CONOCIMIENTOS DE MAESTROS DE PRIMARIA SOBRE LA PROPORCIONALIDAD.

David Block
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
dblock@cinvestav.mx

Campo de investigación: Números racionales y proporcionalidad; Nivel educativo: Superior

Resumen: Se presentan algunos resultados de un estudio sobre conocimientos de maestros de primaria acerca de proporcionalidad. Se indagaron, por una parte, conocimientos explícitos sobre algunas características de una relación de proporcionalidad. Por otra parte, se exploró el grado en que los maestros prevén el efecto de algunas variables didácticas de problemas típicos de proporcionalidad, en la dificultad que éstos tienen para alumnos de primaria y en los procedimientos de resolución.

A mediados del siglo pasado, en México como en otros países, el viejo capítulo sobre Razones y Proporciones desapareció de los programas escolares de primaria y de secundaria, como consecuencia de las reformas conocidas como "de las matemáticas modernas". A partir de entonces los contenidos curriculares del tema de la proporcionalidad han quedado desdibujados y sin una relación clara con los otros contenidos del currículum, pese a que la enseñanza del tema ha sido claramente revalorada (Bosch 1994, Block 2001; Comin 2000). Un efecto de este "desdibujamiento" puede mirarse en los conocimientos imprecisos sobre este tema que parecen tener hoy en día las personas en general y los maestros del nivel básico en particular. El trabajo que aquí se presenta, realizado en el marco de un proyecto amplio sobre la enseñanza de la proporcionalidad, informa sobre esta situación.

Características metodológicas de la exploración

El cuestionario. Con la primera parte del cuestionario se exploraron conocimientos explícitos de los maestros sobre las principales propiedades de una relación proporcional entre cantidades (conservación de las razones internas, existencia de un factor constante de proporcionalidad, propiedad aditiva). Mediante la segunda y tercera partes se exploró el grado en que los maestros prevén el efecto de ciertas variables didácticas en la dificultad de los problemas y en los procedimientos que se utilizan para resolverlos. En esta ponencia se reporta lo relativo a una de las variables estudiadas: el carácter entero o no entero de las razones interna entera y externa[1].

La mayoría de los problemas de la segunda y tercera partes del cuestionario que se sometieron a análisis de los maestros, fueron aplicados con anterioridad a un grupo de 13 alumnos de 4°, 5° y 6° grados de primaria, en el marco de una investigación más amplia en la que se inscribe el presente estudio (Block 2001 y 2003).

El grupo de maestros. El grupo estuvo conformado por 65 maestros de primaria del Estado de México, de los cuales 44 impartían clases, los demás ejercían otra función en

[1] Los términos de "razón interna" y "razón externa" son tomados de Freudenthal (1983) y refieren, la primera, a una razón al interior cantidades de un mismo conjunto y, la segunda, a una razón entre cantidades de dos conjuntos; Vergnaud (1988), al analizar la relación de "isomorfismo de medidas", nombra a las razones internas y externas respectivamente como "relaciones escalares" y "relación funcional". Noelting (1980) usa otra nomenclatura en sus problema de comparación de razones: "razón "intra" e "inter" respectivamente.

el sistema educativo[2].La mayoría contaba con al menos 10 años de experiencia docente[3]. Aproximadamente la mitad del grupo había impartido clases en los tres ciclos de la primaria, los demás habían tendido a atender al primer ciclo o al tercero.

Condiciones de la aplicación. Se explicó a los maestros el doble propósito del cuestionario: por una parte, éste proporcionaría información para un trabajo de investigación (se explicaron a grandes rasgos los objetivos) y, por otra parte, sería la base a partir de la cual se organizaría una discusión en equipos y una actividad[4]. Los maestros se sentaron en grupos de entre 6 y 10. Antes de iniciar escribieron los datos relativos a su experiencia docente y a su formación. Se aclaró que no debían poner su nombre en el cuestionario.

El cuestionario se aplicó en dos fases. Durante la primera se pidió a los maestros que constaran individualmente las tres partes, aunque no pudo evitarse que comentaran entre ellos con cierta frecuencia. En la segunda fase, se les pidió que comentaran en sus equipos las respuestas a determinadas preguntas. Los maestros requirieron de entre dos y tres horas para contestar, algunos no terminaron. Las discusiones de cuatro equipos fueron registradas.[5]

Primera parte: ¿Qué caracteriza a una relación de proporcionalidad?

