El proceso de representar estructuras algebraicas finitas

Haydee Jiménez Tafur
Grupo de Álgebra
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
jimenezhaydee@gmail.com

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Grupo de Álgebra
Bogotá D.C, Colombia
caluque@pedagogica.edu.co

José Leonardo Ángel Bautista
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Grupo de Álgebra
Bogotá D.C, Colombia
leonangel19@.gmail.com

Resumen

Se presenta un conjunto de actividades matemáticas elementales para abstraer algunas estructuras finitas y el concepto de isomorfismo de estructuras algebracicas, enfatizandose en dos procesos: el paso de la estructura a los modelos y el paso de las representaciones a la estructura.

Introducción

La actividad matemática relacionada con el proceso matemático de representar es un proceso compuesto, vinculado con procesos más simples como simbolizar, codificar, decodificar, visualizar, modelar, y no se presenta de manera aislada sino que habitualmente aparece junto con los procesos de abstraer, clasificar, sintetizar, conjeturar y generalizar.

La actividad que se desarrolla en el aula de clase está fundamentada en preguntas, respuestas, contrapreguntas y reformulación de respuestas en una construcción colectiva donde el profesor y los estudiantes cuestionan, argumentan, ejemplifican, proponen contraejemplos, establecen acuerdos, generalizan, abstraen y, en general, cada actividad simula un ambiente científico; sin embargo, *la presentación* que hacemos está organizada en una forma secuencial que no necesariamente es la misma de la de la clase; aunque, el espíritu y los resultados son productos de esta interacción.

En este trabajo presentamos el paso de las representaciones a la estructura mediante la abstracción de axiomas que la caractericen, y el proceso inverso de construir representaciones a partir de axiomas. Inicalmente abstraemos la estructura algebraica de $(Z_2, +)$ comparando varias representaciones de la misma, hasta lograr una caracterización con tablas de Cayley[1] y de ellas obtenemos otra caracterización en términos de propiedades, lo que nos permite conseguir otras representaciones e identificar el mecanismo, conocido como isomorfismo, de paso de una representación a otra, para luego aplicar este proceso a otras operaciones con dos elementos y obtener

[1] Ilse, D., Lehmann, I. & Schulz, W. (1984). *Gruppoide und funktionalgleichungen*. Berlín: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

nuevas representaciones de éstas. Usamos el software *Propiedades algebraicas de estructuras finitas (Versión 3.0)*[2] para estudiar dichas estructuras y notamos que estructuras isomorfas tienen las mismas propiedades algebraicas.

Seguidamente estudiamos $(Z_2, \times)$ y, de manera similar a como se hizo para $(Z_2, ?)$, partimos de algunas de sus representaciones para llegar a las propiedades que caracterizan esta estructura, basados en las tablas construidas. Posteriormente, establecemos un par de relaciones entre ellas. Luego, buscamos otras estructuras con dos elementos utilizando mecanismos ya propuestos como *el cambio de nombre* de cada uno de los elementos de una tabla en particular y modificaciones de éste, con ello obtenemos las 16 operaciones posibles en un conjunto con dos elementos; con base en esto, buscamos relaciones entre unas operaciones y otras.

A partir de las operaciones establecidas, buscamos propiedades necesarias y suficientes que nos permitan determinar la estructura, de una única manera, salvo isomorfismo; con ello, logramos hacer conjuntos de operaciones y estableciendo axiomas, demostramos algunos teoremas, haciendo así miniteorías al interior de la actividad y nuevamente, buscamos relaciones entre las operaciones caracterizadas, formando así una estructura a partir de estructuras. Finalmente, presentamos una aplicación de Z_2 a la lógica. Aunque la presentación se realiza en conjuntos con dos elementos, los métodos son aplicables en cualquier conjunto finito.

Estructuras algebraicas con dos elementos

1. Estructuras isomorfas a $(Z_2, +)$

1.1. De las representaciones de $(Z_2, +)$ a la estructura

Presentamos enseguida varias situaciones en las que hay un conjunto con dos elementos y una manera de operarlos, en cada caso el significado de la situación es diferente, los contextos son diversos pero hay algo en común, que es lo que esperamos abstraer.

1.1.1. Adición con la idea de paridad e imparidad

Si representamos con P a la propiedad de ser par en los números naturales y con I a la de ser impar y sumamos números de la misma o distinta *paridad*, tenemos que al sumar un número par con otro par, obtenemos como resultado un número par, si sumamos par con impar o impar con par, obtenemos un impar y si sumamos impar con impar, obtenemos como resultado un par, estos resultados los podemos resumir en la siguiente tabla:

+	P	I
P	P	I
I	I	P

Tabla 1

[2]Elaborado por Leonardo Ángel y Oscar Molina, profesores de la Universidad Pedagógica Nacional.

1.1.2. La composición de reflexiones en el plano

Vayamos ahora a un ambiente geométrico[3]; supongamos, que sobre un plano a tenemos una recta y un punto que no pertenece a ella, sean éstos m y P respectivamente, podemos encontrar P' sobre el mismo plano de tal manera que m sea el eje de reflexión, y si reflejamos perpendicularmente a P', a través de m, obtendremos nuevamente P; gráficamente tenemos:

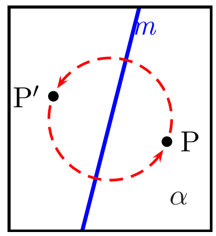

Figura: 1

Algebraicamente, esta situación la podemos describir de la siguiente forma: para cada punto de un plano consideramos dos transformaciones una que llamamos reflexión ortogonal con respecto a la recta dada, y notamos con la letra R, y la otra, que no implica movimiento alguno, ésta la notaremos con I; es decir, si a un punto Q sobre el plano le aplicamos I, obtenemos Q.

Si efectuamos una transformación y, a continuación, sobre el resultado de ésta, aplicamos la otra, decimos que hemos hecho la *composición* de las dos transformaciones, la cual notamos con el símbolo $\circ$. Las posibles composiciones de reflexiones ortogonales con respecto a una recta sobre un punto cualquiera del plano, las resumimos en la siguiente tabla:

$\circ$	I	R
I	I	R
R	R	I

Tabla 2

1.1.3. La composición rotaciones de 180° en el plano

Supongamos ahora, que tenemos una figura plana cualquiera y un punto fijo M fuera de ella, si la rotamos 180° con respecto a M y notamos esta operación con R, la figura cambia, en relación con su posición inicial, como observamos em la figura 2:

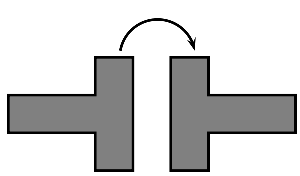

Figura: 2

[3]Alfonso, H. (1997). *Geometría plana y del espacio desde un punto de vista euclidiano.* Bogotá, D. C.: Universidad Pedagógica Nacional. p. 338.

Si reiteramos la operación obtenemos la posición inicial; es decir, la figura queda invariante, notamos esta situación con T. Si aplicamos una transformación a continuación de la otra obtenemos la composición ($\circ$) de ellas, que se resume en:

$\circ$	T	R
T	T	R
R	R	T

Tabla 3

1.1.4. La multiplicación de 1 y -1

Supongamos que tenemos un conjunto cuyos elementos son los números enteros 1 y -1, si hallamos el producto entre estos dos números, obtenemos la siguiente tabla:

$\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Tabla 4

Este conjunto corresponde a las dos raíces cuadradas de 1 en los números enteros, o sea que el producto de dos raíces cuadradas de la unidad es también una de ellas.

1.1.5. El conjunto ordenado $\underline{2}$ y la disyunción exclusiva

En lógica clásica[4], utilizamos proposiciones que sólo admiten dos valores de verdad, verdadero o falso, representados con los símbolos 1 y 0, respectivamente.

Además de las proposiciones simples, se estudian proposiciones compuestas que se forman a partir de proposiciones y conectivos[5]; los más usuales son la *conjunción* ($\wedge$), la *disyunción* ($\vee$), la *implicación* ($\Rightarrow$), la *doble implicación* ($\Leftrightarrow$) o *equivalencia lógica* y la *disyunción exclusiva* ($\veebar$).

Si notamos $\{0, 1\} = \underline{2}$, la tabla de verdad de la disyunción exclusiva, se obtiene asignando valor de verdad 1 cuando las proposiciones tienen diferente valor de verdad y 0 si coinciden, es decir, cuando el valor de verdad de las dos proposiciones sea excluyente; por ejemplo, un animal está vivo o muerto, una cosa está aquí o allá, pero no en ambos sitios al mismo tiempo, etc. En suma:

$\veebar$	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabla 5

[4]Leibniz formuló por primera vez la idea de un cálculo lógico, los trabajos de Woodhouse, Peacock y Gregory enfatizaron el carácter abstracto de las operaciones lógicas, y con ello se inicia una lógica de las operaciones simbólicas y de las relaciones.

[5]A comienzos del siglo XX, Gottlob Frege de un lado, y Bertrand Russell y Alfred North Whitehead de otro, dieron un nuevo impulso al desarrollo de la lógica matemática. Ampliaron el número de posibles argumentaciones más allá de la lógica silogística e introdujeron símbolos para frases compuestas y para los conectivos que las unen, como "o", "y", "si... entonces...". Peano también introdujo símbolos y nociones para desarrollar un sistema de signos capaces de enunciar todas las proposiciones de lógica y de matemáticas sin recurrir al lenguaje ordinario.

1.1.6. La multiplicación de matrices de Pauli

La Física cuántica describe el comportamiento de las partículas que forman los átomos, como electrones, protones, etc., una de las características comunes a todas ellas es conocida como el *spin*[6], es una propiedad, que se comporta de manera similar al momento angular de una partícula cuando gira sobre sí misma; matemáticamente se describen usando unas matrices conocidas como matrices de Pauli[7]. Ellas son:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices tienen la propiedad de que al multiplicarse por sí mismas, el producto es la matriz identidad. Resumiendo esto en tablas, obtenemos:

$\times$	1	σ_1
1	1	σ_1
σ_1	σ_1	1

Tabla 6

$\times$	1	σ_2
1	1	σ_2
σ_2	σ_2	1

Tabla 7

$\times$	1	σ_3
1	1	σ_3
σ_3	σ_3	1

Tabla 8

Notemos que estas tablas son, en esencia, la misma; es decir, si notamos cualquiera de las matrices en cuestión $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ con la letra M, tenemos:

$\times$	1	M
1	1	M
M	M	1

Tabla 9

1.1.7. La estructura $(Z_2, +)$

Observando todas las tablas obtenidas en cada una de las situaciones descritas notamos algo en común que podemos resumir poniendo nombres genéricos, así si el conjunto es $\{a, b\}$ y si notamos con el símbolo $+$ a la operación definida en él, representamos la estructura obtenida mediante la tabla:

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

Tabla 10

Notaremos a esta estructura $(Z_2, +)$.

[6] Griffiths, D; (1994) *Introduction to Quantum Mechanic*. New Yersey: Prentice Hall. p. 154.

[7] Las matrices de Pauli junto con la matriz unidad forman una base para el espacio de las matrices 2×2; esto significa que cualquier matriz 2×2 puede representarse como una combinación lineal de ellas.

1.2. De la estructura $(Z_2, +)$ a las representaciones

Una pregunta válida en este momento es: ¿podemos describir la tabla 10 en términos de algunas propiedades de la operación? Una opción es: en un conjunto con dos elementos, uno de ellos tiene una conducta particular, es el elemento idéntico, para la tabla anterior, es a; y el otro, b, tiene la característica que al operarlo consigo mismo nos da el elemento idéntico; simbólicamente tenemos:

$$a + a = a$$

$$a + b = b = b + a$$

$$b + b = a$$

Ahora invirtamos el proceso y preguntémonos, ¿dadas las propiedades anteriores podemos recuperar la tabla? la respuesta es sí; pero encontramos dos posibilidades: una cuando el elemento idéntico es a, cuya tabla es la número 10. Y la otra cuando el elemento idéntico es b:

♦	a	b
a	b	a
b	a	b

Tabla 11

Pero si intercambiamos en esta última tabla los nombres de a y b, obtenemos:

	b	a
b	a	b
a	b	a

y reordenamos la tabla, conseguimos:

	a	b
a	a	b
b	b	a

Tabla 12

que es exactamente la tabla 10; lo que significa, que las dos tablas representan *la misma operación* con el nombre de los elementos intercambiado.

1.2.1. Propiedades de $(Z_2, +)$

Para establecer en cuáles aspectos las dos operaciones + y ♦ *son la misma*, estudiemos las propiedades que ellas cumplen, e iniciemos con las propiedades usualmente estudiadas en los conjuntos numéricos, como la asociativa, conmutativa y existencia de elementos inversos.

Para probar que alguna de ellas, por ejemplo +, cumple la propiedad asociativa debemos verificar que para todos los casos posibles, siempre se tiene que

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

donde x, y, z son elementos del conjunto $\{a, b\}$. La tarea no es muy larga, pues sólo son ocho casos, veámoslos:

$$a + (a + a) = a + a = (a + a) + a$$

$$a + (a + b) = a + b = (a + a) + b$$

$$b + (a + a) = b + a = (b + a) + a$$

$$b + (a + b) = b + b = (b + a) + b$$

$$a + (b + a) = a + b = b + a = (a + b) + a$$

$$a + (b + b) = a + a = b + b = (a + b) + b$$

$$b + (b + a) = b + b = a + a = (b + b) + a$$

$$b + (b + b) = b + a = a + b = (b + b) + b$$

Si observamos la tabla de la operación $+$, notamos que el elemento idéntico aparece una sola vez en cada fila y en cada columna lo que significa que para cada uno de los elementos x del conjunto, existe un elemento inverso, que los notaremos como $-x$, así:

$$-a = a$$

$$-b = b$$

puesto que

$$a + (-a) = a + a = (-a) + a = a$$

$$b + (-b) = b + b = (-b) + b = a$$

La propiedad conmutativa es evidente, se verifica por la simetría de la tabla con respecto a la diagonal principal. Con esto, concluimos que $(\{a, b\}, +)$ tiene estructura de grupo abeliano, con elemento idéntico a.

