ALGUNOS MÉTODOS PARA OBTENER POLINOMIOS DE INTERPOLACIÓN

Wilson Pinzón Casallas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Grupo MATTOPO
Bogotá D.C., Colombia
wjpinzonc@udistrital.edu.co

Wilson Gordillo Thiriat
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Grupo MATTOPO
Bogotá D.C., Colombia
wgordillot@udistrital.edu.co

Resumen

En este artículo se muestra que existe un único polinomio que interpola un conjunto finito de puntos del plano con abcisas distintas y se presentan algunas formas de obtener este polinomio, entre ellas están el polinomio de interpolación de Newton (1687), El polinomio de Lagrange (1775), el método matricial y el método de diferencias divididas.

Reseña histórica

La historia de la interpolación comienza con los matemáticos babilónicos y sus trabajos en las tablas exponenciales; que aunque presentaban grandes huecos, no dudaron en interpolar linealmente o proporcionalmente para conseguir una aproximación a sus valores intermedios.

El impulso de la interpolación se entrelazó con los primeros desarrollos de las diferencias finitas, empezando por la cuadratura del círculo de Wallis en 1655, con la que propuso el principio de "intercálculo" o interpolación, esto fue aceptado por Newton en 1676, lo cual le permitió la derivación de las series binómicas. Así, Newton a partir de un problema de cuadraturas pudo obtener el teorema binomial. Luego se continúa con la construcción de fórmulas prácticas de interpolación.

Aunque "la historia de las fómulas de interpolación es complicada y muy discutida", (Bell, 1995, p. 421) se le puede considerar como un estímulo en los siglos XVII y XVIII para la evolución independiente de las operaciones fundamentales de la teoría clásica de las diferencias finitas, las cuales se desarrollaron principalmente para facilitar cálculos numéricos en astronomía, la creación de tablas y la cuadratura mecánica.

Interpolación Polinomial

La interpolación polinómica es un método usado para conocer, de un modo aproximado, los valores que toma una función, casi siempre desconocida su expresión, de la cual sólo se conoce su imagen en un número finito de abscisas.

El objetivo será hallar un polinomio que cumpla lo antes mencionado y que permita establecer aproximaciones de otros valores desconocidos para la función con una precisión deseable fijada. Por ello, para cada polinomio interpolador se dispondrá de una fórmula de error que permita cuantificar la precisión del mismo.

Se dispone de varios métodos generales de interpolación polinómica que permiten aproximar una función por un polinomio de grado n. Algunos son el de Newton, el de Lagrange, el matricial, el de diferencias divididas y el de diferencias divididas de orden superior.

Interpolación mediante funciones de una variable.

Definición 0.1. *Sean* $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ *un conjunto de* $n+1$ *puntos en* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $x_i < x_j$ *para* $i < j$*. Una función de interpolación correspondiente a estos datos es una función continua* f *tal que* $f(x_i) = y_i$*, para todo* $0 \leq i \leq n$*.*

Teorema 0.1. Sean $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ un conjunto de $n+1$ puntos. Si $x_i < x_j$ para $i < j$ entonces existe un único polinomio p de grado a lo más n tal que $p(x_i) = y_i$, para todo $0 \leq i \leq n$.

Demostración.

1. Primero se probará la unicidad
   Suponga que existen p y q polinomios distintos de grado menor o igual que n, con $p(x_i) = y_i = q(x_i)$ para todo $0 \leq i \leq n$, luego $p-q$ tendría $n+1$ raíces y por el teorema fundamental del álgebra $p - q = 0$ que implica $p = q$.

2. Ahora, por inducción, se prueba la existencia
   El caso $n = 0$, se cumple puesto que el polinomio constante $p(x) = y_0$ satisface la condición $p(x_0) = y_0$.

   Supóngase ahora que se ha obtenido un polinomio p_{k-1} de grado menor o igual a k, con $p_{k-1}(xi) = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k-1$.

   El polinomio $p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$ es un polinomio de grado menor o igual a k que interpola los mismos datos que $p_{k-1}(x)$ y además el dato (x_k, y_k), así:
   $$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \cdots + (x_k - x_{k-1}) = y_k$$
   y despejando c_k se obtiene:
   $$c_k = [y_k - p_{k-1}(x_k)] / [(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \cdots + (x_k - x_{k-1})],$$
   el denominador de esta fracción es no nulo puesto que $x_i \neq x_j$ para todo $0 \leq i, j \leq k$. Así el polinomio anterior $p_{(x)}$ satisface $p_{k(x_i)} = y_i$. para todo $0 \leq i \leq k$. □

Note que los polinomios $p_0, p_1, \ldots, p_n$ generados en la demostración anterior tienen la propiedad que cada p_k se obtiene a partir de p_{k-1} agregándole un sumando, con ello al final del proceso p_n estará formado por una suma de términos y cada p_i será visible en la expresión de p_n. El k-ésimo polinomio se puede expresar como:

$$\begin{aligned} p_k(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\ + c_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x:k-1) \end{aligned}$$

En forma compacta:

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j),$$

donde se adopta la convención.

$$\prod_{j=0}^{m} (x - x_j) = 1$$

si $m < 0$.

