RESCATE FRACCIONARIO

Abel Carmona, Mónica Lisi, Abel Carmona, Mónica Lisi, Angélica Elvira Astorga y Estela Sonia Aliendro.
Universidad Nacional de Salta Argentina
grupoabeliano@hotmail.com, aeastorga@hotmail.com, myczanek@arnet.com.ar, aliendro@unsa.edu.ar

Resumen. Presentamos una experiencia de re-aprendizaje de las operaciones con fracciones, por los frecuentes errores algorítmicos en que incurren los estudiantes de segundo año de nivel medio. De evaluaciones diagnósticas e indagaciones sobre las estrategias de enseñanza en la primaria, comprobamos que los aprendizajes previos se limitan a memorizar y repetir algoritmos carentes de significatividad y sentido, fácilmente olvidables. Así nos propusimos aprovechar la potencialidad de la razón para aprendizajes perdurables. Al efecto, diseñamos actividades de tipo experimental tendientes a lograr aprendizajes significativos que justifiquen los algoritmos.

Con la experiencia realizada, los estudiantes lograron aprobar las evaluaciones en un alto porcentaje, pero fundamentalmente sintieron una intensa satisfacción con los aprendizajes obtenidos.

Palabras clave: re-aprendizaje experimental, operaciones con fracciones

Abstract. We present an experiment on re-learning operations with fractions because of the frequent algorithmic mistakes that students of the second year of the middle level (of High School) make. From the results of the diagnostic evaluations and inquiries into the strategies of teaching in the Primary School, we verified that the knowledge gained previously is limited to memorize and repeat algorithms without understanding them, which is easy to forget. That is why we intend to make use of the potential of the faculty of reasoning to get durable knowledge. To that end we design experimental activities to reveal the principles which justify the algorithms.

After carrying out the experiment most of the students, passed the examinations but, more important was, their satisfaction about their achievements.

Key words: experimental re-learning, operations with fractions

Introducción

Nuestra intención es dar a conocer las principales instancias en que desarrollamos una experiencia de re-aprendizaje de la operatoria con números fraccionarios, dado los frecuentes errores en que incurren estudiantes que cursan el segundo año de nivel medio. Hablamos de re-aprendizaje porque es en el nivel primario de estudios donde se enseñan y deberían haber sido aprendidos los correspondientes algoritmos. Participaron de la experiencia, estudiantes del Colegio Secundario N° 5025 de San Antonio de los Cobres (Noroeste de la República Argentina, región de ambiente inhóspito, clima desértico, a unos cuatro mil metros de altura sobre el nivel del mar) y cuyas edades oscilan entre los 14 y 15 años. La mayoría de los habitantes de la mencionada población, es descendiente directa de las poblaciones originarias de la zona. Y los estudiantes con los que trabajamos son chicos que llevan una vida casi independiente de sus mayores. Los hombres trabajan en las minas, por lo cual están ausentes de sus hogares, a los que retornan una semana al mes. Las madres se dedican en algunos casos al pastoreo y en otros, a las labores artesanales cuyos productos venden a los turistas. O sea que también están ausentes de sus hogares durante el día. Por ello, la responsabilidad del hogar está a cargo de los hijos o hijas mayores.

La situación hogareña descripta, hace que los estudiantes descuiden casi totalmente sus tareas escolares. Encontramos que esta es una de las tantas causas de la carencia de rutinas imprescindibles para el progreso en el aprendizaje de la matemática. Ni qué decir de la ausencia de significatividad y de sentidos de las nociones (muchas de ellas elementales), como bien detectamos en las evaluaciones diagnósticas que realizamos todos los años.

La abstracción característica de los objetos y procedimientos matemáticos conlleva dificultades tanto para enseñarlos como para aprenderlos. Pero por la vocación y la responsabilidad docente que creemos poseer, asumimos el reto de gestionar la enseñanza con el fin de revertir los resultados negativos obtenidos en las citadas evaluaciones diagnósticas y lograr que un buen porcentaje de alumnos alcance el nivel de manejo de las operaciones con números fraccionarios de forma satisfactoria.