Con lo hecho, hemos obtenido dos tablas, que *se obtiene una de la otra con sólo un cambio de nombre*, y comprobado que ambas operaciones cumplen las propiedades que caracterizan a un grupo abeliano.

1.2.2. Otras caracterizaciones de la misma estructura

Establezcamos ahora si las propiedades enunciadas son las únicas posibles, si son suficientes, y si son necesarias todas. De hecho, hay varias maneras de caracterizar la estructura $(Z_2, +)$, por ejemplo:

1. Un conjunto con dos elementos y una operación, donde uno de los elementos es el *elemento idéntico y cada uno de ellos es su propio inverso.*

2. Un conjunto con dos elementos y una operación, que tiene estructura de *grupo abeliano.*

3. Un conjunto con dos elementos y una operación, que tiene estructura de *grupo.*

4. Un conjunto con dos elementos y una operación $*$, donde uno de los elementos es el *elemento idéntico* y cumple la *propiedad cancelativa*, es decir, que para todo x, y, z en el conjunto se tiene que $x * y = x * z$ implica que $y = z$.

Si intentamos recuperar la tabla por ejemplo a partir de la condición 4, la primera parte nos determina tres elementos de ella:

$*$	a	b
a		a
b	a	b

Tabla 13

donde hemos escogido b como elemento idéntico. La segunda parte de la condición implica que no deben aparecer elementos repetidos en una fila o en una columna; luego el elemento faltante es b, lo que completa la tabla.

Lo que tienen en común todas las tablas mostradas es lo que llamamos *el grupo abeliano* $(Z_2, +)$ o *el grupo* $(Z_2, +)$ o *el monoide cancelativo* $(Z_2, +)$ y cada uno de los ejemplos es una *representación* de él. Y decimos *él*, porque sólo hay uno, con diferentes caras pero uno solo, salvo el nombre; lo que cambia de una representación a otra son los *significados* de los elementos y de la operación.

En particular, si intercambiamos el nombre de los elementos en la *tabla 5* de la disyunción exclusiva de la lógica bivalente, obtenemos la tabla correspondiente a la equivalencia lógica:

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Tabla 14

Por supuesto que estas dos operaciones son casos particulares de la estructura $(Z_2, +)$ y por lo tanto cumplen las mismas propiedades mencionadas; *la equivalencia lógica no tiene el mismo significado que la disyunción exclusiva*, podríamos decir que son opuestas, en el sentido de que cuando una es verdadera la otra es falsa, pero *sus propiedades algebraicas son las mismas, esto significa que desde el punto de vista algebraico son dos representaciones de una sola estructura. Ambas son representaciones del grupo abeliano* $(Z_2, +)$ *o del monoide cancelativo* $(Z_2, +)$.

1.2.3. Paso de una representación a otra

Describamos un poco más en detalle el proceso de construir una operación intercambiando el nombre de los elementos involucrados en otra operación dada: supongamos el conjunto con dos elementos, sea éste $C = \{a, b\}$ y la operación $+$ definida como sigue:

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

Tabla 15

intercambiamos el nombre de sus elementos, lo que corresponde a definir la siguiente función:

$$\begin{aligned} \neg : \{a,\, b\} &\to \{a,\, b\} \\ a &\mapsto b \\ b &\mapsto a \end{aligned}$$

Ahora, en cada uno de los resultados de la tabla aplicamos la función $\neg$, con esto obtenemos una nueva tabla:

	$\neg a$	$\neg b$
$\neg a$	$\neg a$	$\neg b$
$\neg b$	$\neg b$	$\neg a$

Tabla 16

O sea,

	b	a
b	b	a
a	a	b

y reordenamos la tabla obteniendo la operación definida por:

$\blacklozenge$	a	b
a	b	a
b	a	b

Tabla 17

que tiene la misma estructura algebraica $(C,\, +)$, donde cada uno de los elementos de las casillas se obtiene así:

$$x \blacklozenge y = \neg((\neg x) + (\neg y))$$

para elementos arbitrarios x, y en el conjunto C. O de forma equivalente

$$(\neg x) + (\neg y) = \neg(x \blacklozenge y)$$

Si comparamos todos los ejemplos expuestos concluimos que de alguna manera estamos ante la *misma* situación, la única diferencia entre ellas, desde el punto de vista de la operación, es el *nombre* de los entes que ellos representan, en álgebra se les conoce como *estructuras isomorfas*[8].

2. Estructuras isomorfas a $(Z_2,\, \times)$

2.1. De las representaciones de $(Z_2,\, \times)$ a la estructura

2.1.1. Multiplicación con la idea de paridad

Apliquemos ahora el mecanismo de copiar estructuras anteriormente expuesta a la idea de *multiplicar* números naturales de la misma o distinta paridad: si multiplicamos un número par con

[8]Fraleigh, J. (1999). *A first course in abstract Algebra*. Sixth Edition. New York: Addison-Wesley. p. 44.

otro par, obtenemos como resultado un número par, si multiplicamos par con impar o impar con par, obtenemos un par y si multiplicamos impar con impar, obtenemos como resultado un impar, en resumen:

×	P	I
P	P	P
I	P	I

Tabla 18

Si aplicamos la función de intercambiar nombre que seguiremos notando ¬ al conjunto {P, I} en cada uno de los resultados de la tabla 18

	¬ P	¬ I
¬ P	¬ P	¬ P
¬ I	¬ P	¬ I

que es equivalente a

	I	P
I	I	I
P	I	P

y la reordenamos obteniendo:

$\Diamond$	P	I
P	P	I
I	I	I

Tabla 19

Esta operación no es la suma, ni la multiplicación entre números naturales pares e impares, pero le podemos asignar un *significado*, si la interpretamos en términos de suma y multiplicación entre números pares e impares tenemos que:

$$a \Diamond b = a \times b + (a + b).$$

2.1.2. La conjunción y la disyunción lógicas

Si aplicamos el procedimiento que hemos venido utilizando a la conjunción de la lógica bivalente que sólo es verdadera cuando ambas proposiciones son verdaderas y cuya tabla de verdad es:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabla 20

nos resulta una nueva[9] operación –la disyunción– haciendo

$$\neg((\neg p) \wedge (\neg q)) = p \vee q$$

[9] Con "nueva operación" nos estamos refiriendo a otra representación de la misma estructura; es decir, tal como ya lo hemos mencionado, lo que estamos haciendo es obtener estructuras algebraicas isomorfas a otras dadas, sólo que sus significados, sus nombres, son distintos, en este sentido son diferentes, la operación que resulta por el procedimiento aplicado es nueva; pero desde el punto de vista algebraico, son iguales, o mejor, isomorfas.

cuya tabla es

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabla 21

2.2. La estructura $(Z_2, \times)$

Nuevamente, la conjunción y la disyunción no tienen el mismo significado pero sí las mismas propiedades; tratemos de caracterizar su estructura[10] algebraica buscando algunas propiedades que determinen sus tablas, por ejemplo:

1. Un conjunto con dos elementos y una operación $*$, donde uno de los elementos es el elemento idéntico y cada uno de ellos es *idempotente*, es decir, $a * a = a$ para todo a en el conjunto.
2. Un conjunto con dos elementos y una operación, que tiene estructura de monoide conmutativo y cada uno de sus elementos es idempotente.
3. Un conjunto con dos elementos y una operación, que tiene estructura de monoide y cada uno de sus elementos es idempotente.
4. Un conjunto con dos elementos y una operación $*$, donde para todo x, y en el conjunto se tiene que $x * x = x$ y $x * y = y * x$.

Si ponemos nombres genéricos, esto es, consideramos el conjunto $\{a, b\}$ y la operación $\times$, la estructura dada por las propiedades anteriores es:

$\times$	a	b
a	a	a
b	a	b

Tabla 22

Donde se eligió a b como elementos idéntico. Notaremos a esta estructura $(Z_2, \times)$.

Si aplicamos a cada uno de los elementos en las casillas $\neg((\neg x) \times (\neg y))$ para elementos arbitrarios x, y en el conjunto, obtenemos una nueva operación $\spadesuit$:

$\spadesuit$	a	b
a	a	b
b	b	b

Tabla 23

Esta operación tiene al elemento a como el elemento idéntico, por supuesto, es otra representación de $(Z_2, \times)$.

[10]Siempre que mencionemos el término estructura nos estamos refiriendo a la estructura algebraica, netamente, aunque no lo especifiquemos.

3. Relaciones entre las estructuras construidas

3.1. Propiedad distributiva

Las estructuras $(\{a, b\}, \times)$ y $(\{a, b\}, \spadesuit)$ tienen algo que no tienen las estructuras $(\{a, b\}, +)$ y $(\{a, b\}, \blacklozenge)$ construidas anteriormente: la operación $\times$ es distributiva con respecto a la operación $\spadesuit$, esto significa que para todo elemento x, y, z en el conjunto $\{a, b\}$ se cumple:

$$x \times (y \spadesuit z) = (x \times y) \spadesuit (x \times z)$$

Pero hay más, también la operación $\spadesuit$ es distributiva con respecto a la operación $\times$, o sea que

$$x \spadesuit (y \times z) = (x \spadesuit y) \times (x \spadesuit z).$$

¡Una operación que es distributiva con respecto a una copia de ella misma!

Y para completar sus acoples, la operación $\times$ también es distributiva con respecto a la operación $+$ y la operación $\spadesuit$ es distributiva con respecto a la operación $\blacklozenge$. En particular tenemos que $(\{a, b\}, +, \times)$ tiene estructura de campo, al igual que $(\underline{2}, \veebar, \wedge)$ y que $(\underline{2}, \leftrightarrow, \vee)$.

Para demostrar cada una de estas relaciones debemos hacer las cuentas correspondientes (8 en cada caso), por ejemplo para probar que

$$x \times (y \spadesuit z) = (x \times y) \spadesuit (x \times z)$$

debemos verificar que se cumplen cada una de las igualdades;

$$a \times (a \spadesuit a) = (a \times a) \spadesuit (a \times a)$$

$$a \times (a \spadesuit b) = (a \times a) \spadesuit (a \times b)$$

$$a \times (b \spadesuit a) = (a \times b) \spadesuit (a \times a)$$

$$a \times (b \spadesuit b) = (a \times b) \spadesuit (a \times b)$$

y así para cada combinación posible de los elementos a y b.

3.2. Propiedad absorbente [11]

Otra relación entre las operaciones $\spadesuit$ y $\times$ es que para todo x y y

$$x \times (x \spadesuit y) = x = x \spadesuit (x \times y)$$

conocida como ley de absorción. Si suponemos que esta propiedad es válida podemos deducir las leyes de idempotencia para $\times$ y $\spadesuit$, basta reemplazar $y = x \times x$ en la primera igualdad y hacer $y = x$ en la segunda igualdad, obteniendo

$$(x \times (x \spadesuit (x \times x)) = x \times x = x.$$

[11] Esta propiedad se usa como uno de los axiomas para definir una estructura conocida como álgebra de Boole. (Birkhoff, G & Bartee, T. (1970). *Modern applied algebra.* New York: McGraw Hill. p. 129).

4. Otras estructuras con dos elementos

4.1. A partir de la conjunción[12]

Hemos visto que

$$x \blacklozenge y = \neg((\neg x) + (\neg y))$$

nos permite construir una operación $\blacklozenge$ a partir de la operación $+$ y que a pesar de tener significados diferentes son algebraicamente iguales.

Modifiquemos este mecanismo para construir otras operaciones –que esperamos sean algebraicamente distintas–, usando otras igualdades, basadas en la anterior, por ejemplo, partiendo de la operación $\wedge$ en $\{0, 1\}$, iniciemos eliminando las negaciones en el interior de los paréntesis en el lado derecho de la igualdad, con esto obtenemos una nueva operación[13] que notamos con $|$:

1. $x|y = \neg(x \wedge y)$ cuya tabla es

$\vert$	0	1
0	1	1
1	1	0

Tabla 24

También podemos eliminar sólo la negación en el primer elemento que se opera y obtener:

2. $x \rightarrow y = \neg(x \wedge (\neg y))$ cuya tabla es

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

Tabla 25

que corresponde con la *implicación* habitual de la lógica clásica. O eliminar sólo la negación en el segundo elemento que se opera y encontrar:

3. $x \leftarrow y = \neg((\neg x) \wedge y)$ cuya tabla es

$\leftarrow$	0	1
0	1	0
1	1	1

Tabla 26

[12] Usamos el nombre de conjunción, disyunción, etc., para las operaciones en un conjunto con dos elementos que notamos 0 y 1, y negación para la función biyectiva que intercambia los nombres de 0 y 1, por analogía con los nombres correspondientes de la lógica.

