De la serie aritmética a los irracionales un enfoque heurístico teorema de Lida

Fernando Valdés Macías
Profesor Universidad Tecnológica de Pereira
Pereira, Colombia
fernandov@utp.edu.co

Resumen

En el presente trabajo se expone un manera novedosa para generar números irracionales a partir del concepto de cortadura relativo a una serie aritmética natural e infinita. Se enuncia un teorema respectivo.
Palabras claves: Series, Irracionales, infinito, cortadura.

1. Introducción

Es muy común encontrar en los textos de matemáticas ciertas aproximaciones para números especiales tales como el número π, este número se aproxima con $\frac{22}{7}$, aproximación, como todos sabemos, es muy pobre pero está bien para las aplicaciones técnicas o prácticas. Ahora supongamos que estamos interesados es aproximar $\sqrt{2}$ utilizando dos números enteros, tal fracción podría ser $\frac{707}{500}$. Realmente no es muy difícil hallar un fracción que nos dé una aproximación ya sea por tanteo o por otro método pero es necesario conocer de antemano el valor de $\sqrt{2}$ y así proceder hasta encontrar un racional representativo. Ahora haremos algo más interesante como buscar un racional que se aproxime a $\sqrt{2}$ pero con la condición de no utilizar el valor conocido del irracional en mención. Tal búsqueda se puede realizar con una serie aritmética y ciertas condiciones.

2. Aproximación a un irracional

Supongamos que tenemos una serie aritmética natural, es decir con los números naturales, $1+2+3+\cdots+n$, por el momento finita, y buscaremos dentro de élla un número que me divida la serie en dos series con la condición que la primera serie o la suma de los términos de la parte izquierda sea igual a la suma de los términos de la parte derecha, tal número que las separa lo llamaremos número de cortadura. Veamos la siguiente Tabla o Cuadro 1.

2.1. Tabla Ilustrativa

En la siguiente tabla presentamos paso a paso cómo separamos la serie en dos grupos de números de tal manera que la suma en cada uno de los grupos de números es igual, en la tercera columna se presenta la relación del ultimo número con el número del corte; su valor numérico se presenta y se observa cómo esta fracción se va aproximando al valor de $\sqrt{2}$.

3. Demostración

$$1+2+3+\cdots+q=S_1 \qquad (q+1)+(q+2)+\cdots+n=S_2 \tag{1}$$

Cuadro 1. Serie Aritmética y Cortadura

Serie Finita	Punto de Corte	Relación (n/q)
$1+2+3$	2	$3/2 = 1{,}5000$
$1+2+\cdots+19+20$	14	20/14=1,4285
$1+2+\cdots+118+119$	84	119/84=1,4166
$1+2+\cdots+695+696$	492	696/492=1,41463
$1+2+\cdots+4058+4059$	2870	4059/2870=1,414285
$1+2+\cdots+23659+23660$	16730	23660/16730=1,414225
$1+2+\cdots+137902+137903$	97512	137903/97512=1,4142156
$1+2+\cdots+803759+803760$	568344	803760/568344=1,41421392

$$
\begin{aligned}
S_1 &= S_2 \\
\frac{q(q+1)}{2} &= \frac{\{n-(q+1)+1\}\{(q+1)+n\}}{2} \\
n^2+n-(2q^2+2q) &= 0 \\
n &= \frac{-1+\sqrt{1+8(q+q^2)}}{2} \\
\frac{n}{q} = \frac{-1+\sqrt{1+8(q+q^2)}}{2q} &= -\frac{1}{2q}+\frac{\sqrt{\frac{1}{q^2}+8(\frac{1}{q}+1)}}{2}
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{q}\right) = \sqrt{2} \tag{3}
$$

3.1. Teorema

Teorema 1. *Sea la serie aritmética natural* $1+2+3+\cdots+q+\cdots+n$ *tal que la suma de 1 hasta* q *es igual a la suma de* $q+1$ *hasta* n*, entonces* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{q}\right)$ *es un irracional.*

3.2. Discusión

Se observa en el anterior análisis que se ha utilizado un serie de números que son enteros positivos y que de manera progresiva escogemos dos números, dada una condición, cuya razón va realizando convergencia hacia un número irracional. Veamos la siguiente figura en donde se hace una analogía:

En la figura 1 se observa el punto de corte para una serie aritmética finita; es interesante concluir que si llevamos este modelo a un aumento muy grande, este corte lo podemos relacionar con una cortadura. El modelo de la figura 1 se extiende hasta el infinito, es una figura discreta o un objeto compuesto por bloques iguales (unidades) de un valor finito; pero surge la siguiente idea para lograr este mismo efecto con una figura finita pero de características continuas como la figura 2.