Polinomio de interpolación de Newton

Los polinomios $p_k(x)$ obtenidos anteriormente

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= c_0\\
p_1(x) &= c_0 + c_1\,(x - x_0)\\
p_2(x) &= c_0 + c_1\,(x - x_0) + c_2\,(x - x_0)\,(x - x_1)\\
&\vdots\\
p_k(x) &= c_0 + c_1\,(x - x_0) + c_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \cdots + c_k\,(x - x_0)\,(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})
\end{aligned}
$$

reciben el nombre de polinomios de interpolación de Newton.
Los coeficientes c_k se obtienen iterando sucesivamente al sustituir los valores de x_k en el polinomio $p_k(x)$ y despejando:

$$
c_0 = y_0, \qquad c_1 = \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)},
$$

$$
c_2 = \frac{y_2 - p_1\,(x_2)}{(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)}, \qquad c_k = \frac{y_k - p_{k-1}\,(x_k)}{(x_k - x_0)\,(x_k - x_i)\cdots(x_k - x_{k-1})}
$$

Ejemplo: Calcular el polinomio de interpolación para los siguientes datos.

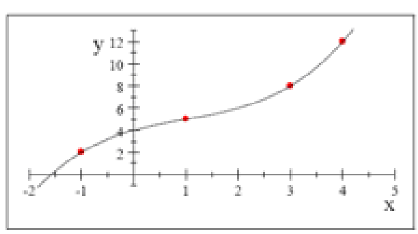
	x_0	x_1	x_2	x_3
x	-1	1	3	4
y	2	5	8	12
	y_0	y_1	y_2	y_3

Solución

$$
c_0 = 2, \quad p_0(x) = 2, \quad c_1 = (5-2)/(1+1) = 3/2, \quad p_1 = 2 + 3/2(x+1)
$$

$$
p_1(x) = p_2(x), \quad c_2 = 0, \quad p_2(4) = 19/2, \quad c_3 = \frac{12 - 19/2}{5 * 3 * 1} = \frac{1}{6}
$$

El polinomio de interpolación es $p_3 = 2 + \frac{3}{2}(x+1) + \frac{1}{6}(x+1)(x-1)(x-3)$ cuya gráfica se ilustra a continuación.



Forma de Lagrange del polinomio de interpolación

El polinomio de interpolación en la forma de Lagrange viene dado por: $p_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$. Donde las funciones $\{l_k(x)\}_{k=0}^{n}$ son polinomios que dependen de las abscisas $\{x_k\}_{k=0}^{n}$. Como cada polinomio p_n interpola los puntos se tiene: $p_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_j) = y_0 l_0(x_j) + y_1 l_1(x_j) + \cdots + y_j l_j(x_j) + \cdots + y_n l_n(x_j) = y_j$, luego $l_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = j \\ 0, & \text{si } k \neq j \end{cases}$.

Así, que deben hallarse $n+1$ polinomios con esta propiedad. Estos se pueden construir así:

$$l_k(x) = c \prod_{i=0, j\neq k}^{n} (x - x_i), \quad l_k(x_k) = c \prod_{i=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_i) = 1, \quad c = \frac{1}{\prod_{i=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_i)}$$

$$l_k(x) = \frac{\prod_{i=0, j\neq k}^{n} (x - x_i)}{\prod_{i=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_i)} = \prod_{i=0, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Estas funciones son conocidas como funciones cardinales.

Ejemplo Encuentre el polinomio que interpola los datos del ejemplo anterior usando la fórmula de Lagrange

	x_0	x_1	X_2	x_3
x	-1	0	1	2
y	-4	1	0	-5
	y_0	y_1	Y_2	y_3

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2), \\
l_1(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2), \\
l_2(x) &= \frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)1(1-2)} = -\frac{1}{2}x(x+1)(x-2), \\
l_3(x) &= \frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)2(2-1)} = \frac{1}{6}(x+1)(x-1)x, \text{ así} \\
p_3(x) &= -4l_0(x) + l_1(x) + 0l_2(x) - 5l_3(x) \\
&= \frac{3}{2}x(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2) - \frac{5}{6}(x+1)(x-1)x \\
&= -4 + 5(x+1) - 3(x+1)x + \frac{1}{3}(x+1)x(x-1)
\end{aligned}$$

cuyo polinomio es igual al encontrado por el método de Newton.