[13] Esta operación conocida como *barra de Sheffer*, fue descubierta por Peirce en 1902 y redescubierta por Sheffer en 1923, con ella es posible construir todas las otras operaciones lógicas y por ello forma uno de los *conjuntos completos de conectivos* para el cálculo proposicional clásico, actualmente se usa en el diseño de circuitos lógicos con el nombre de compuerta NAND.

que corresponde con la *implicación recíproca* de $x \to y$, o sea $y \to x$ y que la simbolizamos con $x \leftarrow y$. O eliminar la negación que afecta al primer paréntesis y conseguir la operación[14]:

4. $x \downarrow y = (\neg x) \wedge (\neg y)$ cuya tabla es

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0

Tabla 27

o considerar las alternativas:

5. $x -\!\bullet y = x \wedge (\neg y)$

6. $x \bullet\!- y = (\neg x) \wedge y$ cuyas tablas son

$-\bullet$	0	1
0	0	0
1	1	0

Tabla 28

y

$\bullet-$	0	1
0	0	1
1	0	0

Tabla 29

respectivamente, a estas operaciones las llamaremos *diferencia* y *diferencia recíproca* respectivamente. O finalmente, quitar –lo que parece inútil– todas las negaciones y llegar a donde partimos:

$$x \wedge y = x \wedge y$$

Podemos también intercambiar el lugar de x e y, pero debido a que la operación con que iniciamos el proceso es conmutativa[15], obtenemos las mismas operaciones. Sin embargo, podríamos esperar que cuando los mecanismos mencionados se apliquen a operaciones no conmutativas obtuviéramos otras operaciones diferentes a las ya obtenidas, pero curiosamente esto no es así, como se puede ver en la siguiente tabla:

	$\wedge$	$\vee$	$\vert$	$\downarrow$	$\to$	$\leftarrow$	$-\bullet$	$\bullet-$
$x \copyright y$	$\wedge$	$\vee$	$\vert$	$\downarrow$	$\to$	$\leftarrow$	$-\bullet$	$\bullet-$
$\neg((\neg x) \copyright (\neg y))$	$\vee$	$\wedge$	$\downarrow$	$\vert$	$\bullet-$	$-\bullet$	$\leftarrow$	$\to$
$\neg(x \copyright y)$	$\vert$	$\downarrow$	$\wedge$	$\vee$	$-\bullet$	$\bullet-$	$\to$	$\leftarrow$
$\neg(x \copyright (\neg y))$	$\to$	$\bullet-$	$-\bullet$	$\leftarrow$	$\wedge$	$\downarrow$	$\vert$	$\vee$
$\neg((\neg x) \copyright y)$	$\leftarrow$	$-\bullet$	$\bullet-$	$\to$	$\downarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\vert$
$(\neg x) \copyright (\neg y)$	$\downarrow$	$\vert$	$\vee$	$\wedge$	$\leftarrow$	$\to$	$\bullet-$	$-\bullet$

[14] Conocida como *flecha, funtor* o *functor de Peirce*, fue descubierta por Peirce en 1880 y es otro de los conectivos completos para el cálculo proposicional clásico, actualmente se usa en el diseño de circuitos lógicos con el nombre de compuerta NOR.

[15] O si invertimos el razonamiento, el hecho de que las tablas obtenidas intercambiando x e y sean las mismas indican que la operación es conmutativa.

$x \copyright (\neg y)$	$-\bullet$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\bullet-$	$\mid$	$\vee$	$\wedge$	$\downarrow$
$(\neg x) \copyright y$	$\bullet-$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$-\bullet$	$\vee$	$\mid$	$\downarrow$	$\wedge$
$y \copyright x$	$\wedge$	$\vee$	$\mid$	$\downarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\bullet-$	$-\bullet$
$\neg((\neg y) \copyright (\neg x))$	$\vee$	$\wedge$	$\downarrow$	$\mid$	$-\bullet$	$\bullet-$	$\rightarrow$	$\leftarrow$
$\neg(y \copyright x)$	$\mid$	$\downarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\bullet-$	$-\bullet$	$\leftarrow$	$\rightarrow$
$\neg(y \copyright (\neg x))$	$\leftarrow$	$-\bullet$	$\bullet-$	$\rightarrow$	$\wedge$	$\downarrow$	$\mid$	$\vee$
$\neg((\neg y) \copyright x)$	$\rightarrow$	$\bullet-$	$-\bullet$	$\leftarrow$	$\downarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\mid$
$(\neg y) \copyright (\neg x)$	$\downarrow$	$\mid$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$-\bullet$	$\bullet-$
$y \copyright (\neg x)$	$\bullet-$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$-\bullet$	$\mid$	$\vee$	$\wedge$	$\downarrow$
$(\neg y) \copyright x$	$-\bullet$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\bullet-$	$\vee$	$\mid$	$\downarrow$	$\wedge$

Tabla 30

4.2. A partir de la equivalencia

En busca de nuevas operaciones, apliquemos cada uno de los procedimientos efectuados con la conjunción, a una operación que no aparezca en la *tabla 30*, por ejemplo a la *equivalencia lógica*:

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

como ya sabemos, si aplicamos $\neg((\neg x) \leftrightarrow (\neg y))$ obtenemos la *disyunción exclusiva*

$$x \veebar y = \neg((\neg x) \leftrightarrow (\neg y))$$

cuya tabla es:

$\veebar$	0	1
0	0	1
1	1	0

pero lamentablemente al aplicar cualquiera de los procedimientos anteriores a la disyunción exclusiva y a la equivalencia lógica, obtenemos de nuevo las mismas dos operaciones, como lo puede verificar un lector acucioso.

4.3. A partir de la primera proyección

Como nuestro intento de conseguir nuevas operaciones con lo conocido no tuvo éxito, observemos que cada tabla de las que hemos obtenido es un arreglo de cuatro números que son unos o ceros y en total hay 16 posibilidades para hacer esta elección, que corresponden con los números entre 0000 y 1111 en base 2 con cuatro cifras.

Hemos estudiado las cuatro tablas que tienen 3 ceros y 1 uno, las cuatro tablas que tienen 3 unos y 1 cero y 2 tablas que tienen 2 unos en una diagonal y 2 ceros en la otra; nos faltan las que tienen 2 ceros (o 2 unos) en una misma columna o en una misma fila y para ello hay 4 posibilidades: π_1 que llamaremos *primera proyección*, $\otimes$ que corresponde a la *negación de la primera proyección; la segunda proyección* π_2 y su negación $*$:

π_1	0	1
0	0	0
1	1	1

Tabla 31

$*$	0	1
0	1	0
1	1	0

Tabla 32

$\otimes$	0	1
0	1	1
1	0	0

Tabla 33

π_2	0	1
0	0	1
1	0	1

Tabla 34

y todas ellas se obtienen unas de otras con alguno de los mecanismos mencionados. Por ejemplo

$$\begin{aligned} x \otimes y &= \neg(x\,\pi_1\,y) \\ x * y &= \neg(y\,\pi_1\,x) \\ x\,\pi_2\,y &= (y\,\pi_1\,x) \end{aligned}$$

4.4. A partir de la tautología

Sólo quedan las tablas con 4 unos y con 4 ceros, que corresponden a:

$\top$	0	1
0	1	1
1	1	1

Tabla 35

$\bot$	0	1
0	0	0
1	0	0

Tabla 36

La primera operación la llamamos *tautología* y la segunda *contradicción.* Si aplicamos los mecanismos definidos para conseguir otras operaciones a estas tablas obtenemos las mismas dos operaciones. Resumamos lo observado en la siguiente tabla:

	$\wedge$	$\vee$	$\mid$	$\downarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$-\!\bullet$	$\bullet\!-$	$\veebar$	$\leftrightarrow$	$*$	$\otimes$	π_1	π_2	$\top$	$\bot$
$x \copyright y$	$\wedge$	$\vee$	$\mid$	$\downarrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$-\!\bullet$	$\bullet\!-$	$\veebar$	$\leftrightarrow$	$*$	$\otimes$	π_1	π_2	$\top$	$\bot$
$\neg((\neg x)\copyright(\neg y))$	$\vee$	$\wedge$	$\downarrow$	$\mid$	$\bullet\!-$	$-\!\bullet$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\veebar$	$*$	$\otimes$	π_1	π_2	$\bot$	$\top$
$\neg(x\copyright y)$	$\mid$	$\downarrow$	$\wedge$	$\vee$	$-\!\bullet$	$\bullet\!-$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\leftrightarrow$	$\veebar$	π_2	π_1	$\otimes$	$*$	$\bot$	$\top$
$\neg(x\copyright(\neg y))$	$\rightarrow$	$\bullet\!-$	$-\!\bullet$	$\leftarrow$	$\wedge$	$\downarrow$	$\mid$	$\vee$	$\veebar$	$\leftrightarrow$	$*$	π_1	$\otimes$	π_2	$\bot$	$\top$
$\neg((\neg x)\copyright y)$	$\leftarrow$	$-\!\bullet$	$\bullet\!-$	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\mid$	$\veebar$	$\leftrightarrow$	π_2	$\otimes$	π_1	$*$	$\bot$	$\top$
$(\neg x)\copyright(\neg y)$	$\downarrow$	$\mid$	$\vee$	$\wedge$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\bullet\!-$	$-\!\bullet$	$\veebar$	$\leftrightarrow$	π_2	π_1	$\otimes$	$*$	$\top$	$\bot$
$x\copyright(\neg y)$	$-\!\bullet$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\bullet\!-$	$\mid$	$\vee$	$\wedge$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\veebar$	π_2	$\otimes$	π_1	$*$	$\top$	$\bot$
$(\neg x)\copyright y$	$\bullet\!-$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$-\!\bullet$	$\vee$	$\mid$	$\downarrow$	$\wedge$	$\leftrightarrow$	$\veebar$	$*$	π_1	$\otimes$	π_2	$\top$	$\bot$
$y\copyright x$	$\wedge$	$\vee$	$\mid$	$\downarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\bullet\!-$	$-\!\bullet$	$\veebar$	$\leftrightarrow$	$\otimes$	$*$	π_2	π_1	$\top$	$\bot$
$\neg((\neg y)\copyright(\neg x))$	$\vee$	$\wedge$	$\downarrow$	$\mid$	$-\!\bullet$	$\bullet\!-$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$\leftrightarrow$	$\veebar$	$\otimes$	$*$	π_2	π_1	$\bot$	$\top$

$\neg(y \copyright x)$	$\vert$	$\downarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\bullet\!-$	$-\!\bullet$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\veebar$	π_1	π_2	$*$	$\otimes$	$\perp$	$\top$
$\neg(y \copyright (\neg x))$	$\leftarrow$	$-\!\bullet$	$\bullet\!-$	$\rightarrow$	$\wedge$	$\downarrow$	$\vert$	$\vee$	$\veebar$	$\leftrightarrow$	$\otimes$	π_2	$*$	π_1	$\perp$	$\top$
$\neg((\neg y) \copyright x)$	$\rightarrow$	$\bullet\!-$	$-\!\bullet$	$\leftarrow$	$\downarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\vert$	$\veebar$	$\leftrightarrow$	π_1	$*$	π_2	$\otimes$	$\perp$	$\top$
$(\neg y) \copyright (\neg x)$	$\downarrow$	$\vert$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$-\!\bullet$	$\bullet\!-$	$\veebar$	$\leftrightarrow$	π_1	π_2	$*$	$\otimes$	$\top$	$\perp$
$y \copyright (\neg x)$	$\bullet\!-$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$-\!\bullet$	$\vert$	$\vee$	$\wedge$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\veebar$	π_1	$*$	π_2	$\otimes$	$\top$	$\perp$
$(\neg y) \copyright x$	$-\!\bullet$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\bullet\!-$	$\vee$	$\vert$	$\downarrow$	$\wedge$	$\leftrightarrow$	$\veebar$	$\otimes$	π_2	$*$	π_1	$\top$	$\perp$

Tabla 37

4.5. Relaciones entre las estructuras obtenidas

De la tabla anterior es posible obtener igualdades que relacionan unas operaciones con otras, tales como:

$$(\neg y) \wedge x = x - \bullet y$$

o

$$y \wedge (\neg x) = x \bullet - y$$

o

$$\neg((\neg y) \downarrow x) = x \leftarrow y$$

$$y \downarrow (\neg x) = x - \bullet y$$

y si comparamos la primera igualdad con la última obtenemos que

$$(\neg y) \wedge x = y \downarrow (\neg x)$$

Leyendo la segunda fila de la tabla 37 en sus dos primeras columnas encontramos dos relaciones entre las operaciones conjunción y disyunción que en lógica son conocidas como las leyes de De Morgan[16]:

$$\neg((\neg y) \wedge (\neg x)) = x \vee y$$

$$\neg((\neg y) \vee (\neg x)) = x \wedge y$$

Y en las otras columnas relaciones análogas para cada par de conectivos, por ejemplo:

$$\neg((\neg y) \downarrow (\neg x)) = x | y$$

$$\neg((\neg y) | (\neg x)) = x \downarrow y$$

En la cuarta fila aparece

$$\neg(x \copyright (\neg y))$$

que relaciona en la primera columna a la conjunción con la implicación, es decir que

$$\neg(x \rightarrow (\neg y)) = x \wedge y$$

[16] En honor al matemático inglés, nacido en India, Augustus De Morgan (1806-1871).

y por una de las leyes de De Morgan, deducimos

$$\neg((\neg y) \vee (\neg x)) = \neg(x \to (\neg y)).$$

También tenemos que

$$\neg(x \wedge (\neg y)) = x \to y$$

O sea que

$$x \to y = \neg x \vee y$$

5. Caracterización de las estructuras con dos elementos

Volvamos a las 16 operaciones (conectivos) posibles en un conjunto con dos elementos y tratemos de caracterizarlas con algunas *propiedades básicas*, es decir, propiedades necesarias y suficientes para que la estructura quede determinada de manera única, salvo isomorfismos.

