DOS CONCEPCIONES ACERCA DEL INFINITO. EL INFINITO ACTUAL Y EL INFINITO POTENCIAL

Gustavo Franco [1], Cristina Ochoviet [2]
[1] Liceo Solymar I, [2] Instituto de Profesores Artigas. Uruguay.
gfrancoc@hotmail.com, princesa@adinet.com.uy
Campo de investigación: Historia de la matemática- Interdisciplinariedad; Nivel educativo: Medio y Superior

Resumen

A partir de textos literarios de Jorge Luis Borges y de José Mauro de Vasconcelos se introducen la nociones de infinito potencial y actual.
La propuesta da una mirada sobre estas dos concepciones del infinito desde la filosofía, la literatura y la matemática.
Este trabajo constituye una posible propuesta para llevar estos temas a la clase de matemática desde una perspectiva integradora.

El infinito potencial y el infinito actual

La diferencia entre el infinito potencial y el infinito actual está emparentada con la diferencia entre el devenir y el ser, entre el mundo de Heráclito y el de Parménides.
"El infinito potencial se obtendría mediante procesos que no nos enfrentan en ningún momento con el infinito en su totalidad, sino con un infinito que aparece como posibilidad (en potencia) y que se va realizando progresivamente". (Palacios et al., 1995)

Consideremos la sucesión de los números naturales:
0, 1, 2, 3, 4, 5, …
En esta sucesión no hay ningún número natural que sea infinito. El infinito no aparece sino que se va desarrollando; nos damos cuenta de que los números naturales son potencialmente infinitos pues si pensamos en un natural muy grande alcanza con sumarle uno para obtener otro mayor y así sucesivamente.
Creemos que el siguiente texto de Vasconcelos (1996), de su novela "Rosinha, mi canoa", ilustra esta idea del infinito potencial:
"[...] Metía la mano en la arena finita y se quedaba como cerniéndola. Sonrió; recordaba que de chico, cuando estudiaba en la ciudad, en los colegios de sacerdotes, el ejemplo que le dieron de la eternidad era: "Si un palomo, cada mil años, llegase a la tierra y se llevara un granito de arena cada vez, cuando se gastara la arena del mundo entero la eternidad aún estaría comenzando."

Veamos ahora qué entendemos por infinito actual. "Admitamos que se pueda definir el conjunto de los números naturales, y llamemos N a este conjunto (desprovisto de toda idea de orden). No tiene ningún sentido decir que los elementos de N "devienen", o que "se hacen cada vez más grandes". Están todos allí, simplemente, actualmente (en el sentido de acto y no en sentido temporal). Todos los conjuntos que estudia la matemática tienen existencia actual en este sentido; los conjuntos están dados, y con ellos la totalidad de sus elementos: no hay nada parecido a una evolución, a un devenir. […] el infinito potencial

[…] es una propiedad de un conjunto y un orden, el infinito actual […] es una propiedad de conjunto simplemente (con abstracción de todo orden)”. (Palacios et al., 1995)

El texto de Borges (2002), que es un fragmento del relato “El Aleph”, nos acerca a la idea del infinito actual:
“Aclaró que un Aleph es uno de los puntos del espacio que contiene todos los puntos. […]
–Sí, el lugar donde están, sin confundirse, todos los lugares del orbe, vistos desde todos los ángulos.”
Y más abajo continúa:
“Lo que vieron mis ojos fue simultáneo: lo que transcribiré, sucesivo, porque el lenguaje lo es. Algo, sin embargo, recogeré.
En la parte inferior del escalón, hacia la derecha, vi una pequeña esfera tornasolada, de casi intolerable fulgor. Al principio la creí giratoria; luego comprendí que ese movimiento era una ilusión producida por los vertiginosos espectáculos que encerraba. El diámetro del Aleph sería de dos o tres centímetros, pero el espacio cósmico estaba ahí, sin disminución de tamaño. Cada cosa (la luna del espejo, digamos) era infinitas cosas, porque yo claramente la veía desde todos los puntos del universo. Vi el populoso mar, vi el alba y la tarde, vi las muchedumbres de América, vi una plateada telaraña en el centro de una negra pirámide, vi un laberinto roto (era Londres), vi interminables ojos inmediatos escrutándose en mí como en un espejo, vi todos los espejos del planeta y ninguno me reflejó, vi en un traspatio de la calle Soler las mismas baldosas que hace treinta años vi en el zaguán de una casa en Fray Bentos, vi racimos, nieve, tabaco, vetas de metal, vapor de agua, vi convexos desiertos ecuatoriales y cada uno de los granos de arena […]”.

