CANTOR, BORGES Y DESPUÉS…UNA LUZ DE ALMACÉN

Gustavo Franco (1), Cristina Ochoviet (2)
(1) Liceo Solymar I, (2) Instituto de Profesores Artigas. Uruguay.
gfrancoc@hotmail.com, princesa@adinet.com.uy
Campo de investigación: Modelación matemática; Nivel educativo: Medio y Superior

Resumen

En este trabajo nos proponemos mostrar algunas ideas del matemático Georg Cantor, acerca de la cardinalidad de los conjuntos infinitos.
Por otra parte, consideramos un fragmento del relato “El libro de arena” de Jorge Luis Borges y nos proponemos responder la siguiente pregunta: ¿podrá ser el cardinal asociado al conjunto de páginas de este libro $\aleph_0$?
Este trabajo constituye una propuesta didáctica sobre la modelación matemática de un texto literario.

Dos consideraciones previas

“[…] si nos aproximamos a los textos de Borges con un enfoque puramente matemático, muy especializado, podemos quedar por encima del texto. Aquí “encima” es en realidad afuera: podríamos encontrar o forzar al texto a decir cosas que el texto no dice, ni tiene ninguna intención de decir. Un error de erudición. Por otro lado, si desconocemos en absoluto los elementos de matemática que están presentes reiteradamente en la obra de Borges, podemos quedar por debajo del texto.” (Martínez, 2003)

“[…] los elementos de matemática que aparecen en la obra de Borges […] están modelados y transmutados en “algo distinto”: en literatura, y trataremos de reconocerlos sin separarlos de ese contexto de intenciones literarias.” (Martínez, 2003)

En la *Posdata del primero de marzo de 1943* al relato *El Aleph*, dice Borges:
“Dos observaciones quiero agregar: una, sobre la naturaleza del Aleph; otra, sobre su nombre. Éste, como es sabido, es el de la primera letra del alfabeto de la lengua sagrada. […] para la *Mengenlehre*[1], es el símbolo de los números transfinitos, en los que el todo no es mayor que alguna de las partes.” (Borges, 2002)

Éste era uno de los conceptos de matemática que fascinaban a Borges. Es el quiebre con un postulado aristotélico según el cual el todo debe ser mayor que cualesquiera de las partes. Es más, Euclides lo incluye en los *Elementos* como una de sus *nociones comunes*: “El todo es mayor que la parte”. Por ejemplo, siguiendo las ideas de Cantor, se puede demostrar que si bien N (el conjunto de los números naturales) está incluido en Z (el conjunto de los números enteros), el cardinal de ambos conjuntos es el mismo.

[1] La *Mengenlehre* es la denominación en alemán de la teoría de conjuntos creada en 1874 - 1895 por Georg Cantor (1845 - 1918).

¿Cómo llega Cantor a comparar el cardinal de conjuntos infinitos?

Claramente si un conjunto es infinito no podemos contar sus elementos, por lo que si queremos comparar el cardinal de dos conjuntos infinitos debemos establecer algún criterio de comparación. En una primera instancia nos plantearemos cómo comparar el cardinal de dos conjuntos finitos suponiendo que no sabemos contar.

Imaginemos la siguiente situación, estamos en un aula, el profesor tiene en su mano un cierto número de lápices y un alumno también tiene una cierta cantidad de ellos.
¿Cómo podemos hacer para averiguar quién de los dos tiene más cantidad de lápices (o si tienen igual cantidad), si es que no sabemos contar?

Pueden ir tomando de a un lápiz y disponerlos encima del escritorio enfrentados: el profesor toma un lápiz, uno el alumno y los colocan enfrentados, luego toman otro lápiz cada uno y repiten el procedimiento, así sucesivamente hasta que uno (o los dos), agote la cantidad de lápices que habían en su mano. Ahora bien, si por este procedimiento, para cada lápiz del profesor en el escritorio, hay un lápiz del alumno, y para cada uno del alumno, hay uno del profesor, y ambos ya no poseen más lápices en sus manos, diremos entonces que tienen la misma cantidad.
Es decir, en lenguaje matemático, si podemos establecer una función biyectiva entre el conjunto de los lápices del profesor y el conjunto de los lápices del alumno, podemos concluir que la cantidad de lápices del profesor es la misma que la del alumno.