5.1. La conjunción y la disyunción

Las condiciones:

Para todo x, y en $\{0, 1\}$ se cumple que[17]

A1. $xx = x$ (Idempotencia)
A2. $xy = yx$, (Conmutativa)

determinan las operaciones conjunción $\wedge$, y disyunción $\vee$ de la lógica usual. La primera, A1, determina la diagonal principal:

$\wedge$	0	1
0	0	
1		1

$\vee$	0	1
0	0	
1		1

y la segunda dice que los elementos de la diagonal secundaria deben ser iguales y para ello hay dos posibilidades: o son 0 o son 1, la primera opción determina la conjunción y la segunda la disyunción. Estas dos operaciones también cumplen otras propiedades; ya vimos que además de idempotentes y conmutativas, son asociativas y tienen elemento idéntico, pero también cumplen propiedades que habitualmente no se mencionan[18] ni se estudian, por ejemplo:

i. Identidad I de Stein[19]: $x(xy) = yx$

ii. Identidad II de Stein: $x(yx) = (yx)y$

[17] Omitiremos el símbolo de la operación, con el ánimo de simplificar la escritura, esto quiere decir que xy representa $x \copyright y$ o xx representa $x \copyright x$, la operación se hace explícita en el texto.

[18] Ilse, D., Lehmann, I & Schulz, W. (1984). *Grupoide und funktionalgleichungen.* Berlín: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[19] Stein, S. (1957). *On the foundations of quasigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **85**. p.p. 228-256.

iii. Identidad I de Schröder[20]: $x(xy) = (xy)y$

iv. Elasticidad: $x(yx) = (xy)x$

v. Asociativa cíclica I: $x(yz) = z(xy)$

vi. Asociativa cíclica II: $x(yz) = (zx)y$

vii. Identidad de Abel – Graβmann I: $x(yz) = z(yx)$

viii. Identidad de Abel – Graβmann II: $x(yz) = (yx)z$

ix. Permutabilidad a izquierda: $x(yz) = y(xz)$

x. Permutabilidad a derecha: $(xy)z = (xz)y$

xi. Propiedad del producto reducido[21]: $(xy)z = x(zy)$

xii. Autodistributividad a izquierda: $x(yz) = (xy)(xz)$

xiii. Autodistributividad a derecha: $(xy)z = (xz)(yz)$

xiv. Autodistributividad a izquierda abeliana: $x(yz) = (xy)(zx)$

xv. Autodistributividad a derecha abeliana: $(xy)z = (zx)(yz)$

xvi. Bisimetría: $(xy)(uv) = (xu)(yv)$

Sin embargo, en este caso, *todas* estas propiedades pueden deducirse de los Axiomas A1 y A2. Por ejemplo derivemos las propiedades de elasticidad, la identidad I de Stein y la I de Schröder.

T1. *Elasticidad*: Para todo x, y en el conjunto $X = \{0, 1\}$, $x(yx) = (xy)x$

$$\begin{aligned} x(yx) &= x(xy) && \text{por A2} \\ &= (xy)x && \text{por A2} \end{aligned}$$

Esto significa que cualquier estructura que sea conmutativa es elástica. Pero la recíproca no es cierta por ejemplo:

π_1	0	1
0	0	0
1	1	1

es elástica pero no conmutativa.

T2. *Identidad I de Stein:* Para todo x, y en el conjunto $X = \{0, 1\}$, $x(xy) = yx$

Como en X sólo hay dos elementos dividimos la prueba en dos partes,

[20]Schröder, E. (1873). *Lehrbuch der arithmetik und algebra fuer lehrer und studierende*, Band 1, Leipzig: Teubner.

[21]El original en alemán es *Eingewandtes Produkt.*

Si $xy = y$

$$\begin{aligned} x(xy) &= xy && \text{Por hipótesis} \\ &= yx && \text{Por A2} \end{aligned}$$

Si $xy = x$

$$\begin{aligned} x(xy) &= xx && \text{Por hipótesis} \\ &= x && \text{Por A1} \\ &= xy && \text{Por hipótesis} \\ &= yx && \text{Por A2} \end{aligned}$$

T3. *Identidad I de Schröder:* Para todo x, y en el conjunto $X = \{0, 1\}$, $x(xy) = (xy)y$.

Dividimos de nuevo la prueba en dos partes,

Si $xy = y$

$$\begin{aligned} x(xy) &= xy && \text{Por hipótesis} \\ &= (xy)(xy) && \text{Por A1} \\ &= (xy)y && \text{Por hipótesis} \end{aligned}$$

Si $xy = x$

$$\begin{aligned} x(xy) &= xx && \text{Por hipótesis} \\ x(xy) &= x && \text{Por A1} \\ x(xy) &= xy && \text{Por hipótesis} \\ xx &= xy && \text{Por hipótesis} \\ x &= xy && \text{Por A1} \\ xy &= (xy)y && \text{Operando con y a ambos lados de la igualdad} \\ (xy)(xy) &= (xy)y && \text{Por A1} \\ x(xy) &= (xy)y && \text{Por hipótesis} \end{aligned}$$

Ahora usando los axiomas A1 y A2, probemos

T4. *Propiedad asociativa de la conjunción y la disyunción:* Para todo x, y, z en el conjunto $X = \{0, 1\}$, se cumple que $x\,(yz) = (xy)\,z$.

Como en el conjunto sólo hay dos elementos entonces, $z = x$ o $z = y$, dividimos de nuevo la prueba en dos partes,

Si $z = x$

$$x(yx) = (xy)x \qquad \text{Por hipótesis y la propiedad de elasticidad (T1)}$$

Si $z = y$

$$\begin{aligned} x(yy) &= xy && \text{Por hipótesis y por A1} \\ &= yx && \text{Por A2} \\ &= x(xy) && \text{Por la identidad I de Stein (T2)} \\ &= (xy)y && \text{Por la identidad I de Schröder (T3).} \end{aligned}$$

T5. *Existencia del elemento idéntico.*

Como en X sólo hay dos elementos dividimos la prueba en dos partes,

Si $xy = y$ entonces x es el elemento idéntico puesto que $xx = x$.

Si $xy = x$ entonces y es el elemento idéntico puesto que $yy = y$.

En nuestro caso particular del conjunto $X = \{0, 1\}$ y de las operaciones de conjunción y disyunción, las propiedades enunciadas están relacionadas unas con otras y podemos demostrar unas de ellas y usarlas como argumento para abreviar la demostración de las demás; por ejemplo, las propiedades asociativa cíclica I y II, las identidades de Abel–Graβmann I y II, la permutabilidad a izquierda y a derecha, la propiedad del producto reducido y la bisimetría son consecuencias inmediatas de la asociatividad y la conmutatividad, mientras que las propiedades de autodistributividad a izquierda y a derecha y las correspondientes abelianas requieren para su prueba, además la propiedad de idempotencia.

Sin embargo debemos limitar el alcance de nuestras afirmaciones, no hemos afirmado que la propiedad asociativa se deduzca de las propiedades de idempotencia y conmutativa; hemos afirmado que esto es válido en un conjunto con dos elementos, pero *en contextos más generales*, se pueden enunciar las mismas propiedades y que ellas sean independientes unas de otras, por ejemplo: la operación *construcción del punto medio*, definida para todo par de puntos P y Q de un plano α, mediante $P * Q = R$ donde R es el punto medio del $\underline{PQ}$ y $P * P = P$, es conmutativa y bisimétrica pero no asociativa. Tampoco la conmutatividad es consecuencia de la bisimetría, por ejemplo la sustracción entre números enteros es bisimétrica, pero no asociativa, ni conmutativa, pues para enteros cualesquiera x, y, u, v se tiene que

$$(x - y) - (u - v) = (x - u) - (y - v).$$

El juego de la axiomática consiste en elegir unas propiedades que nos sirvan como axiomas para definir una estructura y demostrar las demás en términos de ellas.

Las propiedades que se eligen como axiomas no son las únicas que definen la estructura, puede haber varios conjuntos de axiomas que definan la misma estructura, como lo vimos en la sección 1.2.2.

La caracterización habitual[22] de las operaciones conjunción y disyunción de la lógica bivalente, dentro de la teoría de retículos, es que son asociativas, conmutativas e idempotentes, pero como hemos visto, *en este caso* la propiedad asociativa se puede deducir de las otras dos. También podríamos pensar en reemplazar la condición de idempotencia, como axioma, por la existencia de un elemento idéntico; no obstante, esto último no determina la estructura pues la equivalencia lógica y la disyunción exclusiva son otras operaciones, con dos elementos, que son monoides conmutativos y no son isomorfas con la conjunción o la disyunción.

La propiedad asociativa generalmente se asume como axioma[23] para la mayoría de las estructuras que se definen en el álgebra abstracta: semigrupos, monoides, grupos, anillos, campos, etc. Pero como vimos en esta sección, para el caso de la disyunción y la conjunción, esto no es necesario.

[22] Lentin, A. & Rivaud, J. (1971). *Álgebra Moderna*. Madrid: Aguilar. p. 40.

[23] Mostow, G., Sampson, J. & Meyer, J. P. (1963). *Fundamental Structures of Algebra*. New York: McGraw Hill. p. 8.

5.2. La flecha de Peirce y la barra de Sheffer

Las condiciones:

Para todo x, y en $\{0, 1\}$ se cumple que

A2. $xy = yx$, (Conmutativa)

A3. $xx = y$ con $x \neq y$.

determinan las operaciones barra de Sheffer $|$, u operador NAND, y funtor de Peirce[24] $\downarrow$, u operador NOR de la lógica bivalente. La condición A3. determina la diagonal principal:

$\vert$	0	1
0	1	
1		0

$\downarrow$	0	1
0	1	
1		0

y la condición A2. dice que los elementos de la diagonal secundaria deben ser iguales y para ello hay dos posibilidades: o son 1 o son 0, la primera opción determina la barra y la segunda el funtor. Estas dos operaciones cumplen, de las propiedades enunciadas anteriormente, sólo la propiedad elástica, que es deducible de la propiedad conmutativa como lo hicimos en el teorema T1.

A pesar de que la flecha o funtor de Peirce carece de casi todas las propiedades enunciadas para otras operaciones, esta operación permite expresar todas las demás operaciones lógicas en términos de ella, de la siguiente forma:

- $\neg p = p \downarrow p$.
- $p \vee q = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.
- $p \wedge q = (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.
- $p \bot q = (p \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q))$
- $p \top q = ((p \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q))) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)))$
- $p \bullet\!- q = (p \downarrow q) \downarrow p$
- $p \leftarrow q = ((p \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow p)$
- $p -\!\bullet q = (p \downarrow q) \downarrow q$
- $p \rightarrow q = ((p \downarrow q) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow q)$
- $p\, \pi_1\, q = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow p)$

[24]El aporte de Peirce a la lógica también incluye el invento de la lógica de relaciones, la lógica de cuantificadores y la lógica trivalente; estudió la axiomatización del cálculo proposicional, el cálculo implicativo débil, la negación intuicionista, las tablas de verdad, los conectivos completos, las definiciones reticulares y la notación de los conectivos proposicionales.

- $p \otimes q = ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow p)) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow p))$
- $p\, \pi_2\, q = (p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)$
- $p * q = ((p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q))$
- $p \leftrightarrow q = ((p \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow q)$
- $p \veebar q = (((p \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow q)) \downarrow (((p \downarrow q) \downarrow p) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow q))$
- $p|q = ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$.

5.3. La implicación y la diferencia recíproca

Las condiciones:

Para todo x, y en $\{0, 1\}$ se cumple que

A4. $xx = yy$ (Unipotencia)

A5. $xy = y$ con $x \neq y$

determinan las operaciones *implicación* $\rightarrow$, *y diferencia recíproca* $\bullet\!-$, y las únicas propiedades de las enunciadas que cumplen es que son permutables a izquierda y auto distributivas a izquierda, esto es: $x(yz) = y(xz)$ y $x(yz) = (xy)(xz)$ respectivamente.

5.4. La diferencia y la implicación recíproca

Las condiciones:

Para todo x, y en 0, 1 se cumple que

A4. $xx = yy$ (Unipotencia)

A6. $xy = x$ con $x \neq y$.

determinan la estructura de las operaciones *diferencia* $-\!\bullet$, *e implicación recíproca* $\leftarrow$, y las únicas propiedades de las enunciadas que cumplen es que son permutables a derecha y auto distributivas a derecha, esto es: $(xy)z = (xz)y$ y $(xy)z = (xz)(yz)$ respectivamente.

5.5. La tautología y la contradicción

Las condiciones:

Para todo x, y en $\{0, 1\}$ se cumple que

A4. $xx = yy$ (Unipotencia)

A7. $xy = yx = xx$

Determinan las operaciones $\perp$, $\top$, que forman un semigrupo conmutativo.