Podemos pensar el *Aleph* como la materialización del infinito actual; un punto del espacio donde se puede visualizar ese infinito.
Lo visto por *Borges* en el *Aleph* fue simultáneo, que es la forma de concebir el infinito actual, pero, como el personaje advierte, el lenguaje lo puede describir solamente de un modo sucesivo, que escapa a la esencia misma de esta concepción del infinito; lo sucesivo estaría vinculado con el infinito potencial. Aquí ambas ideas conviven, podríamos decir, haciendo un poco de literatura, que desde el infinito potencial (el lenguaje) se habla del infinito actual (el *Aleph*).

Georg Cantor (1845-1918), después de un trabajo solitario de treinta años deja totalmente formulada, a fines del siglo XIX, una teoría matemática del infinito actual. Este matemático introduce una nueva visión: hasta él la forma de concebir el infinito en matemática era la de infinito potencial. El siguiente fragmento, de su ensayo titulado “Sobre los conjuntos lineales” (1883), nos ilustra sus ideas acerca del infinito, y de alguna manera resume lo que hemos dicho anteriormente:
“Es tradicional considerar al infinito como lo indefinidamente creciente o bajo la forma, estrechamente ligada a la anterior, de una sucesión convergente, que adquirió durante el siglo XVII. Por el contrario, yo considero al infinito en la forma definida de algo ya consumado, de algo capaz, no sólo de formulación matemática, sino de ser definido por un número. Esta concepción del infinito es opuesta a las tradiciones que durante tanto tiempo me fueron tan queridas, y fué más bien contra mi propia voluntad el como me vi forzado a aceptar este otro punto de vista. Pero varios años de ensayos y de especulaciones científicas me han conducido a estas conclusiones como a una necesidad lógica, y por esta razón yo

creo que no se me podrán presentar objeciones válidas que yo no pueda refutar." (Referido en Dantzig, 1947)
Una carta escrita por Gauss a Schumacher en 1831 da muestra de la resistencia de la época a aceptar estas nuevas ideas: "En cuanto a vuestra prueba, yo debo protestar vehementemente contra el uso que hacéis del infinito como algo consumado, porque esto no es permitido jamás en la matemática. El infinito es simplemente una manera de hablar; una forma abreviada para establecer que existen límites a los cuales ciertas razones pueden aproximarse tanto como se quiera mientras que otras magnitudes pueden crecer hasta más allá de los límites...
No surgirán contradicciones mientras el Hombre Finito no cometa el error de tomar el infinito como algo fijo, mientras él no adquiera el hábito mental de considerar al infinito como algo limitado." (Referido en Dantzig, 1947)

El infinito actual representa el quiebre con un postulado aristotélico que incluso Euclides, en los "Elementos", incluye como una de sus *nociones comunes*: "El todo es mayor que la parte".
¿Por qué decimos esto?
Evidentemente, si un conjunto es finito, no puede ser *equivalente*, es decir, no se puede poner en biyección, con ninguno de sus subconjuntos propios. En cambio, si un conjunto contiene infinitos elementos es equivalente a algunos de sus subconjuntos propios. Por ejemplo, la relación:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n \ \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \ldots & n^2 \ \ldots \end{array}$$

establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los números naturales y un subconjunto propio, a saber, el formado por los cuadrados de dichos números naturales. Y esto es, en esencia, lo que Cantor utiliza para decir que estos conjuntos, ambos infinitos, tienen el mismo cardinal. Cantor designó con la letra aleph $\aleph$, la primera del alfabeto hebreo, y con un subíndice 0 ($\aleph_0$), al cardinal de cualquier conjunto que se pueda poner en biyección con el conjunto de los números naturales. En ese caso se dice que el conjunto tiene *potencia* $\aleph_0$ y se denomina *numerable*. A $\aleph_0$ se lo llama número transfinito.

La posibilidad de establecer una correspondencia entre conjuntos infinitos aparece ya en uno de los diálogos de Galileo ("Diálogos acerca de dos nuevas ciencias", 1636); es el primer documento histórico sobre el tema de los conjuntos infinitos:
"No veo que se pueda llegar a otra decisión, sino a decir que infinita la totalidad de los números, infinitos los cuadrados, infinitas sus raíces; y que la multitud de cuadrados no es menor que la de la totalidad de los números, ni ésta menor que aquélla, y en última instancia, que los atributos de "igual", "mayor" y " menor", no tiene lugar en los infinitos, sino sólo en las cantidades limitadas. Por ello, cuando Simplicio me propone varias líneas desiguales, y me pregunta cómo puede ser que no haya en las mayores más puntos que en

las menores, yo le respondo que no hay más, ni menos, ni tantos, sino infinitos en cada una.” (Referido en Dantzig, 1947)
“*La parte tiene la potencia del todo*. Tal es la esencia de la paradoja de Galileo. Pero mientras Galileo esquivaba la solución declarando que: “*los atributos de igual, mayor y menor no son aplicables al infinito, sino únicamente a las cantidades finitas”,* Cantor toma esta conclusión como punto de partida para su teoría de los conjuntos.” (Referido en Dantzig, 1997)