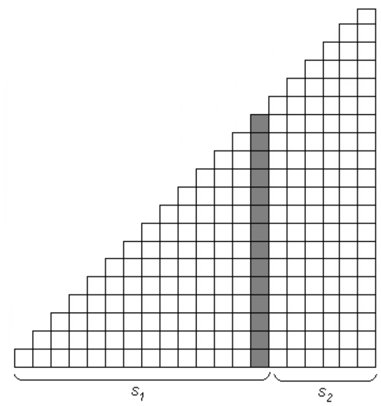

Figura 1. Bloques formando una escalera

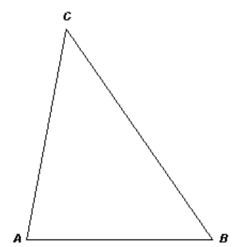

Figura 2. Figura de líneas continuas

3.3. Figuras Continuas

En la figura 3 se presenta un triángulo dividido en dos partes por una secante b_1, la parte inferior es un trapecio. Ahora consideraremos que el área de la parte superior sea igual al área del la parte inferior, el área del triángulo menor tiene altura igual a h_1, y la altura del trapecio es h_2, tenemos por lo tanto las siguientes ecuaciones:

$$\frac{b_1 h_1}{2} = \frac{h_2(b_1 + b_2)}{2} \quad \text{que podemos llevar a} \quad \frac{h_1}{h_2} = 1 + \frac{b_2}{b_1}$$

Ahora utilizando la semejanza de triángulos, tenemos las ecuaciones siguientes:

$$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_1 + h_2}{b_2} \quad \text{que nos llevará a} \quad \frac{b_2}{b_1} = 1 + \frac{h_2}{h_1}$$

De las ecuaciones anteriores se concluye que $\frac{h_1}{h_2} = 1 + 1 + \frac{h_2}{h_1}$ entonces $\frac{h_1}{h_2} - \frac{h_2}{h_1} = 2$ de estas ecuaciones se llegará a $\frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 h_2} = 2$ que al simplificar quedará $\frac{h_1 - h_2}{h_2} = \sqrt{2}$ o sea que podemos escribir las dos últimas ecuaciones para observar la analogía:

$$\frac{h_1}{h_2} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \frac{h_1}{h_2} = 1 + \frac{b_2}{b_1}$$

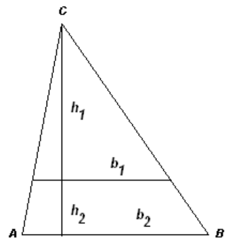

Figura 3. Triángulo y Trapecio

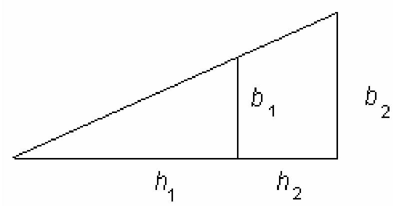

Figura 4. Modelo de la Suma continua

Con esto concluimos que:
$$\frac{b_2}{b_1} = \sqrt{2} \tag{4}$$

La relación 4 nos muestra el mismo resultado que habíamos obtenido en la expresión 3; pero de b_1 y b_2 por lo menos una de ellas es un irracional. Esta analogía nos conecta con el alcance que tiene el concepto de infinito.

3.4. Generalización

Si realizamos el corte en la serie aritmética pero modificamos el criterio así: $S_1 = kS_2$ con $k \in \mathbb{N}$; con este criterio se llega a:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{q}\right) = \sqrt{\frac{1+k}{k}}$$
Con este resultado nos ubicamos en cualquier parte de la serie para obtener la raíz que deseemos.

3.5. Nota Final

El teorema anterior se ha denominado *Teorema de LIDA* por la sencilla razón que fue encontrado en una charla en un café en donde se reunían un grupo de personas a discutir temas de álgebra y geometría; el nombre del café era LIDA y existió en la Ciudad de Honda, Tolima.

Bibliografía

[1] Chabert, Jean-Luc. A History of Algorithms, Springer, ISBN 3-540-63369-3, 1994.

[2] Van der Waerden, B. L., Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Springer-Verlag, 1983.

[3] Rey Pastor, J. Elementos de Matemáticas, Sociedad Española de Traductores, 1959.