Borges (2002), con sutileza, muestra este procedimiento: ”La operación de contar no es otra cosa para él [Cantor] que la de equiparar dos series. Por ejemplo, si los primogénitos de toda las casas de Egipto fueron matados por el Ángel, salvo los que habitaban en casa que tenía en la puerta una señal roja, es evidente que tantos se salvaron como señales rojas había, sin que esto importe enumerar cuántos fueron.”.

“[…]“en el contexto finito, los conjuntos A y B tienen la misma cantidad de elementos si y sólo si puedo establecer una correspondencia perfecta uno a uno entre ellos”. Esta afirmación es muy sencilla de probar. ¿Pero qué ocurre cuando saltamos al infinito? Uno de los dos conceptos equivalentes, “cantidad de elementos”, deja de tener sentido. ¿Qué significa cantidad de elementos de un conjunto infinito cuando uno no puede terminar de contar? Esa parte ya no la puedo usar, pero sí puedo usar todavía la segunda parte. La segunda parte sobrevive, todavía podemos establecer, para conjuntos infinitos, correspondencias perfectas uno a uno […]”. (Martínez, 2003)

Si dos conjuntos A y B, finitos o infinitos, se pueden poner en biyección, es decir que todo elemento de A está relacionado con uno y uno solo de B, y cada elemento de B lo está con uno de A, y uno solo, dichos conjuntos se dicen *equivalentes*, *coordinables* o que tienen la misma *potencia*.

Consideremos la siguiente relación entre el conjunto de los enteros y el de los naturales:

$$
\begin{array}{llllllllll}
N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & . \; . \; . \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
Z: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & . \; . \; .
\end{array}
$$

Esta relación establece una correspondencia biyectiva entre ambos conjuntos, por lo que, siguiendo lo anterior, podemos decir que N y Z tienen igual potencia. Cantor introdujo un nuevo número cardinal (transfinito) para representar el número de elementos de todo conjunto que se puede poner en biyección con el conjunto de los números naturales. El símbolo que escogió para este número cardinal transfinito fue $\aleph_0$ (aleph subcero). $\aleph$ es la primera letra del alfabeto hebreo.

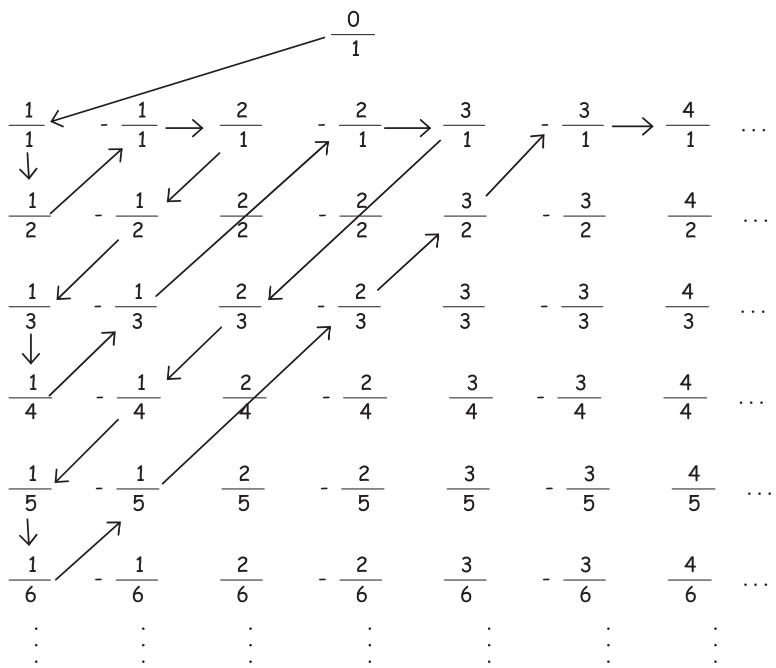
Pues bien, consideremos ahora algunas líneas del relato de Borges (1997): "El libro de Arena" y analicémoslo desde el punto de vista matemático.