Nuestra disyuntiva era 'cumplir' con el desarrollo de los contenidos correspondientes al segundo año de enseñanza media (para los que resulta imprescindible el manejo operatorio fraccionario) o admitir que, para el progreso matemático de nuestros estudiantes era necesario dotarlos de los conocimientos previos requeridos. Esto implicó un trabajo más en soledad (por parte del docente que lo ejecutaba en el aula), porque muchos colegas y directivos se mostraban escépticos respecto de los posibles logros, aunque tuvimos la libertad de realizarlo. Gran parte del diseño de situaciones y recursos lo elaboramos en el ámbito de nuestro trabajo universitario.

Esta experiencia se realizó durante cinco años; no siempre logramos los resultados esperados, pero los tropiezos y sinsabores fortalecieron nuestro trabajo, en especial en lo que a modificación de estrategias se refiere, de modo de lograr mejores resultados.

Desarrollo

Como ya comentamos, fue en las evaluaciones diagnósticas donde afloraron los errores en la operatoria con fracciones. Pero más allá de ellas, también nos interesamos por conocer las estrategias de enseñanza y aprendizaje que, para el cálculo con fracciones, se desarrollaba en las escuelas primarias de las que provenían nuestros estudiantes. Así es que mantuvimos conversaciones con los profesores de ese nivel, en especial con los de los últimos años del citado nivel. Todos los enseñantes con los que dialogamos, accedieron de buen grado a nuestros requerimientos.

Como resultado de esas conversaciones nos informamos que, por lo general, la operatoria con números naturales y enteros es bastante visualizada durante el ciclo primario de estudios. Las dificultades asociadas a la conceptualización de la suma y la diferencia de números naturales, han sido fácilmente superadas al finalizar los estudios primarios. Pero perduran las deficiencias en los algoritmos para el cálculo de productos y cocientes. Cuando se trasciende a las fracciones, prima la enseñanza y el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones, basados simplemente en reglas que hay que memorizar y, por medio de la práctica reiterada, volverlos rutinarios. No hay, en general, una visualización o un sustento concreto que justifique los citados algoritmos. De esta manera, el estudiante se encuentra sin la posibilidad de tener medios de control de sus producciones, y espera que sea el profesor quien le indique si lo que hizo está bien o mal. Y a ello nos abocamos: a lograr que nuestros estudiantes se apropiaran de algunas estrategias que le resultaran apropiadas para un mínimo autocontrol de sus elaboraciones.

Para la experiencia que desarrollamos, propusimos una secuencia de actividades (que incluían acciones con material concreto), algunas de las cuales describiremos más adelante, con especial referencia a la suma y diferencia de fracciones. No hemos olvidado que la operatoria con fracciones requiere de la comprensión del concepto de fracción y sus diferentes representaciones. Su enseñanza y aprendizaje correlativo no presenta, en general, mayores dificultades. Pero es otra la situación respecto de la operatoria.

Referentes teóricos

Uno de los temas claves de la didáctica y de la educación matemática, es cómo generar aprendizaje efectivo por parte de los estudiantes en torno al conocimiento matemático, tanto en sus contenidos como en el uso de su método. Sostenemos que conocer o saber matemáticas, es algo más que repetir definiciones y propiedades (Brousseau, 1993) y ejecutar algoritmos de manera rutinaria. La persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y objetos matemáticos para resolver problemas y poner en juego su creatividad. No es posible dar vida a los objetos matemáticos si no los ponemos en juego ante los problemas en los que cobran sentido y vida.