Se presentaron a los maestros varias propiedades para que indicaran, en cada caso, si la propiedad les parecía *suficiente* para que la relación fuera de proporcionalidad, *no suficiente*, o *falsa*. También podían anotar "no sé" o "no estoy seguro". Algunas de las propiedades venían acompañadas de un ejemplo, como en la siguiente:

Una relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad si ocurre que: cuando el valor de una magnitud aumenta en cierta cantidad, el valor correspondiente de la otra aumenta en la misma cantidad. Por ejemplo, en una escala:

	Fig. A	Fig. B	
	5 cm ----------	*9 cm*	
+2 cm			*+2 cm*
	7 cm ----------	*11 cm*	

Algunos resultados que cabe destacar son los siguientes:

- Fueron más numerosos los maestros que identificaron la propiedad de la conservación de las razones internas como una condición suficiente para que hubiera proporcionalidad (63%), que aquellos que identificaron como tal a la condición de cocientes constantes (15%) o, con otra formulación, a la existencia de una constante de proporcionalidad (20%). Este hecho contrasta con la escasa mención del procedimiento de conservación de las razones internas en las otras partes del cuestionario, como se verá más adelante. Al parecer, aunque reconocen esta propiedad como una condición para que haya proporcionalidad, tienden a no esperar que sus alumnos recurran a ella al resolver problemas.
- Únicamente tres maestros distinguieron con certeza la función afín (por ejemplo, la relación entre el número de kilómetros y el costo de un viaje en taxi que cobra una cuota inicial fija además de una tarifa por kilómetro) de la relación proporcional.
- Únicamente 21 maestros, 32% del grupo, saben con certeza que la conservación de las diferencias no corresponde a una relación de proporcionalidad. Los demás

[2] Los maestros están inscritos en un curso de actualización no escolarizado, sobre enseñanza de las matemáticas. La coordinadora del Centro de Maestros en el que se les brinda asesoría me invitó a organizar un taller, y en esa ocasión apliqué el cuestionario.

[3] Seis maestros tenían entre 1 y 5 años de experiencia docente en primaria; cinco entre 6 y 10 años, 34 entre 11 y 20 años, 16 entre 21 y 40 años, y cuatro no especificaron.

[4] Ésta última se organizó como una forma de retribuir a los maestros su participación en el cuestionario.

[5] El análisis de las discusiones de los maestros no se presenta aquí, será objeto de otro texto.

consideran que sí corresponde (25%) o dudan (43%). En las otras partes del cuestionario varios maestros resolvieron erróneamente algunos de los problemas de proporcionalidad al conservar las diferencias. Lo anterior es coherente con otro dato: Para el 71 % del grupo, el hecho de que "cuando una cantidad aumenta la otra también aumenta", fue una condición suficiente para considerar que la relación es de proporcionalidad.

- Finalmente, 37 maestros, poco más del 50%, consideran correcta la afirmación "Dos números son proporcionales si uno es múltiplo del otro, por ejemplo, 12 y 4", es decir, no rechazan la confusión entre el término "proporcional" con el de "múltiplo"[6].

Segunda parte: ¿Cómo lo resolverían los niños?

Se entregaron a los maestros doce problemas con la siguiente consigna:

1) "Anote el ciclo[7] escolar para el que lo considera adecuado".

2) "Explique cómo lo podría resolver un alumno de ese ciclo (...)."

Los maestros tendieron a contestar la segunda pregunta en términos normativos, es decir, explicaron más cómo *deberían* resolver los alumnos los problemas que cómo los podrían resolver. También fue notorio que las resoluciones propuestas tendieron a ser las que ellos usan. Se presentan a continuación algunos ejemplos representativos.

2.1 Comparación entre dos problemas de escala.

Problema 1: *"Se va a hacer una copia A' del triángulo A, con la misma forma pero más grande; el lado que en A mide 5cm, en la copia deberá medir 30cm. ¿Cuánto medirá en la copia el lado que en A mide 7cm?" (en la hoja aparece el triángulo rectángulo "A" con las medidas de sus catetos anotadas).*

Problema 1

A	A'
5cm	30cm
7cm	¿?

Problema 2

B	B'
5cm	7cm
10cm	¿?

Problema 2: se repite el mismo problema con los triángulos B y B' como se muestra en la tabla.

La mayoría de los maestros tendieron a asignar el segundo ciclo al problema 1 y tercero al dos por lo que puede suponerse que consideraron al problema 2 como más difícil que el problema 1. Al analizar los procedimientos propuestos se explica esa diferencia: en el problema 1 el 56% de los maestros utilizó el operador entero "por 6", coincidiendo con uno de los procedimientos probables en los niños. En cambio, en el problema 2:

- Fueron relativamente pocos (17%) quienes utilizaron la conservación de las razones internas, alejándose en este caso de un procedimiento probable por parte de los niños;
- El 14% presentó el mismo procedimiento que para el problema anterior, la determinación del operador (x7/5 o x 1.4). Puede decirse que, para estos maestros, el carácter entero o no entero de las razones externa e interna no es percibido en este problema como una variable que afecte al tipo de procedimiento.
- El 14 % propuso la utilización de la regla de tres. Dado que en problema 1 únicamente el 3% lo hizo, puede inferirse que para algunos maestros el cambio de procedimiento a favor de la regla de tres constituye un efecto de la variable "razón externa entera o no entera".