5.6. La equivalencia y la disyunción exclusiva

Las condiciones:

Para todo x, y en $\{0, 1\}$ se cumple que

A4. $xx = yy$ (Unipotencia)

A8. $xy = yx \neq xx$

determinan los grupos abelianos $\leftrightarrow$, $\veebar$, que cumplen además la propiedad de elasticidad, consecuencia de la conmutatividad; las asociativas cíclicas I y II, las identidades de Abel–Graβmann I y II, la permutabilidad a izquierda y a derecha, la propiedad del producto reducido y la bisimetría, que son consecuencias inmediatas de la asociatividad y de la propiedad conmutativa. Además cumplen las propiedades:

xvii. Semisimétrica a izquierda: $x\,(yx) = y$

xviii. Semisimétrica a derecha: $(xy)\,x = y$

xix. Identidad de Schwitzer a izquierda: $(xy)\,(xz) = zy$

xx. Identidad de Schwitzer a derecha: $(xy)\,(zy) = zx$

xxi. Identidad de Tarski: $x(y\,(zx)) = zy$

xxii. Transitividad a izquierda: $(xy)\,(xz) = yz$

xxiii. Transitividad a izquierda: $(xy)\,(zy) = xz$

xxiv. Transitividad media: $(xy)\,(yz) = xz$

xxv. Identidad de Neumann: $x\,((yz)\,(yx)) = z$

5.7. La primera proyección

La condición:

Para todo x, y en $\{0,\,1\}$ se cumple que

A9. $xy = x$

determina la operación π_1 que es un semigrupo y además cumple las propiedades idempotente, elástica, I y II de Schröder, permutable a derecha, la del producto reducido, la transitiva a derecha y media, la autodistributiva izquierda y derecha y la izquierda abeliana y la bisimétrica.

5.8. La segunda proyección

La condición:

Para todo x, y en $\{0,\,1\}$ se cumple que

A10. $xy = y$

Determina la operación π_2 que es un semigrupo y además cumple las propiedades idempotente, elástica, de Abel Graβman II, permutable a izquierda, la del producto reducido, la transitiva a izquierda, la autodistributiva izquierda y derecha y la derecha abeliana y la bisimétrica. Además π_2 es distributiva con respecto a π_1.

5.9. La negación de la primera proyección

Las condiciones A3 y A10 determinan la operación $\otimes$ que es permutable a derecha, autodistributiva a derecha y bisimétrica y es distributiva a izquierda con respecto a $*$.

5.10. La negación de la segunda proyección

Las condiciones A3 y A9 determinan la operación $*$ que cumple la identidad II de Schröder, es permutable a izquierda, autodistributiva a izquierda y bisimétrica.

6. Relaciones entre las operaciones: una estructura formada con estructuras

6.1. Las funciones R y T

Estudiemos ahora algunas relaciones entre las tablas obtenidas según el número de ceros y unos que hay en cada una:

Nº de tablas	Nº de unos	Nº de ceros
1	4	0
1	0	4
4	1	3
4	3	1
6	2	2

Tabla 38

En las 4 tablas que tienen tres ceros y un uno:

$$\begin{array}{c|cc} \wedge & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} -\bullet & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \downarrow & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \bullet- & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

vemos que a partir de la conjunción y haciendo una semejanza con las rotaciones en el plano, la tabla del conectivo $(-\bullet)$ se obtiene a partir de una *rotación* de 90º grados en el *sentido de las manecillas del reloj*; la tabla del $\downarrow$ resulta de una *rotación* de 180º en el mismo sentido de las manecillas del reloj y la tabla del $(\bullet-)$ se consigue a partir de una rotación de 270º en el sentido de las manecillas del reloj; y si nuevamente se realiza una rotación de 360º en el sentido de las manecillas del reloj, obtendremos la misma tabla de la conjunción; y si notamos con © a una de las cuatro operaciones consideradas, este paso de una tabla a la otra se consigue con el procedimiento

$$(\neg y)\,©\,x$$

que notaremos como $x\,(\mathrm{R}\,©\,)\,y$, es decir que para todo elemento x, y en $\{0, 1\}$,

$$x\,(\mathrm{R}\,©\,)\,y = (\neg y)\,©\,x.$$

De lo dicho, inferimos que si aplicamos cuatro veces R a la operación ©, obtenemos de nuevo la operación ©. Si notamos la función $x\,©\,y$ como $x(\mathrm{I}\,©\,)$ y, tenemos que: $\mathrm{R}^4 = \mathrm{I}$.

La función R también satisface la igualdad: IR = RI = R lo que se interpreta como: aplicar a ©, primero I y luego R o, primero R y luego I.

También podemos partir de la conjunción y, obtener la tabla de la operación (•−) mediante una *rotación de 90º grados en sentido contrario de las manecillas del reloj*; la tabla del ↓ mediante una *rotación* de 180º en sentido contrario a las manecillas del reloj y la tabla del (−•), haciendo una rotación de 270º en sentido contrario a las manecillas del reloj y si nuevamente se realiza una rotación de 360º en sentido contrario de las manecillas del reloj, obtendremos la misma tabla de la conjunción; este mecanismo que notaremos $x\,(\mathrm{T}\,\copyright\,)y$ es el mismo definido por

$$x\,(\mathrm{T}\,\copyright\,)y = y\,\copyright\,(\neg x)$$

y por supuesto que si aplicamos cuatro veces T a la operación ©, obtenemos la operación ©. Esto también lo podemos reescribir como: $\mathrm{T}^4 = \mathrm{I}$. La función T también satisface la igualdad:

$$\mathrm{IT} = \mathrm{TI} = \mathrm{T}.$$

Si consideramos las operaciones que tienen tres unos y un cero:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\leftarrow$	0	1
0	1	0
1	1	1

$\mid$	0	1
0	1	1
1	1	0

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

Notamos que éstas se consiguen unas de otras usando el mismo procedimiento anterior.

Ahora estudiemos las tablas que tienen dos ceros y dos unos; si iniciamos con la disyunción exclusiva y le aplicamos la función R o la función T obtenemos la equivalencia y viceversa, si iniciamos con la equivalencia y le aplicamos la función R o la función T obtenemos disyunción exclusiva,

$\veebar$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

pero en este caso sólo obtenemos dos operaciones, no cuatro como en el caso anterior.

Y si aplicamos el procedimiento a las 4 tablas en que los dos 1 están en una misma columna o en una misma fila:

π_1	0	1
0	0	0
1	1	1

$*$	0	1
0	1	0
1	1	0

$\otimes$	0	1
0	1	1
1	0	0

π_2	0	1
0	0	1
1	0	1

de nuevo se obtienen una de la anterior mediante la función R o la función T, dependiendo del sentido de los giros.

6.2. Las funciones N y H

Sólo quedan por estudiar las tablas con cuatro unos y con cuatro ceros, que corresponden a:

$\top$	0	1
0	1	1
1	1	1

$\perp$	0	1
0	0	0
1	0	0

Estas tablas no las podemos obtener una de la otra por rotaciones, pero sí al cambiar los 1 por 0 y los 0 por 1, lo que corresponde al primer mecanismo que definimos para obtener nuevas operaciones, esto es $\neg((\neg x) \copyright (\neg y))$, que aquí notaremos H©, es decir:

$$x(\mathrm{H}\copyright)y = \neg((\neg x) \copyright (\neg y));$$

sin embargo, para el caso de la tautología y de la contradicción, este procedimiento equivale a $\neg(x \copyright y)$, al que notaremos aquí con N; esto es $x\,(\mathrm{N}\copyright)y = \neg(x \copyright y)$; con ello vemos que

$$x\,(\mathrm{N}\top)y = \neg(x \bot y) = x \bot y$$

$$x(\mathrm{N}\bot)y = \neg(x \bot y) = x \top y.$$

En otros términos,

$$\mathrm{N}\top = \bot$$

y si reiteramos N notamos que

$$\mathrm{N}(\mathrm{N}\top) = \bot$$

$$\mathrm{N}(\mathrm{N}\bot) = \bot$$

y como en ambos casos por reiteración obtenemos el resultado inicial, tenemos que $\mathrm{N}^2 = \mathrm{NN} = \mathrm{I}$. Con las funciones R, N e I, hemos obtenido 16 operaciones (que son todas las posibles con dos elementos) a partir de la conjunción, la disyunción, la equivalencia y la tabla donde los cuatro valores son 1.

Y como la disyunción podemos obtenerla de la conjunción usando el procedimiento H©, concluimos que con las funciones R, H, N e I, podemos obtener todas las operaciones a partir de la conjunción, la equivalencia y la tautología.

Ahora, aplicando N a la conjunción obtenemos la barra de Sheffer y a ésta, la conjunción, veamos algunos ejemplos[25]

$$\mathrm{N}\wedge = |$$
$$\mathrm{N}| = \wedge$$
$$\mathrm{N} \leftrightarrow = \veebar$$
$$\mathrm{N}\veebar = \leftrightarrow$$

y si aplicando nuevamente N:

$$\mathrm{N}(\mathrm{N}\wedge) = \wedge$$
$$\mathrm{N}(\mathrm{N}|) = |$$
$$\mathrm{N}(\mathrm{N} \leftrightarrow) = \leftrightarrow$$
$$\mathrm{N}(\mathrm{N}\veebar) = \veebar$$

Como era de esperarse, de acuerdo a lo establecido antes.

[25] $\mathrm{N}\wedge = |$, indica que $x(\mathrm{N}\wedge)y = \neg(x \wedge y) = x|y$, de manera similar se deben entender $\mathrm{N}|$, $\mathrm{N} \leftrightarrow$ y $\mathrm{N}\veebar$; esto es fácilmente verificable observando la tercera fila de la tabla 37. Análogamente, en adelante, se debe entender para representaciones equivalentes usadas para otras funciones.

6.3. Las funciones S y C

Surge ahora la inquietud sobre si éstas son las únicas funciones y las únicas operaciones que permiten obtener a todas las demás, o podemos cambiar las funciones o reducir el número de operaciones de inicio. Para resolver el primer punto, cambiemos el punto de vista y agrupemos las tablas comparando sus diagonales; por ejemplo si tienen el mismo elemento en una diagonal y en la otra diferente, como en:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\mid$	0	1
0	1	1
1	1	0

Vemos que la tabla del $\wedge$ y de $\downarrow$ tienen la misma diagonal secundaria y tiene invertidos los valores de la diagonal principal. Estas dos tablas las podemos obtener una a partir de la otra aplicándole la función $(\neg y) \copyright (\neg x)$ que notaremos como $x\,(\mathrm{S}\copyright)y$; así:

$$x\,(\mathrm{S}\wedge)y = x \downarrow y$$

$$x\,(\mathrm{S}\downarrow)y = x \wedge y$$

de nuevo obtenemos que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{I}$ y $\mathrm{IS} = \mathrm{SI} = \mathrm{S}$. Las tablas del $\vee$ y del $\mid$ también se obtienen una de la otra mediante la función S.

Y si comparamos las que tienen la misma diagonal principal y tiene invertidos los valores de la diagonal secundaria, como en:

$-\bullet$	0	1
0	0	0
1	1	0

$\bullet-$	0	1
0	0	1
1	0	0

$\leftarrow$	0	1
0	1	0
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

podemos obtener una a partir de la otra en cada pareja horizontal, aplicándole la función[26] $y \copyright x$ que notaremos como $x\,(\mathrm{C}\copyright)y$, o sea:

$$x\,(\mathrm{C}-\bullet)y = x - \bullet y$$

$$x\,(\mathrm{C}-\bullet)y = x - \bullet y$$

[26] La función C, es nombrada por Oostra, A., (2005) en: *Huellas en los Encuentros de Geometría y Aritmética*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, p.p. 233-268.

y

$$x\,(\mathrm{C} \rightarrow)y = x \leftarrow y$$
$$x\,(\mathrm{C} \leftarrow)y = x \rightarrow y$$

Este resultado nos indica que $\mathrm{C}^2 = \mathrm{I}$ y que también $\mathrm{IC} = \mathrm{CI} = \mathrm{C}$.

Hemos obtenido 7 funciones: I, R, T, N, H, S y C que transforman unas tablas en otras, por lo que nos preguntamos ¿es posible elegir algunas de esas funciones y por composición de ellas obtener todas las demás? Iniciemos haciendo la composición de R con R, que notaremos R^2; esto es:

$$x\,(\mathrm{R}^2 \copyright\,)y = x\,(\mathrm{R}(\mathrm{R} \copyright\,))y = (\neg y)(\mathrm{R} \copyright\,)x = (\neg x) \copyright (\neg y).$$

Con el ánimo de elegir a R como una posible función a partir de la cual podemos obtener las demás funciones, compongamos R con N; así:

$$x(\mathrm{R}(\mathrm{N} \copyright\,))y = (\neg y)(\mathrm{N} \copyright\,)x = \neg(\neg y \copyright x)$$

Notemos que cuando simbolizamos $x\,(\mathrm{R}(\mathrm{N} \copyright\,))\,y$, primero efectuamos R y luego N, a esto lo expresamos RN. Es decir que partiendo de R y N, hemos obtenido dos funciones que antes no teníamos; un cuadro como el siguiente nos puede ayudar para determinar cuáles funciones podemos elegir para hallar las demás:

$\circ$	I	R	T	N	H	S	C
I	I	R	T	N	H	S	C
R	R	$(\neg x) \copyright (\neg y)$	I	$\neg((\neg y) \copyright x)$	$\neg(y \copyright (\neg x))$	$\neg x \copyright y$	$x \copyright (\neg y)$
T	T	I	$(\neg x) \copyright (\neg y)$	$\neg(y \copyright (\neg x))$	$\neg((\neg y) \copyright x)$	$x \copyright (\neg y)$	$(\neg x) \copyright y$
N	N	$\neg((\neg y) \copyright x)$	$\neg((\neg y) \copyright x)$	I	$(\neg x) \copyright (\neg y)$	$\neg((\neg y) \copyright (\neg x))$	$\neg(y \copyright x)$
H	H	$\neg(y \copyright (\neg x))$	$\neg((\neg y) \copyright x)$	$(\neg x) \copyright (\neg y)$	I	$\neg(y \copyright x)$	$\neg((\neg y) \copyright (\neg x))$
S	S	$x \copyright (\neg y)$	$(\neg x) \copyright y$	$\neg((\neg y) \copyright (\neg x))$	$\neg(y \copyright x)$	I	$(\neg x) \copyright (\neg y)$
C	C	$\neg x \copyright y$	$x \copyright (\neg y)$	$\neg(y \copyright x)$	$\neg((\neg y) \copyright (\neg x))$	$(\neg x) \copyright (\neg y)$	I