"En el ángulo superior de las páginas había cifras arábigas. Me llamó la atención que la página par llevara el número (digamos) 40.514 y la impar, la siguiente, 999. […]
Me dijo que su libro se llamaba *El libro de arena*, porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin.
Me pidió que buscara la primera hoja.
Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice.
Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro.
-Ahora busque el final.
También fracasé; apenas logré balbucear con una voz que no era la mía:
-Esto no puede ser.
[…]
-No puede ser pero es. El número de páginas de este libro es exactamente infinito. Ninguna es la primera; ninguna, la última. No sé por qué están numeradas de ese modo arbitrario. Acaso para dar a entender que los términos de una serie infinita admiten cualquier número."

¿Podrá ser el cardinal asociado al conjunto de páginas de este libro $\aleph_0$?

Hasta ahora vimos que este número transfinito representaba el cardinal de N y el de Z, pero el conjunto de páginas del *Libro de Arena* parece tener una característica diferente a la de estos conjuntos, a saber, la densidad. ¿Será entonces, el cardinal de este conjunto, un transfinito mayor que $\aleph_0$? Veamos.

Pensemos en el conjunto de los números racionales, que es denso, y consideremos el conjunto de todas las fracciones organizadas según la disposición siguiente:



Nótese que todas las fracciones de la primera columna tienen numerador 1, todas las de la segunda tienen numerador -1, las de la tercera, numerador 2, las de la cuarta, -2, etc. Por otro lado, todas las fracciones de la primera fila tienen denominador 1, las de la segunda, denominador 2, etc. Es así que, dada cualquier fracción, digamos 133/191, podemos localizarla en el cuadro, en la fila 191 y en la columna 265. El cuadro pues, contiene el conjunto de todas las fracciones.

Ahora consideremos la siguiente correspondencia siguiendo las flechas que se muestran en el cuadro:

N :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...
	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
Q :	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{3}$ ...

En esta correspondencia hemos suprimido aquellas fracciones a/b, para las cuales a y b no son primos entre sí, de esta forma cada número racional aparece representado una única vez.

De este modo hemos establecido una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los racionales, con lo cual, y siguiendo lo visto más arriba, el cardinal de N es igual al cardinal de Q, es decir $\aleph_0$.
Obsérvese que una ordenación de los racionales es posible siempre que no estemos obligados a conservar el orden usual.

Volviendo ahora al *Libro de Arena*, podemos responder afirmativamente a la pregunta que hemos dejado planteada. Se puede identificar el conjunto de las páginas del *Libro de Arena* con el conjunto de los racionales entre 0 y 1, que también tiene cardinal $\aleph_0$. La tapa del libro sería el cero y la contratapa sería el uno. Análogamente a lo que ocurría con el *Libro de Arena*, en el conjunto de los racionales entre 0 y 1, no podemos encontrar el primer número racional después del 0 ni el último antes del 1.

"[…] con esta enumeración se le puede dar un orden consecutivo a los números fraccionarios (sic), un orden, por supuesto, distinto del que tienen en la recta, pero que permite explicar la enumeración de páginas en el Libro de Arena. Esto es algo que posiblemente Borges no supiera. La numeración de páginas que a Borges en el cuento le parece misteriosa y a la que le atribuye una razón también misteriosa, en principio no tiene ningún misterio. No hay contradicción entre el hecho de que entre dos hojas del Libro de Arena siempre hay otra intercalada con el hecho de que cada hoja pueda tener un número: el mismo habilidoso imprentero que pudo coser las infinitas páginas del Libro de Arena pudo también perfectamente numerarlas tal como lo estamos haciendo nosotros." (Martínez, 2003)

Para finalizar

Por último, terminemos con unas líneas de "El Libro de Arena", dice Borges (1997):

"Declinaba el verano, y comprendí que el libro era monstruoso. […]
Pensé en el fuego, pero temí que la combustión de un libro infinito fuera parejamente infinita y sofocara de humo al planeta."

Bibliografía:

Borges, J. L. (1997). El libro de arena. Madrid: Alianza Editorial.

Borges, J. L. (2002). Obras Completas I. Buenos Aires: Emecé Editores, 13ª ed.

Palacios, A., Barcia, P., Bosch, J., Otero, N. (1995). Los matematicuentos. Presencia matemática en la literatura. Argentina: Serie Eureka.

Euclides. Elementos (Libros I-VI). Madrid: Planeta De Agostini (1999).

Martínez, G. (2003). Borges y la matemática. Buenos Aires: Eudeba.