Para Cantor sí es posible comparar los cardinales de conjuntos infinitos, y prueba que el cardinal del conjunto de los números reales es distinto del cardinal del conjunto de los números naturales.
Veamos, en principio, la no numerabilidad del intervalo (0,1).
La demostración es por reducción al absurdo; se supone que el conjunto de los números naturales y el intervalo (0,1) pueden ponerse en biyección y se llega a una contradicción. Para evitar dos representaciones decimales del mismo número se elegirá, cuando corresponda, el desarrollo terminado en infinitos ceros. Por ejemplo, entre la representación 0,4999… y 0,5000… elegiremos esta última para ½, con esto nos aseguramos que la representación decimal de cualquier número real del (0,1) es única.
Supongamos entonces que hemos puesto en biyección el conjunto de los naturales con el de los reales del intervalo antedicho, y los presentamos en la siguiente lista:

$x_1 = 0,\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_2 = 0,\ b_1\ \ b_2\ \ b_3\ \ b_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_3 = 0,\ c_1\ \ \ c_2\ \ \ c_3\ \ c_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

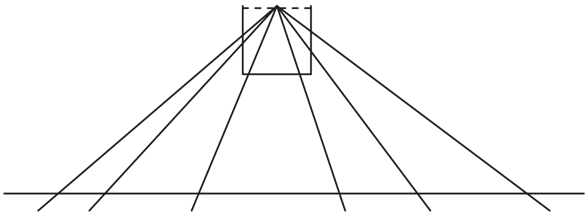
$x_4 = 0,\ \ d_1\ \ d_2\ \ \ d_3\ \ d_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

……

Veremos que, cualquiera sea esta lista, siempre existe un número real x en el (0,1) que no figura en la misma y que por lo tanto no es posible poner en correspondencia “uno a uno” al conjunto de los reales del intervalo con el de los números naturales.
Determinaremos el número x por el procedimiento llamado de *diagonalización*:
$x = 0,\ a_1'\ b_2'\ c_3'\ d_4' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
donde a_1' es una cifra distinta de cero, de nueve y de a_1, b_2' es una cifra distinta de cero, de nueve y de b_2, c_3' es una cifra distinta de cero, de nueve y de c_3, etc.
Observemos que:
1) x tiene infinitas cifras decimales que no son ni todas ceros ni todas nueves por tanto x no es ni 0,000…=0, ni 0,999…=1. En otras palabra x pertenece al (0,1).
2) x es distinto de todos los números de la lista pues difiere de x_1 en la primera cifra decimal, de x_2 en la segunda, de x_3 en la tercera, y en general, de x_n en la enésima.

Por tanto existe un número real x del (0,1) que no aparece en la lista, con lo que queda probado, por el absurdo, la no numerabilidad del intervalo (0,1).

Mostraremos ahora, a través de un procedimiento geométrico, que la potencia del intervalo (0,1) es igual a la del conjunto de todos los reales. Para ello estableceremos una biyección entre un segmento abierto de medida la unidad y una recta. Procedemos de la siguiente manera: se "forma" con el segmento una poligonal abierta de tres lados, de longitudes 1/3, y se proyecta desde un punto conveniente:



De este modo mostramos que el conjunto de los puntos de la recta no es numerable. El cardinal de los números reales se denomina *c* y se puede demostrar que es un número transfinito mayor que $\aleph_0$.

Terminemos con la bellísima enumeración, de la cual ya hemos dado cuenta en parte, de lo que el personaje Borges vio en el *Aleph*:
"[…] vi la circulación de mi oscura sangre, vi el engranaje del amor y la modificación de la muerte, vi el Aleph, desde todos los puntos, vi en el Aleph la tierra, y en la tierra otra vez el Aleph y el Aleph en la tierra, vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara y sentí vértigo y lloré, porque mis ojos habían visto ese objeto secreto y conjetural, cuyo nombre usurpan los hombres, pero que ningún hombre ha mirado: el inconcebible universo." (Borges, 2002)

Referencias bibliográficas:

Borges, J. L., (2002). Obras Completas I. Buenos Aires: Emecé Editores, 13ª ed.

De Vasconcelos, J. M. (1996). Rosinha, mi canoa. Buenos Aires: Editorial "El ateneo", 15ª ed.

Palacios, A., Barcia, P., Bosch, J., Otero, N., (1995). Los matematicuentos. Presencia matemática en la literatura. Argentina: Serie Eureka.

Euclides. (1999) Elementos (Libros I-VI). Madrid: Planeta De Agostini.

Dantzig, T. (1947). Número. El lenguaje de la ciencia. Buenos Aires: Colección "Ciencia y método".