Tabla 39

En estos resultados hemos encontrado algunas funciones, pero faltan otras, como $\neg(x \copyright (\neg y))$ o $\neg((\neg x) \copyright y)$, por lo que debemos intentar otras combinaciones; por ejemplo, si efectuamos:

$$x\,(\mathrm{N}(\mathrm{C}(\mathrm{R} \copyright\,)))y = \neg(x(\mathrm{C}(\mathrm{R} \copyright\,))y) = \neg(y(\mathrm{R} \copyright\,)x) = \neg((\neg x) \copyright y)$$

llegamos a una función que no aparece en el cuadro. También podemos hacer composición entre funciones ya obtenidas:

$$x\,(\mathrm{S}(\mathrm{T}^2 \copyright\,))y = (\neg y)(\mathrm{T}^2 \copyright\,)(\neg x) = y \copyright x$$

Esto quiere decir que tenemos múltiples posibilidades de combinación; haciendo algunos cálculos como los mencionados aquí, hallamos funciones que, haciendo composición entre ellas, nos permiten obtener las demás; algunos de los resultados encontrados los resumimos en el siguiente cuadro, en la primera columna listamos las 16 funciones posibles, en la parte superior de la tabla las funciones elegidas y al interior, la manera cómo se obtienen las funciones de la primera columna:

	N, R, C	H, S, T	H, N, R, S	H, R, C
$x \copyright y$	N^2	$H^2 = S^2$	$H^2 = S^2 = N^2$	$H^2 = C^2$
$\neg((\neg x) \copyright (\neg y))$	NR^2	H	H	H
$\neg(x \copyright y)$	N	HT^2	HR^2	HR^2
$\neg(x \copyright (\neg y))$	NCR^3	HST	SNR	HCR
$\neg((\neg x) \copyright y)$	NCR	HST^3	SNR^3	HRC
$(\neg x) \copyright (\neg y)$	R^2	T^2	R^2	R^2
$x \copyright (\neg y)$	RC	TS	SR	CR^3
$(\neg x) \copyright y$	CR	ST	RS	CR
$y \copyright x$	C	ST^2	SR^2	C
$\neg((\neg y) \copyright (\neg x))$	NCR^2	HST^2	SN	HC
$\neg(y \copyright x)$	NC	HS	SNR^2	HCR^2
$\neg(y \copyright (\neg x))$	NR^3	HT^3	HR	HR
$\neg((\neg y) \copyright x)$	NR	HT	HR^3	HR^3
$(\neg y) \copyright (\neg x)$	CR^2	S	S	CR^2
$y \copyright (\neg x)$	R^3	T	R^3	R^3
$(\neg y) \copyright x$	R	T^3	R	R

Tabla 40

7. Una aplicación: Z_2 y la lógica

Hemos visto que dentro del estudio de las representaciones de $(Z_2, +)$ como campo aparecen elementos que permiten construir otras operaciones y relaciones entre ellas, estas operaciones las podemos enmarcar dentro de la *lógica proposicional* que estudia las formas correctas del razonamiento matemático. Si interpretamos el 1 como el valor de verdad *verdadero* de una proposición, el 0 como el valor de verdad falso y *la igualdad como equivalencia lógica*, en cada una de las igualdades anteriores obtenemos afirmaciones lógicas que son válidas sin importar el valor de verdad de las proposiciones componentes; estas afirmaciones se llaman *tautologías.* Veamos algunos ejemplos.

7.1. Las leyes de De Morgan

En la tabla 37 encontramos que

$$x \leftrightarrow y = \neg(\neg x \veebar \neg y)$$
$$x \vee q = \neg(\neg x \wedge \neg y)$$
$$\neg(\neg x \leftrightarrow \neg y) = x \veebar y$$
$$\neg(\neg x \vee \neg y) = x \wedge y$$

estas igualdades se convierten en las tautologías:

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg((\neg p) \veebar (\neg q))$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow \neg((\neg p) \wedge (\neg q))$$
$$\neg((\neg p) \leftrightarrow (\neg q)) \leftrightarrow (p \veebar q)$$
$$\neg((\neg p) \vee (\neg q)) \leftrightarrow (p \wedge q)$$

y teniendo en cuenta que

$$(\neg(\neg p)) \leftrightarrow p$$

estas cuatro igualdades las podemos escribir así:

$$((\neg p) \veebar (\neg q)) \leftrightarrow (\neg(p \leftrightarrow q)) \tag{1}$$
$$((\neg p) \wedge (\neg q)) \leftrightarrow (\neg(p \vee q)) \tag{2}$$
$$((\neg p) \leftrightarrow (\neg q)) \leftrightarrow (\neg(p \veebar q)) \tag{3}$$
$$((\neg p) \vee (\neg q)) \leftrightarrow (\neg(p \wedge q)) \tag{4}$$

Con el mismo argumento tenemos otras leyes análogas a las de De Morgan para cada uno de las operaciones lógicas que son isomorfas, es decir las que están relacionados mediante la función H:

$$x(\mathrm{H}\,©\,)y = \neg[(\neg x)\,©\,(\neg y)].$$

Por ejemplo,

$$x(\mathrm{H}\downarrow)y = \neg[(\neg x) \downarrow (\neg y)]$$

nos conduce a la equivalencia

$$(\neg(p|q)) \leftrightarrow ((\neg p) \downarrow (\neg q))$$

y análogamente,

$$(\neg(p \downarrow q)) \leftrightarrow ((\neg p)|(\neg q)).$$

Una de las maneras habituales de demostrar que estas equivalencias lógicas son válidas es usando una tabla de verdad[27], donde se ubican todas las posibles combinaciones de los valores de verdad de las proposiciones componentes y si el resultado total es verdadero en todos los casos para cualquier posible valor de p y q, la proposición compuesta es una tautología. Por ejemplo:

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

Se demuestra con la tabla:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Tabla 41

[27] La idea de este procedimiento aparece en Peirce en 1885 y luego fue perfeccionado por Post y Wittegstein en 1920. (Zalamea, F., *Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de C. S. Peirce a la lógica matemática del siglo XX.* (1993). Mathesis. p.p. 391-404.).

7.2. Las leyes algebraicas [28]

7.2.1. Las propiedades de campo

Dado que $(\{\underline{2}\}, \veebar, \vee)$ es campo, tenemos que en 2, la disyunción exclusiva es asociativa, tiene elemento neutro 0, tiene elemento inverso para cada elemento y es conmutativa; y la conjunción, también es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y distribuye respecto a la disyunción exclusiva. En símbolos, si p, q y r son elementos de $2 = \{0, 1\}$ se tiene que:

1. $p \veebar (q \veebar r) = (p \veebar q) \veebar r$
2. $p \veebar 0 = p$
3. $p \veebar (-p) = 0$
4. $p \veebar q = q \veebar p$
5. $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$
6. $p \wedge q = q \wedge p$
7. $p \wedge 1 = p$
8. $p \wedge (q \veebar r) = (p \wedge q) \veebar (p \wedge r)$

donde el inverso aditivo[29] de p (notado como $-p$) es p, luego: $p \veebar p = 0$.

Nuevamente, en la lógica proposicional, estas igualdades nos reportan tautologías, cambiando la igualdad por la equivalencia lógica:

$$(p \veebar (q \veebar r)) \leftrightarrow ((p \veebar q) \veebar r) \tag{5}$$
$$(p \veebar q) \leftrightarrow (q \veebar p) \tag{6}$$
$$(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r) \tag{7}$$
$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p) \tag{8}$$
$$(p \wedge (q \veebar r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \veebar (p \wedge r)). \tag{9}$$

La equivalencia $(p \veebar (-p)) \leftrightarrow 0$ afirma que $p \veebar (-p)$ es en todos los casos falso, y como $-p = p$, esto significa que

$$\neg(p \veebar p) \tag{10}$$

es una tautología. También se cumple que

$$(p \wedge 1) \leftrightarrow p \tag{11}$$
$$(p \veebar 0) \leftrightarrow p \tag{12}$$

[28] En 1847 George Boole inicia el *álgebra de la lógica*, que se considera inicio de la lógica matemática, como disciplina independiente. Aplicó en la lógica, los métodos de la matemática, basado en el empleo de un lenguaje especial de símbolos y fórmulas.

[29] El inverso aditivo $-p$ de p no coincide con $\neg p$, la negación de p.

De manera análoga, como $(2, \leftrightarrow, \vee)$ es un campo, obtenemos que si p, q y r son elementos de $\underline{2} = \{0,\ 1\}$ entonces:

$$(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \tag{13}$$
$$(p \leftrightarrow 1) \leftrightarrow p \tag{14}$$
$$(p \leftrightarrow (-p)) \leftrightarrow 1 \tag{15}$$
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p) \tag{16}$$
$$(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r) \tag{17}$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p) \tag{18}$$
$$(p \vee 0) \leftrightarrow p \tag{19}$$
$$(p \vee (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)) \tag{20}$$
$$(p \wedge (q \veebar r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \veebar (p \wedge r)) \tag{21}$$
$$(p \vee (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)) \tag{22}$$

Además de que $(\underline{2}, \leftrightarrow, \vee)$ y $(\underline{2}, \veebar, \wedge)$ sean campos, también tienen otras propiedades que en general no se cumplen en otros campos, por ejemplo en los campos numéricos $(\mathrm{Q}, +, \times)$, $(\mathrm{R}, +, \times)$ y $(C, +, \times)$ un ejemplo de ello son las siguientes leyes.

7.2.2. Leyes de idempotencia

En la caracterización de las estructuras por sus propiedades encontramos que la conjunción, la disyunción y las dos proyecciones son las únicas operaciones con dos elementos que son idempotentes, es decir que para todo p en $\{0, 1\}$:

$$(p \wedge p) \leftrightarrow p \tag{23}$$
$$(p \vee p) \leftrightarrow p \tag{24}$$

Las propiedades que hemos presentado son derivadas de la estructura del campo de $\underline{2}$ con sus operaciones respectivas; pero además, entre la disyunción y la conjunción, aparecen otras relaciones, por ejemplo:

7.2.3. Leyes distributivas de $\wedge$ y $\vee$

Para todo p, q, r en $\{0, 1\}$

$$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \tag{25}$$
$$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \tag{26}$$

7.2.4. Leyes absorbentes de $\wedge$ y $\vee$

Para todo p, q, r en $\{0, 1\}$

$$(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p \tag{27}$$
$$(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p \tag{28}$$

7.2.5. Complementos: leyes de contradicción y medio excluso [30]

Si miramos la fila 7 de la tabla 37 en su columna 1 dice que $(x \wedge \neg y) = x - \bullet y$ de donde $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p - \bullet q)$. Si elegimos $p = q$ y observamos la tabla de $-\bullet$, tenemos que $p - \bullet p = 0$ y por lo tanto

$$\neg(p - \bullet p) = 1$$

Lo que significa que

$$\neg(p \wedge \neg p) \tag{29}$$

Es una tautología[31].

Si aplicamos una de las leyes de De Morgan a este resultado, obtenemos que *el principio del medio excluso:*

$$p \vee \neg p \tag{30}$$

es también una tautología.

Además, cada elemento tiene un único *complemento*, en el sentido de que para cada p en $\underline{2}$:

$$p \vee \neg p = 1 \tag{31}$$

$$p \wedge \neg p = 0 \tag{32}$$

El conjunto $\{0, 1\}$ con las operaciones $\vee$, $\wedge$, tienen una estructura conocida como *álgebra de Boole*[32].

7.3. Las leyes lógicas

En el álgebra de los conjuntos numéricos habituales la igualdad juega un papel preponderante pues las ecuaciones forman parte importante de su trabajo, en lógica este papel lo asume la implicación, en ella se estudian las consecuencias lógicas de las afirmaciones hechas, y esto en general se expresa en términos de implicaciones, por ello estudiaremos inicialmente algunas relaciones de la implicación con otras operaciones lógicas.

7.3.1. La implicación

La operación $x \to y = \neg(x \wedge (\neg y))$ podemos escribirla como sigue, de acuerdo con la tabla 37:

$$\begin{aligned} x \to y &= \neg x \vee y \\ &= \neg(x - \bullet y) \\ &= \neg(y \bullet - x) \\ &= (\neg x) \leftarrow (\neg y)) \\ &= x|(\neg y) \\ &= y \leftarrow x \\ &= \neg(y \downarrow (\neg x)) \end{aligned}$$

[30]Zehna, P. & Johnson, R. (1972). *Elements of set theory*. Boston: Allyn and Bacon. p.13.

[31]Algunas veces se menciona esta tautología como el *principio de contradicción*.