En particular, cuando nos referimos a las operaciones numéricas aparecen dos aspectos diferentes pero complementarios: el conceptual, referido al significado de la operación, y el procedimental, vinculado a los algoritmos operatorios correspondientes. El estudiante que se aproxima a la suma y a la diferencia de fracciones, debería hacerlo desde el referente de la suma y diferencia de naturales. Para estas, los sentidos fundamentales son los de agregar o quitar respectivamente, los que corresponden, según los términos de Vergnaud (1990), al campo aditivo. Mientras el denominador de las fracciones involucradas es el mismo, no se observan dificultades en lo que a dichos sentidos se refiere. Y son visualizables (por medio de las representaciones gráficas tradicionales) de modo inmediato. Pero cuando se trata de fracciones con diferente denominador, priman – en su enseñanza – las reglas algorítmicas por sobre los sentidos citados y la visualización gráfica. De hecho, la secuencia algorítmica clásica que se utiliza en nuestras aulas (factorear denominadores, buscar su múltiplo común menor, dividirlo entre cada denominador y multiplicar este cociente por el correspondiente numerador, sumar o restar finalmente los productos obtenidos y obtener el resultado, incluyendo su simplificación) está muy lejos de la idea de agregar o de quitar, con el agravante de que no se utiliza – por lo general – un sustento representativo gráfico. Análogamente, la regla para la multiplicación de fracciones (multiplicar entre sí los numeradores y también los denominadores) está muy distanciada de la idea de suma repetida. Y en el caso de la división, la regla 'multiplicar en cruz' para obtener el resultado de dividir dos fracciones, no tiene nada que ver con la idea primigenia de repartir o partir.

Por otra parte, si sostenemos junto a Brousseau (1.993) que la situación de aprendizaje ocurre cuando los estudiantes se apropian de un problema – adecuado a su medio – para el cual carecen de solución, pero que son capaces de generar soluciones parciales y someterlas a prueba hasta encontrar la solución final del problema, tenemos que admitir que para operar con fracciones, deben ser ellos quienes busquen y generen sus propios algoritmos.

Según Douady (citada por Mathiaud, 1996), un problema es tal, si se puede interpretar al menos en dos marcos diferentes, es decir en dos ramas distintas de las matemáticas. Las fracciones se prestan al juego de marcos, ya que pueden interpretarse tanto desde lo aritmético como de lo geométrico, por lo menos en el nivel primario.

Sumar, restar, multiplicar o dividir dos fracciones arbitrarias, es el problema en cuestión. Se puede formular aritméticamente e interpretar geométricamente y desde la medición de longitudes, superficies o volúmenes. Se trata de 'medir' los resultados en forma gráfica y transformarlos convenientemente a la representación aritmética.

Otro aspecto que sustenta esta experiencia es el concepto de taller (Ander Egg, 1991):

> lugar donde se trabaja, se elabora y se transforma algo para ser utilizado (…), se trata de una forma de enseñar y sobre todo de aprender, (…), constituye un aprender haciendo en grupo,(…), los conocimientos se adquieren en una práctica concreta, lo cual supone una superación de la división entre formación teórica y práctica, mediante una integración de ambas, …, todos los talleristas participan, en carácter de protagonistas, de modo que se trata de un aprendizaje cooperativo... El conocimiento se produce fundamentalmente en respuestas a preguntas, lo cual permite desarrollar una actitud científica, de curiosidad y búsqueda (pp. 10-12).

Descripción de la experiencia

Antecedentes

Antes de implementar la experiencia como parte del curso normal, fue la necesidad de buscar una solución al reiterado fracaso de los estudiantes en la matemática de nivel medio, lo que dio origen a acciones vinculadas con la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones con fracciones, desde la utilización de una metodología áulica basada en la problematización del tema. Las autoridades educativas demandaron de las instituciones escolares, la realización de talleres destinados a la recuperación de los estudiantes que no lograron alcanzar los conocimientos exigidos para superar el curso escolar, y que estaban en riesgo de ser perdidos para el sistema educativo.

En el Colegio Secundario N° 5025, uno de los mencionados talleres, se centró en el tema de fracciones, tanto en su aspecto conceptual como en los algoritmos operatorios. Recordamos que estos temas corresponden al nivel primario de estudios. Sin embargo, ni las nociones ni los procedimientos habían sido aprehendidos en el mismo, por lo cual se retornó a los inicios del tema pero desde una aproximación con soporte concreto.

