de la “delta” desconocida, dada la misteriosa “épsilon”
- Se hace más hincapié en una noción más geométrica e intuitiva que la definición épsilon –delta.
- Es notable la diferencia de la presentación de los prólogos o prefacios de los libros más nuevos. Los autores mas nuevos hacen referencia de lo que quieren o como van a tratar cada tema. Mientras que en los anteriores hacen agradecimientos
- Cambios registros de cambio entre la edición vieja y otra mas nueva
- Recursos tecnológicos como usar la calculadora

Bibliografía

Debur, L y otros (2000): *Análisis del desarrollo histórico del límite y continuidad de una función*. Acta IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "Thales". San Fernando (Cadiz), España. (pp.201-204)

Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.

Fabra M. y Deulofeu J. (2000): *Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos"*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol.3, Num.2, (pp. 207-230).

Gatica N., Tauber L. y Ruiz F. (2002). "Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería". En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.). *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales*. (pp.417-430). Universidad de Alicante (España).

Gatica, N. Carranza, M., May G., Cosci C. (2002). El concepto de función en los libros de textos universitarios *XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. (pp.131 - 136)Buenos Aires.

Leinhardt G., Zaslavsky O. y Stein M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research*. 60(1), (pp. 1 - 64).

Villalobos A. y Farfan R. (2001): *Identificación de obstáculos en la construcción de gráfica de funciones*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 14. Panamá (pp. 396-399)

Zill, Dennis G.. Cálculo con Geometría Analítica. Ed. Grupo Editorial Iberoamericano (1987)

Leithod, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. Ed. Harala Sexta edición 1992.
Stewart, James Cálculo Conceptos y Contextos - Ed. International Thompson Editores 1999

Sadosky, M, Guber, R (1973). Elementos de Cálculo Diferencial e Integral Tomo I .Librería y editorial Alsina. Buenos Aires. Argentina.

Piskunov. N (1977) Cálculo Diferencial e Integral . Tomo I-Ed. Mir Moscú. Ed. 3ra