[6] Esta última pregunta fue planteada a raíz de un suceso comentado por G. Brousseau (Citado por Comin, 2000): en un manual francés sobre una calculadora que puede realizar divisiones con residuo, se plantea a los maestros que la calculadora permite determinar "si dos números son proporcionales", para lo cual basta con dividir uno entre el otro y observar si hay o no residuo.

[7] El primer ciclo corresponde a primero y segundo grados, el segundo ciclo a tercero y cuarto grados, el tercer ciclo a quinto y sexto grados y el cuarto ciclo a la secundaria (grados 7, 8 y 9)

- Finalmente, un 17% de los maestros mostró un procedimiento aditivo. Por la forma en que redactaron la respuesta (no expresaron que se tratara de un error *de* los alumnos), y por la respuesta que dieron a una pregunta explícita al respecto en la primera parte del cuestionario, consideramos que se trata de un error de los maestros: como sucede a los alumnos, cuando en la escala la razón externa no es entera, se recurre a las diferencias constantes.

2.2 Problemas de comparación de razones.

Problema 1. *Luis organizó una fiesta. Se prepararon varios pasteles, todos del mismo tamaño y se acomodaron en las mesas. Como las mesas son de distinto tamaño, en algunas pusieron más pasteles que en otras. Los niños de cada mesa se van a repartir los pasteles en partes iguales. Vamos a ver qué niños tendrán más suerte y les tocará un pedazo más grande de pastel, o si les tocará lo mismo. En la mesa A, hay 3 pasteles para 4 niños; En la mesa B, hay 4 pasteles para 3 niños. ¿En cuál de las dos mesas le va a tocar más pastel a cada niño?*

Un poco más de la mitad de los alumnos de primaria a quienes se planteó este problema concluyeron que los niños de la mesa B tendrían más pastel que los de la mesa A mediante uno de los dos razonamientos siguientes: porque en B a cada uno le toca más de un pastel y en A menos de uno, o bien, porque en B hay más pasteles que en A y menos niños. Los demás alumnos intentaron resolver determinando el valor unitario, ya fuera numéricamente o mediante una representación gráfica.

Con respecto a las resoluciones de los maestros, el 12% hizo referencia a razonamientos como los anteriores. El 60% propuso el cálculo del valor unitario fraccionario y los demás no propusieron un procedimiento preciso.

Problema 2*:* Mismo problema con los siguientes datos *En la mesa C, hay 2 pasteles para 7 niños; En la mesa D, hay 1 pastel para 3 niños*.... Nuevamente se manifiesta cierto distanciamiento entre los procedimientos de los alumnos y los de los maestros: mientras que un poco más de la mitad de los niños entrevistados utilizó el razonamiento "un pastel entre 3 es igual a 2 pasteles entre 6, y por lo tanto toca más que en 2 pasteles entre 7" sólo el 6% de los maestros previó o hizo algo similar, y 77% determinó los valores unitarios fraccionarios (U).

Tercera parte: ¿Qué problema es más difícil?

La consigna fue la siguiente:

> *Ordene los siguientes problemas desde el punto de vista de su grado de dificultad para alumnos de primaria. Justifique su decisión, incluso en el caso en que considere que dos de ellos o los tres presentan el mismo grado de dificultad.*
>
> *"Marcela y José tienen varias ranas. Las dejaron dar algunos saltos y después con una vara midieron la distancia total que lograron recorrer.*
>
> *Problema **A.** La Rana Verde dio 3 saltos y logró avanzar en total 12 varas. Si da 5 saltos en vez de 3, ¿cuántas varas crees que avance?;*
>
> *Problema **B** La rana café dio 4 saltos y logró avanzar 6 varas en total. Si da 6 saltos en vez de 4, ¿cuántas varas crees que avance?*
>
> *Problema **C** La Rana pinta dio 3 saltos y logró avanzar en total 5 varas. Si da 12 saltos en vez de 3, ¿cuántas varas crees que avance?*

Las tres variantes fueron tomadas del cuestionario que se aplicó a alumnos de primaria. En el problema **A**, la razón externa es entera (por lo tanto el valor unitario también), pero la interna no es entera. El procedimiento más utilizado por los niños fue la obtención del valor unitario. En el problema **B**, ninguna razón es entera, varios niños intentaron (sin éxito) obtener el valor unitario, con decimales, o con fracciones a nivel gráfico. Otros, pocos, lograron identificar la razón "por cada 2 saltos, 3 varas" y con ella pudieron resolver. En el problema **C**, la razón externa no es entera pero la interna sí lo es. Varios niños lograron utilizar la conservación de las razones internas (12 saltos es 4 veces 3 saltos, por lo tanto la rana avanza 4 veces 5 varas), mientras que otros intentaron, sin éxito, obtener el valor unitario.