Una de las primeras opciones fue utilizar (para las fracciones) las representaciones tradicionales con círculos o rectángulos, en cartulina. Pero no hubo demasiado progreso, tal vez porque las mismas no permitían demasiada manipulación.

Entonces recurrimos a envases de bebidas gaseosas de diferentes capacidades: 3, 2.25, 1.5, 1 y ½ litros. La primera actividad consistía en comparar dichas capacidades de manera visual. Por supuesto, es muy simple determinar qué envase contiene más o menos cantidad respecto de otro. Pero no es tan sencillo establecer cuánto más o cuánto menos uno respecto de otro. Fue necesario seleccionar una unidad, la que en primera instancia se asignó al envase de tres litros y se pidió determinar qué parte del mismo correspondía a cada uno los otros envases. La respuesta vino por la acción de transvasar líquido, tantas veces como fue necesario hasta llenar la unidad seleccionada, sin olvidar de hacer las correspondientes marcas en esta. De este modo, los estudiantes observaron que el envase de medio litro correspondía a la sexta parte del envase de tres, mientras que el de 1.5 representaba la mitad. Pero al transvasar el líquido contenido en la botella de 2.25 litros a la unidad, los estudiantes comprobaron que las marcas realizadas anteriormente en la botella de tres litros no servían. Decidieron, al final, usar marcas intermedias que los llevó a obtener doceavos.

Posteriormente se usaron los otros envases como unidad. Así la noción de fracción y de equivalencia entre fracciones, quedó afianzada de manera experimental. La corta duración del taller, sólo unas seis horas, no permitió profundizar demasiado ni considerar otros temas. Pero los resultados obtenidos aún con esta limitación, fueron satisfactorios.

La experiencia en el curso escolar

Como en los años siguientes, las evaluaciones diagnósticas evidenciaban entre los alumnos que llegaban al segundo año, las mismas fallas en lo relativo a la noción de fracción y de operatoria de fracciones, se decidió repetir para ellos, la experiencia del taller de recuperación, esta vez durante el año escolar y con una mayor carga horaria. Se repitieron las actividades antes descriptas y destacamos que los estudiantes advirtieron que una misma fracción podía representar capacidades diferentes según la unidad seleccionada. La representación simbólica correspondiente no ofreció obstáculos por cuanto era conocida (recordemos que el tema corresponde a la escuela primaria). Entonces, los envases fueron reemplazados por cuadrados de papel, como unidades, para afianzar una de las representaciones gráficas tradicionales de las fracciones.

Luego se consideró el problema de la suma y diferencia de fracciones de igual denominador, sin que se presentaran dificultades para resolverlas tanto por medio del plegado de los cuadrados de papel y con la representación numérica habitual.

Para el caso de denominadores diferentes, se pidió resolver, por medio del plegado, la suma $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Los alumnos observaron que la representación de una de las fracciones no servía para medir la otra y viceversa, porque "algo sobraba o faltaba", según sus expresiones.

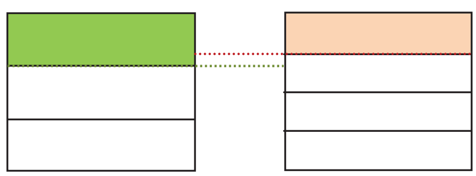

Figura 1: Imposibilidad de medición directa entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$

El enseñante preguntó entonces si las representaciones elegidas eran las únicas posibles para las fracciones dadas. Así, los estudiantes recurrieron a los gráficos de fracciones equivalentes que les permitieron obtener $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ y $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$

