UNA EXPERIENCIA EN INVESTIGACIÓN-ACCIÓN TÉCNICA:
"EL PASO DEL INFINITO POTENCIAL AL INFINITO 'COMO UN TODO' PARA COMPRENDER LA CONSTRUCCIÓN DE LOS CONJUNTOS INFINITOS"

Carmen M. Valdivé Fernández
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"-Venezuela
Valfer16@yahoo.com

Campo de investigación: Formación de profesores; Nivel educativo: Superior

Resumen

La experiencia del docente de matemática en los diferentes niveles del sistema educativo venezolano, nos hacen repensar el papel crucial que éstos representan en la relación teoría-praxis-investigación en temas tan neurálgicos como lo es, la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos, puesto que involucra el "corazón de la matemática": el infinito (Valdivé, 2003; Garbin y Azcárate, 1999, Arrigo y D'Amore, 1998). Por tal razón se presenta esta experiencia de carácter fenomenológico (Carr y Kemmis, 1988), la cual tuvo como objetivo describir, analizar e interpretar las acciones de 15 profesores, los cuales utilizaron la investigación acción técnica (Habermas,1971; Lokpez, 2001). Los resultados se enfocaron en 2 dimensiones: a) El papel del profesor y sus modelos mentales y b) La ideología del profesor en las prácticas escolares.

Introducción

La labor docente del profesor de matemática es particularmente investigativa por las características propias del saber que se enseña y por la gama de estrategias que el profesor utiliza cuando aborda una temática en especial. Estrategias que se corresponden muchas veces a su experiencia, a las literaturas de trabajos de investigación o bien a las que los libros y programas le sugieren. En virtud de sus expectativas como investigador, el profesor de matemática, al inscribirse en programas de maestría, busca enriquecer su repertorio tratando de mejorar su praxis, encontrando muchas veces que esa praxis no va emparejada con su teoría ni con los niveles de actuación de la Educación Matemática: cultural, social, institucional, pedagógico e individual y que repercuten indudablemente en los procesos enseñanza y aprendizaje. (Mora, 2002). Por tal motivo, la experiencia que se presenta en este trabajo, recoge las actividades realizadas por un conjunto de 15 profesores involucrados como coinvestigadores, al abordar la temática sobre la construcción de los conjuntos infinitos desde la modalidad de la investigación-acción técnica, la cual tiene como propósitos generales diseñar y aplicar un plan de intervención que sea eficaz en la mejora de habilidades profesionales y en la resolución de problemas prácticos produciendo con ello un saber instrumental (Carr y Kemmis, 1988).

Desarrollo

Para abordar la experiencia, se consideró asumir un enfoque de investigación: la investigación acción técnica, por ser un proceso de investigación cíclico de exploración, actuación y valoración de resultados, en consecuencia es una forma de entender la enseñanza y no solo una manera de investigar, debe ser un proceso de investigación social, en el cual todos los participantes estén implicados en la toma de decisiones (Lokpez, H., 2001). En este trabajo, los implicados fueron el investigador "principal" (observador participante), los coinvestigadores (los 15 profesores de matemática), los

estudiantes de los diferentes planteles donde laboran los coinvestigadores y los directores de esos planteles.
La metodología se centró en la recopilación de información utilizando entrevistas, observación participante y no participante, narración profesional e informes de ejecución de las clases (crónica de la lección: desde el profesor, desde el alumno y desde el proceso enseñanza y aprendizaje).

Procedimiento

Los 15 profesores conformaron grupos de investigación y de actuación. En cada grupo existía el profesor que impartía el plan de clase y dos observadores. El proceso investigación acción técnica se llevó a cabo cumpliendo los ciclos y las fases de cada ciclo que utiliza la investigación acción:

Primer ciclo

Fase diagnóstica

Se promovió un diálogo entre los 15 coinvestigadores y la investigadora principal. El diálogo versaba sobre la pregunta ¿qué estrategias o actividades y conceptos involucran ustedes como profesores de matemáticas, al construir con sus alumnos los conjuntos infinitos? Para el análisis de las narrativas profesionales, se utilizó la estrategia de las comparaciones constantes, diseñada por Glaser y Strauss (citado por Goetz y LeCompte, 1988), pues combina las codificaciones de categorías inductivas con un proceso simultáneo de comparación. Las categorías obtenidas se orientaron en dos direcciones: a) Conceptos matemáticos y b) Actividades y prácticas.