[32]Braunss, G. & Zubrod, J. (1974). *Einfürung in die booleschen algebren.* Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft. P.19.

o en términos de ella misma[33] como

$$x \to y = (\neg y) \to (\neg x)$$

corresponde en la lógica bivalente usual a la *implicación* y es la que utilizamos para efectuar razonamientos lógicos válidos; su tabla:

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

muestra que aunque no hay un elemento idéntico, sí hay un elemento, el 1, que actúa como un elemento idéntico a derecha, es decir que $x \to 1 = x$, además no es conmutativa ni asociativa, pues $(0 \to 1) \to 0 \neq 0 \to (1 \to 0)$

Aunque pareciera que la implicación no cumple propiedad algebraica alguna, ya mencionamos que es unipotente, o sea que para todo x, y en $\{0, 1\}$ se cumple que $x \to x = y \to y$, también cumple que es permutable a izquierda:

$$x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$$

y auto distributiva a izquierda[34], esto es

$$x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z).$$

Como en los casos anteriores, cada igualdad nos reporta una tautología sustituyendo la igualdad por la equivalencia lógica, por ejemplo:

$$(p \to q) \leftrightarrow ((\neg p) \vee q) \tag{33}$$
$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg(p \wedge (\neg q))) \tag{34}$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \to q) \tag{35}$$
$$(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg(p \to (\neg q))) \tag{36}$$
$$(p \to q) \leftrightarrow ((\neg q) \to (\neg p)) \tag{37}$$
$$[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)] \tag{38}$$

donde p y q representan los valores de verdad de dos proposiciones cualesquiera.

7.3.2. Negación de la implicación

La equivalencia (34) también puede escribirse como

$$\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge (\neg q)) \tag{39}$$

[33] La tautología: $(p \to q) \leftrightarrow ((\neg q) \to (\neg p))$ es conocida como *ley de contrapositiva*. Y en la forma parcial $((\neg q) \to (\neg p)) \to (p \to q)$ es un axioma de la lógica proposicional.

[34] La tautología correspondiente a esta propiedad cuando se considera una sola implicación $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$ es tomada como uno de los axiomas de la lógica proposicional. (Caicedo, X., (1990). *Elementos de lógica y calculabilidad*. Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes. p. 38).

7.3.3. Combinación de la implicación con otras

Para encontrar algunas relaciones entre la implicación y otras operaciones iniciemos con las propiedades ya anotadas:

$$(p \to 1) \leftrightarrow p$$

$$(p \to p) \leftrightarrow 1$$

y usemos la equivalencia (33) para calcular

$$\begin{aligned}(p \to 0) &\leftrightarrow (\neg p \vee 0)\\ &\leftrightarrow (\neg p)\end{aligned}$$

lo que significa que tenemos otra propiedad conocida:

1.7.3.3.1. Ley del absurdo

$$(p \to 0) \to \neg p \tag{40}$$

o sea que si una proposición p implica una proposición falsa, y el valor de la implicación es verdadero, entonces podemos concluir $\neg p$, este resultado es muy usado para hacer demostraciones de teoremas en matemáticas.

1.7.3.3.2. Con la conjunción

Ensayemos ahora varias formas de combinar la implicación con la conjunción, por ejemplo

$$(p \wedge (p \to q))$$

y usemos la equivalencia (33) para transformar la expresión,

$$\begin{aligned}(p \wedge (p \to q)) &\leftrightarrow (p \wedge (\neg p \vee q)) && \text{Por la equivalencia (33)}\\ &\leftrightarrow ((p \wedge (\neg p)) \vee (p \wedge q)) && \text{Por la equivalencia (25)}\\ &\leftrightarrow (0 \vee (p \wedge q)) && \text{Por la equivalencia (32)}\\ &\leftrightarrow (p \wedge q) && \text{Por la equivalencia (19)}\end{aligned}$$

es decir,

$$(p \wedge (p \to q)) \leftrightarrow (p \wedge q) \tag{41}$$

O podemos intercambiar la implicación y la conjunción en la fórmula anterior:

$$\begin{aligned}(p \to (p \wedge q)) &\leftrightarrow (\neg p \vee (p \wedge q)) && \text{Por la equivalencia (33)}\\ &\leftrightarrow ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \wedge q)) && \text{Por la equivalencia (26)}\\ &\leftrightarrow (1 \wedge (p \wedge q)) && \text{Por la equivalencia (31)}\\ &\leftrightarrow (p \wedge q) && \text{Por la equivalencia (11)}\end{aligned}$$

Lo que significa que

$$(p \to (p \wedge q)) \leftrightarrow (p \wedge q) \tag{42}$$

O escribiendo la pareja del paréntesis al comienzo

$$\begin{aligned}((p \wedge q) \rightarrow p) &\leftrightarrow (\neg(p \wedge q) \vee p)\\ &\leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \vee p)\\ &\leftrightarrow ((\neg p \vee p) \vee \neg q)\\ &\leftrightarrow (1 \vee \neg q)\\ &\leftrightarrow 1\end{aligned}$$

lo que significa que

$$((p \wedge q) \rightarrow p) \tag{43}$$

es una tautología[35].

O con combinaciones más sofisticadas obtener

1.7.3.3.3. La ley del Modus ponendo ponens

Esta ley es fundamental en todos los razonamientos científicos, afirma que si suponemos verdadera una proposición p y $p \rightarrow q$ es verdadera, entonces q debe ser verdadera,

$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q \tag{44}$$

que podemos calcular partiendo de

$$\begin{aligned}([p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q) &\leftrightarrow (\neg[p \wedge (p \rightarrow q)] \vee q)\\ &\leftrightarrow ([\neg p \vee \neg(p \rightarrow q)] \vee q)\\ &\leftrightarrow ([\neg p \vee (p \wedge \neg q)] \vee q)\\ &\leftrightarrow ([(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q)\\ &\leftrightarrow ([1 \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q)\\ &\leftrightarrow ([(\neg p \vee \neg q)] \vee q)\\ &\leftrightarrow \neg p \vee [(\neg q) \vee q)]\\ &\leftrightarrow \neg p \vee 1\\ &\leftrightarrow 1\end{aligned}$$

O una variación de ella como

1.7.3.3.4. La ley del Modus tollens

$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p \tag{45}$$

7.3.3.5. Con la disyunción

Combinando la implicación con la disyunción obtenemos

$$\begin{aligned}(p \rightarrow (p \vee q)) &\leftrightarrow (\neg p \vee (p \vee q))\\ &\leftrightarrow ((\neg p \vee p) \vee q)\\ &\leftrightarrow (1 \vee q)\\ &\leftrightarrow 1\end{aligned}$$

[35] Esta tautología junto con $((p \wedge q) \rightarrow q))$ son conocidas como *leyes de eliminación* y forman parte de los axiomas de la lógica proposicional.

lo que significa que

$$(p \rightarrow (p \vee q)) \tag{46}$$

es una tautología[36].

7.3.3.6. Con la flecha de Peirce

$$\begin{aligned}
(p \rightarrow (p \downarrow q)) &\leftrightarrow (\neg p \vee (p \downarrow q)) \\
&\leftrightarrow (\neg p \vee \neg(p \vee q)) \\
&\leftrightarrow \neg((p \wedge (p \vee q)) \\
&\leftrightarrow \neg((p \wedge p) \vee (p \wedge q)) \\
&\leftrightarrow \neg((p \vee (p \wedge q)) \\
&\leftrightarrow (\neg p \wedge (p|q)).
\end{aligned}$$

O sea que

$$(p \rightarrow (p \downarrow q)) \leftrightarrow (\neg p \wedge (p|q)) \tag{47}$$

Si en el penúltimo renglón aplicamos la propiedad absorbente obtenemos

$$(p \rightarrow (p \downarrow q)) \leftrightarrow (\neg p) \tag{48}$$

7.3.3.7. Con la implicación

Combinando la implicación con ella misma

$$(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \tag{49}$$

O en la forma

$$\begin{aligned}
(p \rightarrow (q \rightarrow p)) &\leftrightarrow (\neg p \vee (q \rightarrow p)) \\
&\leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q \vee p)) \\
&\leftrightarrow ((\neg p \vee p) \vee \neg q) \\
&\leftrightarrow (1 \vee \neg q) \\
&\leftrightarrow 1
\end{aligned}$$

lo que significa que

$$(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \tag{50}$$

es una tautología[37].

[36]Esta tautología junto con $(q \rightarrow (p \vee q?)$ son conocidas como *leyes de agregación* y forman parte de los axiomas de la lógica proposicional. Esta regla se deriva naturalmente de la tabla de verdad de la disyunción, pues si tenemos una proposición p cierta, entonces la proposición resultante de adicionarle otra proposición q a p con la disyunción también es verdadera, y si p es falsa, la implicación es verdadera; es decir que $p \rightarrow (p \vee q)$ es verdadera, independiente del valor de verdad de p y de q.

[37]Esta tautología también forma parte de los axiomas de la lógica proposicional.

7.3.3.8. Con otras operaciones

Aunque es menos frecuente, también podemos combinar la implicación con otras operaciones lógicas como

$$
\begin{aligned}
(p \to (p|q)) &\leftrightarrow (p|q) && (51)\\
(p \to (q \leftrightarrow p)) &\leftrightarrow (p \to q) && (52)\\
(p \to (q \veebar p)) &\leftrightarrow (p|q) && (53)\\
(p \to (p \bullet -q)) &\leftrightarrow (\neg p \wedge (p \to q)) && (54)\\
(p \to (p\, \pi_1\, q)) &\leftrightarrow 1 && (55)\\
(p \to (p\, \pi\, _2 q)) &\leftrightarrow (p \to q) && (56)
\end{aligned}
$$

O poniendo las parejas entre paréntesis al comienzo,

$$
\begin{aligned}
((p|q) \to p) &\leftrightarrow p && (57)\\
((p \vee q) \to p) &\leftrightarrow (q \to p) && (58)\\
((p \downarrow q) \to p) &\leftrightarrow (p \vee q) && (59)\\
(p \leftrightarrow q) \to p) &\leftrightarrow (p \wedge q) && (60)\\
((p \to q) \to p) &\leftrightarrow (p \wedge (q \to p)) && (61)\\
((q \to p) \to p) &\leftrightarrow (q \to p) && (62)
\end{aligned}
$$

Como vemos han aparecido relaciones que antes no habíamos establecido, en la Tabla 37 las operaciones aparecen por grupos de cuatro o de dos, pero no se mezclaban por ejemplo la implicación con las proyecciones.

Una relación muy importante es la que vincula la implicación con la igualdad lógica (equivalencia) la obtenemos de combinar la conjunción con la implicación en la forma

$$
\begin{aligned}
((q \to p) \to p) &\leftrightarrow (q \to p)\\
((p \to q) \wedge (q \to p)) &\leftrightarrow (p \leftrightarrow q) && (63)
\end{aligned}
$$

y de la disyunción con la implicación obtenemos $((p \to q) \vee (q \to p)) \leftrightarrow (p \top q)$ lo que significa que

$$(p \to q) \vee (q \to p) \qquad (64)$$

es una tautología.

La relación entre la equivalencia y la implicación sugiere considerar expresiones como

$$((p \wedge q) \to (q \wedge p)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to (p \wedge q)) \leftrightarrow 1$$

e intercambiando p y q, conseguimos la propiedad conmutativa de la conjunción.

De manera similar la propiedad conmutativa de la flecha

$$
\begin{aligned}
((p \downarrow q) \to (q \downarrow p)) &\leftrightarrow ((p \downarrow q) \to (p \downarrow q))\\
&\leftrightarrow (\neg(p \downarrow q) \vee (p \downarrow q))\\
&\leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

Esto significa que

$$((p \downarrow q) \to (q \downarrow p)) \tag{65}$$

es una tautología.

Y también para la barra

$$\begin{aligned}((p|q) \to (q|p)) &\leftrightarrow ((p|q) \to (p|q))\\ &\leftrightarrow (\neg(p|q) \vee (p|q))\\ &\leftrightarrow 1\end{aligned}$$

En cada caso hemos reducido una equivalencia a una implicación, expresando propiedades como la conmutativa en términos de implicaciones.