Solamente cuatro maestros (6%) consideraron que el nivel de dificultad de los tres problemas era el mismo, por lo que puede decirse que la gran mayoría atribuyó a la variable en juego algún efecto sobre el grado dificultad.

Un poco más de la mitad de los maestros consideraron el siguiente orden de dificultad: el más difícil es el problema C, el intermedio el problema B y el más fácil, el problema A. Diez maestros explicaron que el criterio utilizado fue la dificultad de la división que permite calcular el valor unitario: cociente entero en A (12:4 = 3), cociente con una sola cifra después del punto en B (6:4= 1.5) y cociente decimal periódico en C (5:3 = 1.66). Es probable que otros maestros hayan aplicado también ese criterio pues el procedimiento de reducción a la unidad fue el más utilizado en los tres problemas, sobre todo en A y B. Por lo tanto, el efecto de los cambios en los datos numéricos previsto por al menos la mitad del grupo de maestros fue un aumento de dificultad en la ejecución de una operación implicada, dentro de un procedimiento determinado.

Menos maestros parecen haber considerado que los cambios de valores numéricos podían tener un efecto sobre el procedimiento mismo de resolución:

- la frecuencia de utilización de la regla de tres pasa de 6 ocurrencias en el problema A, a 10 en el B y a 13 en el C, es decir, aparece como una alternativa para los casos "no fáciles", cuando la razón externa deja de ser entera. Dos maestros lo dicen explícitamente.
- la frecuencia del procedimiento basado en la conservación de las razones internas, si bien nunca fue alta, también aumentó del problema A (2 maestros), al B (8 maestros) y al C (16 maestros), lo cual corresponde bien con las condiciones que favorecen a este procedimiento: en A la razón interna no es entera y es difícil (3→5), en B no es entera pero es menos difícil (4→6), además de que es relativamente fácil de descomponer (4→2→6), y finalmente en C es entera y es muy fácil de identificar (4→12). De los 16 maestros que usaron este procedimiento en el problema C, cinco consideraron que dicho problema era por ello el más fácil, seis

más consideraron que era intermedio y los otros cinco que, pese a todo, era el más difícil.

Conclusiones

Los datos obtenidos sugieren que los conocimientos de los maestros de primaria acerca de las características de una relación de proporcionalidad son precarios. El hecho de que solamente el 32% de los participantes supiera con certeza que una constante aditiva no caracteriza a este tipo de relación sugiere la importancia del problema. Se vislumbra también cierta dificultad por parte de los maestros para anticipar el efecto que puede tener la manipulación de determinadas variables didácticas de los problemas sobre la dificultad que éstos pueden tener para los alumnos, así como sobre los procedimientos de resolución. En particular, los procedimientos basados en la conservación de las razones internas, y, sobre todo, los razonamientos cualitativos, parecen muy poco visibles.

Estos resultados interpelan de manera clara a los programas de actualización y de formación de maestros. No obstante, es probable que las carencias y dificultades observadas estén relacionadas con un fenómeno de "desdibujamiento" de la noción de proporcionalidad en los programas de todos los niveles, de la primaria a la formación profesional. En particular, debe considerarse, como lo sugiere G Brousseau, que es en los niveles de secundaria y de preparatoria en los que los futuros maestros de primaria adquieren prácticamente toda su formación matemática, por lo que debe asegurarse que en esos niveles se estudien los conocimientos de matemáticas que se necesitan para enseñar en la primaria. Es el caso de la proporcionalidad.

Bibliografía

Block, D (2003) "De la expresión "2 de cada 4" a la expresión "1/2 de". La noción de razón, precursora de la noción de fracción". En *Memoria electrónica del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Guadalajara, Jalisco

Block, D. (2001) *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico*. Tesis doctoral. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* Memoria para optar por el grado de Doctor. Departent de Matemàtiques. Facultat de Ciències. Univeristat Autònoma de Barcelona.

Comin, E. (2000) *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes, et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Thèse doctorale. École Doctorale de Mathématiques-Informatique. Université de Bordeaux, France.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holanda: Reidel, Dordrecht Noelting, G. (1980). "The development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept. Part I. Differentiation of Stages". *Educational Studies in Mathematics* (217-253). Holland: Reidel Publishing, Dordrecht

Vergnaud, G, (1988). "Multiplicative Structures" en *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Vol 2. En. J.Hiebert , y M. Behr (Eds). Lawrence Erlbaum Associates National Council of teachers of mathematics.