Para el conjunto infinito: N

Conceptos matemáticos	Actividades y prácticas
Nociones conjuntistas: pertenencia, elemento, diagramas de Venn	Planteamos ecuaciones
La recta numérica	Con figuras y diagramas
	Con situaciones problemáticas

Para el conjunto infinito: Z

Conceptos matemáticos	Actividades y prácticas
Insuficiencia de N	Planteamos ecuaciones
La recta numérica	Con figuras y diagramas
Nociones conjuntistas: pertenencia, elemento, { }, ∩, unión	Con situaciones problemáticas de la vida diaria
Ecuaciones	

Para el conjunto infinito: Q

Conceptos matemáticos	Actividades y prácticas
Insuficiencia de Z	Situaciones problemáticas
La recta numérica	Relaciones físicas
Nociones conjuntistas: pertenencia, elemento, { }, ∩, unión.	Repaso de Z

Ecuaciones	Utilizamos las fracciones
Notación científica	
Fracción decimal y expresión decimal	
Fracción generatriz	

Para el conjunto infinito: R

Conceptos matemáticos	**Actividades y prácticas**
Insuficiencia de Q con $X^2 = 2$	Situaciones problemáticas
La recta numérica	Repaso de Q
Nociones conjuntistas: pertenencia, elemento, { }, ∩, unión.	Trabajo con la calculadora para encontrar las raíces no exactas
Ecuaciones de la forma $X^2 = 3$, …	No uso de la recta para representar los Irracionales
Decimales periódicos y no periódicos	Separa los decimales periódicos con los no periódicos
	El intervalo [0,1] pues trabajo con Estadística y Probabilidad

***Interpretación de la Diagnosis*:**

a) Los profesores utilizan elementos de la teoría conjuntista como un contenido que no aparece como objetivo explícito de enseñanza en los programas escolares.

b) Los profesores no hacen mención en sus diálogos, el por qué N, Z, Q y R son conjuntos infinitos.

c) Los profesores no expresan en sus diálogos, acerca de la representación de cada conjunto en la recta numérica y de cómo se van incorporando nuevos elementos, a medida que se van introduciendo otros conjuntos numéricos.

Se reflexionó en torno a esos resultados, a fin de tomar decisiones y elaborar un Plan de Acción, con todos los involucrados, el cual se detalla a continuación:

- Revisar los programas de Básica, Media, Diversificada y Superior (Matemática I).
- Revisión bibliográfica acerca de la manera de construir los conjuntos infinitos bajo la mirada de la Teoría Cantoriana (Tirosh, D.,1991, Arrigo y D'Amore,1998).
- Revisión histórica del concepto infinito matemático.
- Diseñar una Estrategia de Enseñanza, adaptarla y exponerla para construir un conjunto infinito, tomando en cuenta la revisión de la literatura, el grado o año escolar, el tiempo, el contexto y la diagnosis.
- La investigadora principal, modelizó la Teoría Cantoriana desde la perspectiva de Tirosh, D. (1991) como un paso al infinito "actual" y demostró los dos teoremas de Cantor, propuestos por Arrigo y D'Amore (1998).

***Fase de Ejecución o acción*:**

Los 15 profesores de matemática desarrollaron su estrategia de acción en las aulas de clases, una vez que fue revisada y expuesta ante la investigadora principal. En esta fase, los docentes además de ejecutar su plan de clases bajo la teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau ,1997), debían evaluarlo y reflexionar sobre él.

Para El conjunto Numérico N y Z: Los profesores hicieron la construcción utilizando clases de equivalencia.

Para el conjunto Numérico Q y R: Utilizaron la insuficiencia de Z y Q respectivamente.

Para el conjunto R: Utilizaron los decimales periódicos y no periódicos con la regleta.