Si ensayamos con operaciones no conmutativas, con la misma implicación obtenemos

$$\begin{aligned}((p \to q) \to (q \to p)) &\leftrightarrow (\neg(p \to q) \vee (q \to p))\\ &\leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee p))\\ &\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg q)] \vee p)\\ &\leftrightarrow [(p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg q)] \vee p)\\ &\leftrightarrow [(p \vee \neg q) \wedge (\neg q)] \vee p)\\ &\leftrightarrow (\neg q) \vee p)\\ &\leftrightarrow (q \to p)\end{aligned}$$

O incluyendo una tercera variable

$$[(p \to q) \wedge (p \to r)] \leftrightarrow [p \to (q \wedge r)] \tag{66}$$

y de manera similar otras leyes lógicas como las leyes de transitividad, en particular,

7.3.3.9. Transitividad de la equivalencia lógica

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \to (p \leftrightarrow r) \tag{67}$$

7.3.3.10. Transitividad de la implicación

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r) \tag{68}$$

En una implicación podemos operar en ambos lados con la conjunción o con la disyunción y obtenemos una implicación en el mismo sentido, esto es:

$$(p \to q) \to [(p \vee r) \to (q \vee r)] \tag{69}$$

$$(p \to q) \to [(p \wedge r) \to (q \wedge r)] \tag{70}$$

7.3.3.12. Dilemas constructivos

También podemos partir de dos implicaciones y obtener una nueva implicación con la disyunción (o la conjunción) de los antecedentes como antecedente y la disyunción (o la conjunción) de los consecuentes como consecuente,

$$[(p \to q) \wedge (r \to s)] \to [(p \vee r) \to (q \vee s)] \tag{71}$$

$$[(p \to q) \wedge (r \to s)] \to [(p \wedge r) \to (q \wedge s)] \tag{72}$$

7.3.4. Otras combinaciones lógicas

Hasta aquí hemos encontrado relaciones entre la implicación y otras operaciones lógicas, estudiemos ahora relaciones entre las demás, para simplificar de nuevo hagamos combinaciones de la conjunción con las otras tales como

$$(p \wedge (q \copyright p))$$

donde © representa alguna de las 16 operaciones con dos elementos. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 1.(p \wedge (q \wedge p)) &\leftrightarrow (p \wedge (p \wedge q)) \\ &\leftrightarrow ((p \wedge p) \wedge q) \\ &\leftrightarrow (p \wedge q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.(p \wedge (q \vee p)) &\leftrightarrow (p \wedge (p \vee q) \\ &\leftrightarrow ((p \wedge p) \vee (p \wedge q)) \\ &\leftrightarrow (p \vee (p \wedge q)) \\ &\leftrightarrow p \\ &\leftrightarrow (p\, \pi_1\, q). \end{aligned}$$

Esta es una de las leyes de absorción que mencionamos antes y una relación entre la conjunción, la disyunción y una proyección.

$$\begin{aligned} 3.(p \wedge (p \downarrow q)) &\leftrightarrow (p \wedge \neg(p \vee q)) \\ &\leftrightarrow (p \wedge (\neg p \wedge \neg q)) \\ &\leftrightarrow ((p \wedge (\neg p)) \wedge \neg q) \\ &\leftrightarrow (0 \wedge \neg q) \\ &\leftrightarrow 0 \\ &\leftrightarrow (p \bot q) \end{aligned}$$

Esto significa que $(p \wedge (p \downarrow q))$ es falso para todos los valores de p y de q y por lo tanto

$$\neg(p \wedge (p \downarrow q)) \tag{73}$$

es una tautología.

$$
\begin{aligned}
4.(p \wedge (p|q)) &\leftrightarrow (p \wedge \neg(p \wedge q)) \\
&\leftrightarrow (p \wedge (\neg p \vee \neg q)) \\
&\leftrightarrow ((p \wedge (\neg p)) \vee (p \wedge \neg q) \\
&\leftrightarrow (0 \vee (p \wedge \neg q)) \\
&\leftrightarrow (p \wedge \neg q) \\
&\leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)
\end{aligned}
$$

Otra forma simple de combinar incluyendo sólo dos elementos es considerar las dos alternativas en el orden de los elementos que se toman para operar; si iniciamos combinando la conjunción con las operaciones conmutativas, $\wedge$, $\vee$, $\downarrow$, ?, $\leftrightarrow$, $\veebar$, obtendremos las mismas operaciones pues $((p©q) \wedge (q©p)) \leftrightarrow ((p©q) \wedge (p©q))$ Y como la conjunción es idempotente $((p©q) \wedge (p©q)) \leftrightarrow (p©q)$

Si combinamos la conjunción con las operaciones conmutativas tendremos los mismos resultados. Ensayemos entonces a combinar una operación conmutativa pero no idempotente como el funtor de Peirce o la barra de Sheffer con las otras operaciones conmutativas:

$$((p©q) \downarrow (q©p)) \leftrightarrow ((p©q) \downarrow (p©q)) \leftrightarrow \neg(p©q)$$

En el caso particular de la conjunción obtenemos la barra

$$
\begin{aligned}
5.((p \wedge q) \downarrow (q \wedge p)) &\leftrightarrow ((p \wedge q) \downarrow (p \wedge q)) \\
&\leftrightarrow \neg(p \wedge q) \\
&\leftrightarrow p|q
\end{aligned}
$$

con la barra obtenemos la conjunción

$$
\begin{aligned}
6.((p|q) \downarrow (q|p)) &\leftrightarrow ((p|q) \downarrow (p?q)) \\
&\leftrightarrow \neg(p|q) \\
&\leftrightarrow p \wedge q
\end{aligned}
$$

Con la disyunción obtenemos el funtor

$$
\begin{aligned}
7.((p \vee q) \downarrow (q \vee p)) &\leftrightarrow ((p \vee q) \downarrow (p \vee q)) \\
&\leftrightarrow \neg(p \vee q) \\
&\leftrightarrow p \downarrow q
\end{aligned}
$$

y con el funtor obtenemos la disyunción

$$
\begin{aligned}
8.((p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow p)) &\leftrightarrow ((p \downarrow q) \downarrow \\
&\leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \\
&\leftrightarrow p \vee q
\end{aligned}
$$

Con la equivalencia conseguimos la disyunción exclusiva y viceversa, obteniendo en todos los casos relaciones ente operaciones que ya estaban relacionadas en la Tabla 37.

Si combinamos la conjunción con la operación $\bullet-$ obtenemos la operación $\bot$:

$$\begin{aligned}
9.((p \bullet -q) \wedge (q \bullet -p)) &\leftrightarrow (\neg(p \leftarrow q) \wedge \neg(q \leftarrow p)) \\
&\leftrightarrow (\neg(q \rightarrow p) \wedge \neg(p \rightarrow q)) \\
&\leftrightarrow \neg((q \rightarrow p) \vee (p \rightarrow q)) \\
&\leftrightarrow \neg(p \top q) \\
&\leftrightarrow (p \bot q)
\end{aligned}$$

El mismo resultado lo conseguimos con la operación $-\bullet$, es decir:

$$\begin{aligned}
10.((p - \bullet q) \wedge (q - \bullet p)) &\leftrightarrow (\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)) \\
&\leftrightarrow \neg((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)) \\
&\leftrightarrow \neg(p \top q) \\
&\leftrightarrow (p \bot q)
\end{aligned}$$

análogamente,

$$\begin{aligned}
&11.((p\, \pi_1\, q) \wedge (q\, \pi_1\, p)) \leftrightarrow (p \wedge q) \\
&12.((p\, \pi_2\, q) \wedge (q\, \pi_2\, p)) \leftrightarrow (q \wedge p) \\
&13.((p * q) \wedge (q * p)) \leftrightarrow (p \downarrow q) \\
&14.((p \otimes q) \wedge (q \otimes p)) \leftrightarrow (q \downarrow p)
\end{aligned}$$

Con la disyunción

$$\begin{aligned}
15.((p \bullet -q) \vee (q \bullet -p)) &\leftrightarrow (\neg(p \leftarrow q) \vee \neg(q \leftarrow p)) \\
&\leftrightarrow (\neg(q \rightarrow p) \vee \neg(p \rightarrow q)) \\
&\leftrightarrow \neg((q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)) \\
&\leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q) \\
&\leftrightarrow (p \veebar q)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
16.((p - \bullet q) \vee (q - \bullet p)) &\leftrightarrow (\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow p)) \\
&\leftrightarrow \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \\
&\leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q) \\
&\leftrightarrow (p \veebar q)
\end{aligned}$$

De forma similar

$$\begin{aligned}
&16.(p\, \pi_1\, q) \vee (q\, \pi_1\, p)) \leftrightarrow (p \vee q) \\
&17.((p\, \pi_2\, q) \vee (q\, \pi_2\, p)) \leftrightarrow (q \vee p) \\
&18.((p * q) \vee (q * p)) \leftrightarrow (p|q) \\
&19.((p \otimes q) \vee (q \otimes p)) \leftrightarrow (q|p)
\end{aligned}$$

7.4. Contralógica

Como hemos visto a lo largo de las de lo que hemos hecho, nada hemos ganamos, desde el punto de vista algebraico, cambiando en la estructura de $(Z_2, ?)$ o? $(Z_2, \times)$ el nombre 1 por a, o por -1, o por una matriz, o por cualquier otro nombre, tampoco intercambiando el nombre de los elementos 0 y 1, pero aquí surgen preguntas de tipo filosófico, en relación con las caras de $(Z_2, +, \times)$ y la lógica clásica, si el 1 representa *lo verdadero* y el 0 *lo falso*, ¿es posible construir una lógica alternativa donde lo verdadero lo cambiemos por lo falso y lo falso por lo verdadero? ¿Son la verdad y la falsedad relativas? ¿Tiene sentido la verdad en matemáticas? ¿Existe una única verdad? ¿Una proposición es verdadera? ¿Qué sucedería, si repentinamente cambiáramos los valores de verdad de todas las proposiciones y lo que es verdadero lo volviéramos falso y a todo lo falso lo hiciéramos verdadero? ¿Cambiaría la lógica? ¿Sería posible seguir razonando como lo hacemos? ¿Cuales serían las leyes de la nueva lógica? ¡Intentémoslo! ¡Construyamos una contralógica!

7.4.1. La negación de la equivalencia y la disyunción

Para construir la lógica de lo contrario podemos aplicar la función H

$$x(\mathrm{H}©)y = \neg((\neg x)©(\neg y))$$

o la función N

$$x(\mathrm{N}©)y = \neg(x©y)$$

Usaremos la primera opción y dejamos la otra como ejercicio.

Debemos construir una negación (vía la función H) para cada una de las operaciones de la lógica usual, como ya sabemos

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(\veebar) &= \leftrightarrow \\ \mathrm{H}(\leftrightarrow) &= \veebar \\ \mathrm{H}(\vee) &= \wedge \\ \mathrm{H}(\wedge) &= \vee \end{aligned}$$

Si seguimos así, podríamos inferir que las operaciones de la contralógica son las mismas de la lógica usual, pero con otro nombre. *¡Y tendríamos una explicación, de por qué el mundo está así!*

7.4.2. La negación de la implicación: la contraimplicación

La contraimplicación es la imagen por H de la implicación que en nuestra notación es la operación

$\bullet-$	0	1
0	0	1
1	0	0

Aunque esta operación no es muy popular en la lógica clásica, ya sabemos que cumple las mismas propiedades algebraicas que la implicación, en particular es permutable a izquierda y auto distributiva a izquierda, esto es:

$$p \bullet -(q \bullet -r) = q \bullet -(p \bullet -r)$$

y

$$p \bullet\!- (q \bullet\!- r) = (p \bullet\!- q) \bullet\!- (p \bullet\!- r)$$

donde p, q y r son los valores de verdad de proposiciones cualesquiera.

Además, por la definición de H está relacionada con la implicación de la forma

$$(\neg p) \bullet\!- (\neg q) = \neg(p \to q)$$

o sea que

$$p \bullet\!- q = (\neg p) \wedge q.$$

Transformemos ahora cada tautología de la lógica usual, cambiando en ella cada proposición y cada operación por su negación; obviamente si todo funciona como hasta ahora no obtendremos nada nuevo, sólo hallaremos, en lugar de una tautología, una contradicción, veamos un ejemplo, en el caso del *modus ponens* clásico $(p \wedge (p \to q)) \to q$, si escribimos $\neg p$ en lugar de p, $\bullet\!-$ en lugar de $\to$, $\wedge$ en lugar de $\vee$, obtenemos

$$(\neg p \vee (\neg p \bullet\!- \neg q)) \bullet\!- \neg q$$

que debe se válida para todo p, en particular para $\neg p$ y $\neg q$, es decir

$$(\neg\neg p \vee (\neg\neg p \bullet\!- \neg\neg q)) \bullet\!- \neg\neg q$$

o sea

$$(p \vee (p \bullet\!- q)) \bullet\!- q$$

que es la contradicción buscada. De manera similar, obtenemos igualdades como $p \vee q = (p \bullet\!- q) \vee (q \bullet\!- p)$, copia de $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Bibliografía

[1] Albert, A., (1943). *Quasigroups I*, Trans. Amer. Math. Soc. 54.

[2] Alfonso, H., (1997). *Geometría plana y del espacio desde un punto de vista euclidiano.* Bogotá, D. C.: Universidad Pedagógica Nacional.

[3] Birkhoff, G & Bartee, T., (1970). *Modern applied algebra.* New York: McGraw Hill.

[4] Braunss, G. & Zubrod, J., (1974). *Einfürung in die booleschen algebren.* Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft.

[5] Breuer J. (1972). *Iniciación a la Teoría de Conjuntos.* Madrid: Editorial Paraninfo.

[6] Dubreil, P., (1965). *Lecciones de álgebra moderana.* México: Editorial Reverte S. A.

[7] Fraleigh, J., (1999). *A first course in abstract Algebra.* Sixth Edition. New York: Addison-Wesley.

[8] Griffiths, D; (1994) *Introduction to Quantum Mechanic.* New Yersey: Prentice Hall.

[9] Herstein, I., (1970). *Álgebra moderna.* México: Editorial F. Trillas.

[10] Ilse, D., Lehmann, I. & Schulz, W., (1984). *Gruppoide und funktionalgleichungen.* Berlín: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[11] Kline, M., (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Vol. I. Madrid: Alianza.

[12] Lentin, A. & Rivaud, J., (1971). *Álgebra Moderna.* Madrid: Aguilar.

[13] Mostow, G., Sampson, J. & Meyer, J. P., (1963). *Fundamental Structures of Algebra.* New York: McGraw Hill.

[14] Muñoz, J., (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos,* cuarta edición, Bogotá: Facultad de ciencias Universidad Nacional de Colombia.

[15] Newman, J., (1997). *Sigma el Mundo de las Matemáticas*, Barelona: Grijalbo. Vol 5.

[16] Schröder, E., (1873). *Lehrbuch der arithmetik und algebra fuer lehrer und studierende,* Band 1, Leipzig: Teubner.

[17] Stein, S., (1957). *On the foundations of quasigroups,* Trans. Amer. Math. Soc. 85.

[18] Zehna, P. & Johnson, R., (1972). *Elements of set theory.* Boston: Allyn and Bacon.