Polinomio de interpolación matricial

La forma usual de un polinomio es: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, si el polinomio interpola los puntos se cumple que: $p(x_k) = a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \cdots + a_n x_k^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, lo que conlleva a un sistema de $n+1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas representado en forma matricial por

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

que tiene solución única debido a que el determinante de la matriz (llamado determinante de Vandermonde) es diferente de 0 puesto que los x_i son todos distintos.

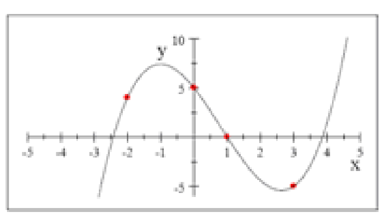
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_2^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo. Hallar el polinomio que interpola los siguientes puntos:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	-2	1	0	3
y	4	0	5	-5
	y_0	y_1	y_2	y_3

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -\frac{127}{30} \\ -\frac{13}{10} \\ \frac{8}{13} \end{bmatrix}$$

Así, el polinomio es: $p(x) = 5 - \frac{127}{30}x - \frac{13}{10}x^2 + \frac{8}{15}x^3$ y su gráfica



Interpolación polinomial por el método de las diferencias divididas

Dado el problema de interpolar un conjunto de puntos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$ con $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, se sabe que existe un único polinomio p a lo más de grado n que interpola a f en estos puntos, es decir $p(x_i) = f(x_i)$, para todo $0 \leq i \leq n$.

El polinomio p se puede escribir como una combinación lineal de los polinomios básicos

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x - x_0, \quad q_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots + \\ q_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Que conducen al polinomio de interpolación de Newton:

$$p(x) = c_0 q_0(x) + c_1 q_1(x) + c_2 q_2(x) + \cdots + c_n q_n(x)$$

Las condiciones de interpolación dan lugar a un sistema de $n+1$ ecuaciones lineales:

$$p(x_i) = c_0 q_0(x_i) + c_1 q_1(x_i) + c_2 q_2(x_i) + \cdots + c_n q_n(x_i) = f(x_i), \text{ para todo } 0 \leq i \leq n.$$

En este sistema la matriz de coeficientes de tamaño $(n+1) \times (n+1)$ tiene por elementos $a_{ij} = q_j(x_i)$ para todo $0 \leq i, j \leq n$, lo que proporciona una matriz triangular inferior puesto que:

$$q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1}) \text{ y} \\ q(x_i) = (x_i - x_0)(x - i - x_1) \cdots (x_i - x_{j-1}) \text{ si } i < j$$

Ejemplo. Suponga que se tienen tres puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$.

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

el sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} p(x_0) &= c_0 && = f(x_0) \\ p(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) && = f(x_1) \\ p(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) && = f(x_2) \end{aligned}$$

equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}$$

Para resolver este sistema se va sustituyendo de arriba hacia abajo.

En este proceso se ve que: $c_\mathbf{0} = f(x_\mathbf{0})$, c_1 solo depende de $f(x_\mathbf{0})$ y $f(x_1)$, $\ldots$, y c_n depende de $f(x_\mathbf{0}), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ en el caso general.

La notación $c_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ es la más adecuada y usual para denotar los coeficientes en el polinomio de interpolación. Estos coeficientes se denominan diferencias divididas y su nombre es natural se debe a que si se tienen solo dos nodos, el polinomio de interpolación para estos es la recta que pasa por ellos:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

así que $f[x_\mathbf{0}] = f(x_\mathbf{0})$ y $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Usando la notación de diferencias divididas el polinomio de interpolación de Newton se puede escribir como:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j q_j(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_j] q_j(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_j] \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k)$$

Fórmula de recurrencia para las diferencias divididas

Las diferencias divididas satisfacen

$$f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right] = \frac{f\left[x_1, x_2, \ldots, x_m\right] - f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\right]}{x_n - x_0}$$

Demostración. Sean $p_n(x)$ el polinomio que interpola los puntos $\left\{\left(x_k, f\left(x_k\right)\right)\right\}_{k=0}^{n}, p_{n-1}(x)$ el polinomio que interpola los puntos $\left\{\left(x_k, f\left(x_k\right)\right)\right\}_{k=0}^{n-1}$ y $q(x)$ el polinomio que interpola los puntos $\left\{\left(x_k, f\left(x_k\right)\right)\right\}_{k=1}^{n}$. Estos polinomios satisfacen la relación:

$$p_n(x) = q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}\left(q(x) - p_{n-1}(x)\right)$$

debido a que $p_n(x)$ y $q(x) = \frac{x-x_n}{x_n-x_0}\left(q(x) - p_{n-1}(x)\right)$ tienen ambos grado menor o igual a n y son iguales en los puntos $\left\{\left(x_k\right)\right\}_{k=0}^{n}$ .En efecto:

$$\begin{aligned} p_n\left(x-0\right) = f\left(x-0\right), q\left(x-0\right) + \frac{x_0 - x_n}{x_n - x - 0}\left(q\left(x-0\right) - p_{n-1}\left(x_0\right)\right) \\ = p_{n-1}\left(x_0\right) = f\left(x-0\right) \end{aligned}$$

si $1 < k < n$

$$\begin{aligned} p_n\left(x_k\right) = f\left(x_k\right), \qquad & q\left(x_k\right) + \frac{x_k - x_n}{x_n - x_0}\left(q\left(x_k\right) - p_{n-1}\left(x_k\right)\right) = q\left(x_k\right) & = f\left(x_k\right) \\ p_n\left(x_n\right) = f\left(x_n\right), \qquad & q\left(x_k\right) + \frac{x_n - x_n}{x_n - x_0}\left(q\left(x_n\right) - p_{n-1}\left(x_n\right)\right) = q\left(x_n\right) & = f\left(x_n\right) \quad \square \end{aligned}$$

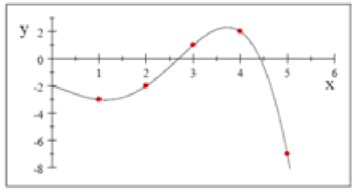
Ahora, Mejorar este párrafo con puntuaciones o con más palabras…es confuso el coeficiente de $p_n(x)$ es $f\left[x_{\mathbf{0}}, x_1, \ldots, x_n\right]$ el coeficiente de $q(x) + \dfrac{x - x_n}{x_n - x_0}\left(q(x) - p_{n-1}(x)\right)$ es el coeficiente de $\dfrac{\left(x - x_n\right) q(x) - \left(x - x_n\right) p_{n-1}(x)}{x - n - x_0}$

$f\left[x_{\mathbf{0}}, x_1, dotsc, x_n\right]$ es el coeficiente principal de $q(x)$ que es el mismo coeficiente principal de $\left(x - x_n\right) q(x)$, $f\left[x_{\mathbf{0}}, x_1, \ldots, x_{n-1}\right]$ es el coeficiente principal de $p_{n-1}(x)$ que es el mismo coeficiente principal de$\left(x - x_n\right) p_{n-1}(x)$ en conclusión

$$f\left[x_{\mathbf{0}}, x_1, \ldots, x - n\right] = \frac{f\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] - f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\right]}{x_n - x_0}$$

Este resultado permite hallar los coeficientes del polinomio de interpolación de forma recurrente como lo indica la siguiente tabla:

$x_{\mathbf{0}}$	$f\left[x_{\mathbf{0}}\right]$	$f\left[x_{\mathbf{0}}, x_1\right]$	$f\left[x_{\mathbf{0}}, x_1 x_2\right]$	$f\left[x_{\mathbf{0}}, x_1 x_2 x_3\right]$	$\cdots$	$f\left[x_{\mathbf{0}}, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right]$
x_1	$f\left[x_1\right]$	$f\left[x_1, x_2\right]$	$f\left[x_1, x_2, x_3\right]$	$f\left[x_1, x_2, x_3, x_4\right]$		
x_2	$f\left[x_2\right]$	$f\left[x_2, x_3\right]$	$f\left[x_2, x_3, x_4\right]$	$\vdots$		
x_3	$f\left[x_3\right]$	$f\left[x_3, x_4\right]$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
x_{n-1}	$f\left[x_{n-1}\right]$	$f\left[x_{n-1}, x_n\right]$				
x_{n-1}	$f\left[x_{x-1}\right]$					



Ejemplo. Utilizando la formula de recurrencia obtenida en el teorema anterior encuentre las diferencias divididas para el polinomio que interpola los puntos

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-3	-2	1	2	-7

$$\begin{array}{cc|cccc}
1 & -3 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\
2 & -2 & 3 & -1 & -\frac{4}{3} & \\
3 & 1 & 1 & -5 & & \\
4 & 2 & -9 & & & \\
5 & -7 & & & &
\end{array}$$

Y el polinomio de interpolación es

$$p(x) = -3 + (x-1) + (x-1)(x-2) - \frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

y cuyo gráfico es:

Bibliografía

[1] E.T. Bell, *Historia de las matemáticas*, Fondo de cultura económica. 1995.

[2] Carl B. Boyer, *Historia de la matemática*, Alianza ediorial Cambridge. 1999.

[3] David Kincaid, Ward Cheney, *Análisis numérico*, Addison-Wesley Iberoamericana. 1994.

[4] Aubanell, A. Benseny, A. Delshams, *Útiles básicos de Cálculo Numérico*. Labor/Publicaciones de la UAB. 1993

[5] Joaquín M. Ortega Aramburu. *Introducció al'Anàlisi Matemàtica* (2a edición, catalán). Publicacions de la UAB. 2002