***Fase de Evaluación*:**
En esta fase, los profesores mostraron el desarrollo de las clases a la investigadora principal, las dificultades y las fortalezas encontradas tanto para ellos como para sus alumnos. Así mismo, se mostraron videos de clases grabadas, las crónicas de los observadores participantes desde el aprendizaje de los alumnos y desde la enseñanza.

Fase de Reflexión
Una vez pasadas las fases anteriores, los profesores dialogaron con la investigadora principal y entregaron un informe sobre las crónicas de clases. En estas narraciones profesionales dialogadas y en los informes, los profesores expresaban (algunas transcripciones de la investigadora principal y tomadas de los informes de los profesores):
a) "Algo muy interesante y curioso ocurrió en el momento de la representación de Z, los alumnos lo hicieron así: $\{-\infty,\ldots,-2,-1,0,1,\ldots\infty\}$, los alumnos utilizaron el infinito como objeto".
"Los alumnos ubicaron en la recta real $\sqrt{44}$ entre 6,6 y 6,7 utilizando primero la notación:
$6 < \sqrt{44} < 7$ luego $6{,}6 < \sqrt{44} < 6{,}7$ luego $6{,}63 < \sqrt{44} < 6{,}64$ y $6{,}63 < 6{,}633249... < 6{,}64$"
b) "La docente al representar Z en la recta, ubicó el cero e indicó a los alumnos que a la izquierda de cero representaríamos los enteros negativos y a la derecha los enteros positivos, destacando que el conjunto de los números enteros es un *conjunto infinito* ya que al escoger un número entero en la recta, siempre encontraremos un sucesor e indicando que los puntos suspensivos sugerían que siguen indefinidamente, dejando bien claro lo que es un conjunto infinito".
d) "...la actividad se ejecutó en un contexto rico en participación por parte de los alumnos...sin embargo se presentaron ciertos problemas al dividir y obtener la fracción decimal y por tanto al obtener la serie geométrica de la sucesión 0,3; 0,03; 0,003,..., por lo que consideramos explicar cómo obtener la fracción decimal. Por lo demás consideramos que fue muy provechoso construir el conjunto Q de esta manera, pues cuánto ignorábamos como profesor lo referente a esta construcción. Además lo enriquecedor de inducir en el alumno el por qué Q es un conjunto infinito, finalidad del guión de clase".

De las reflexiones realizadas por los profesores, surgieron hipótesis de investigación formuladas para poder realizar planes de acción y mejorar con ello sus prácticas y de las reflexiones de la investigadora principal surgieron hipótesis de investigación acerca de la importancia de incorporar a los docentes activos como coinvestigadores, pues asumen la triada teoría-praxis-investigación como un medio de generar conocimiento acerca de la enseñanza.

Segundo Ciclo

Culminadas las cuatro fases del Primer ciclo de la investigación acción técnica, la investigadora inicia conjuntamente con sus coinvestigadores un segundo ciclo, pero esta vez con una primera fase: 1) *La diagnosis*, la cual consistió en aplicar un cuestionario contentivo de 4 preguntas referentes a las concepciones de los profesores sobre el infinito matemático. Los datos se organizaron utilizando redes sistémicas (Bliss y Ogborn, 1983) y para el análisis se utilizó la estrategia de las comparaciones constantes, estrategia en la que el investigador codifica y analiza los datos en forma simultánea para desarrollar conceptos (Rodríguez, Gil y García, 1999). Algunas respuestas dadas por los 15 profesores se muestran a continuación:

2) ¿Es 0,999... = 1?	Si (5)	a) $x = 0,\dot{9}$ $10x = 9,\dot{9}$ $10x = 9,\dot{9}$ $-x = -0,\dot{9}$ $9x = 9$ $x = \frac{9}{9} = 1$
	Si (4)	b) Si, se puede demostrar por sucesiones de Cauchy
	Si (2)	c) Si, por aproximación
	No (4)	No, le falta un pedacito para llegar a 1
4) a)¿Son infinitos los conjuntos *N, Q* y *R*? Explica	Si (1)	*N y Q son infinitos porque no son finitos y R más infinito que los anteriores, porque contiene otros conjuntos infinitos.
	Si (1)	*Porque se pueden establecer biyecciones entre *N* y *Q*. *R* es infinito no numerable ya que no se puede establecer una biyección entre *N* y *R*.
	Si (10)	*Porque puedo tomar subconjutos propios de *N*, por ejemplo los pares y establecer una biyectividad entre ellos y *N*. Luego *N* es infinito. De la misma manera *Q* es infinito ya que *N* es subconjunto de *Q* y puedo establecer biyectividad entre ellos. Y *R* es infinito por la misma razón, puedo establecer correspondencia entre R y el intervalo *(0,1)*. *R* tiene una cardinalidad mayor que todos los conjuntos infinitos anteriores.
	Si (2)	*Todos son infnitos.
	Omitida(1)	
b) ¿Es *R* equipotente a *N*? Explica	No (10)	*La cardinalidad de *N* es $\aleph$ al igual que la de *Q* pero *R* es más infinito que ellos, es no numerable, no se puede poner en correspondencia uno a uno con *N* *No, ya que *R* no se puede poner en correspondencia con *N*. *N* tiene cardinalidad $\aleph$ y *R* tiene cardinalidad $2^{\aleph}$. *No
	Si (4)	*Si se pueden relacionar. *N* es subconjunto propio de *R* Son ambos infinitos.
	Omitida (1)	

Los resultados se orientaron en dos direcciones utilizando la estrategia de las comparaciones constantes: a) La influencia de los modelos en nuestro razonamiento en el dominio del infinito matemático. b) La persistencia e impacto de tales modelos en individuos entrenados en matemática, concientes de la naturaleza abstracta del objeto matemático: infinito

Conclusiones

En virtud de los profundos cambios en la enseñanza de las matemáticas y por los momentos que se viven hoy en cuanto a experimentación en este campo, se deducen de este trabajo, las siguientes conclusiones:

1. Promover la investigación-acción en Educación Matemática pues es una forma de entender la enseñanza y no solo una manera de investigar, debe ser un proceso de investigación social, en el cual todos los participantes estén implicados en la toma de decisiones.
2. Proveer cursos de actualización a los docentes de matemática en ejercicio, sobre los conjuntos infinitos como un paso al infinito "actual" de manera que la transición a la matemática de educación superior en conceptos como límite, derivada e integral no cause conflictos cognitivos o incoherencias.
3. La estrategia desarrollada en la unidad de aprendizaje sobre los conjuntos infinitos y finitos, logró que diez de los profesores llegaran a adquirir intuiciones consistentes con la teoría cantoriana aprendida. Sin embargo cinco de los 15 profesores conservaban los modelos de razonamiento que poseían antes de comenzar la instrucción y dos presentaban incoherencias en sus respuestas, resaltando los modelos tácitos que cada uno tiene como docente.

Referencias

Arrigo G. y D'Amore, B. (1998). *Lo veo pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual.* Educación Matemática (11) 5-24
Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. En Balacheff, N. y col. (Eds) Kluwer Academic Publishers.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría Crítica de la Enseñanza. La investigación acción en la formación del profesorado*. España: Ediciones Martínez Roca.

Garbin S. y Azcárate C. (1999).*Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual.* Educación Matemática (12) 5-18

Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Madrid: Morata

Habermas, J. (1971). *Conocimientos e intereses*. Madrid: Taurus

Lokpez de G., H. (2001). *El Pensamiento Reflexivo*. En Cambiando a través de la Investigación Acción Participativa. Caracas: Ediciones Comala.com.

Mora, D. (2002*). Didáctica de las Matemáticas en la educación venezolana.* Caracas: EBUC.

Rodríguez, Gregorio; Gil, Javier y García Eduardo (1999). Metodología de la Investigación Cualitativa. Ediciones Aljibe: Málaga.

Tirosh, D. (1991). *The role of students intuitions of infinity in teaching the cantorian theory*. En Tall, D. (ed.) Advanced Mathematical Thinking, pp 199-214. Dordrecht/Boston/Londres: Kluwer Academic Publisher.

Valdivé, C. (2003). *Visualización del Infinito Matemático*. Ponencia presentada en Decimoséptima reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Chile.