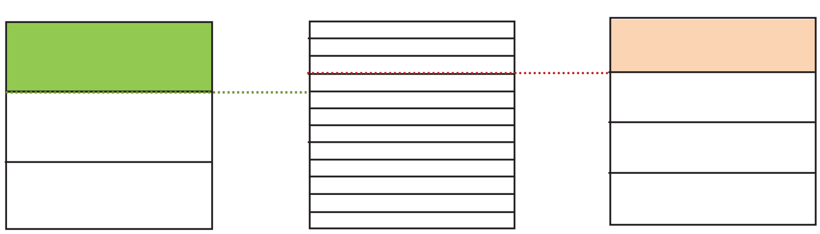

Figura 2: Equivalencia gráfica $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ y $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$

Y de este modo lograron la solución $\frac{7}{12}$ según el sentido "natural" de aumentar para la suma. También se usó de la misma idea para recuperar el sentido de quitar en el caso de la diferencia de fracciones de distintos denominadores. Tampoco se omitió escribir la correspondiente expresión numérica para sintetizar este trabajo. Es decir,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1\times 4}{3\times 4}+\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Podíamos pensar que con esta actividad finalizaban las acciones de enseñanza y aprendizaje para la suma y diferencia de fracciones. Pero ahora, el profesor escribió en la pizarra la suma de dos fracciones arbitrarias (pero susceptibles de visualizarse por plegado de los cuadrados de papel) y su resultado según el algoritmo erróneo clásico de sumar entre sí numeradores y denominadores:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}=\frac{4}{9}$$

No faltó el estudiante que observara que el denominador resultante no "medía" (según su expresión) a ninguno de los denominadores dados; esto es, no contenía a los mismos. El docente insistió en su postura y hubo discusiones. Pero los alumnos ahora tenían un medio de validar el resultado por medio del plegado y por la búsqueda aritmética de fracciones equivalentes; así que varios generaron sus representaciones, con los cuadrados y con los símbolos fraccionarios, y lograron la respuesta correcta. En este punto, el profesor recuperó la noción de múltiplo común para buscar el denominador común. Con ello, los estudiantes accedieron de manera clara y significativa a un algoritmo aritmético para sumar y restar fracciones de denominador diferente: conseguir un denominador común por medio de la búsqueda fracciones equivalentes a las dadas, eligiendo apropiadamente los factores. Con ello se logró una aproximación mejor al "saber sabio" (es decir, el saber académico) (Chevallard, 1997):

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$$

ya que consideramos a la secuencia algorítmica clásica (descripta en el apartado de referentes teóricos) un poco más alejada de este. Sí se realizaron prácticas intensivas para el algoritmo propuesto, ya que no todas las fracciones son representables gráficamente.

El éxito logrado para el trabajo con suma y diferencia de fracciones alcanzó el 87 % en la última experiencia, ya que en las anteriores se logró hasta un 65 %, que de todos modos resultó netamente superior al de los resultados habituales diagnósticos: hasta un 30 %.

Conclusiones

El estudiante que está en el segundo año del nivel medio se encuentra apto para comenzar a desenvolverse en la abstracción propia de la matemática. Pero dicha abstracción ocurre a partir de la experiencia previa con lo concreto. Si esta no está, no hay qué abstraer, que significa "separar por medio de una operación intelectual las cualidades de un objeto para considerarlas aisladamente o para considerar el mismo objeto en su pura esencia o noción" (Real Academia Española, 2000, p.14).

Es cierto que el estudiante puede memorizar un algoritmo y usarlo como si fuera una calculadora. Pero la memoria humana es frágil y la máquina resulta superior en procedimientos algorítmicos. Por el contrario, la razón humana tiene una enorme potencia y por ello es capaz de generar algoritmos. El fin de la educación matemática no es "fabricar personas con códigos de barras" (Alsina, 1995, p.25). Alsina nos recuerda que:

> Tu estudiante de matemática es un ser social. Tiene un contexto, su lengua y sus costumbres, sus experiencias. No desprecies nunca lo que ya sabe y en la forma en que lo sabe. Aprovecha el bagaje y tira de él. Hacia adelante nunca hacia arriba… Sube escalones. Desprecia el ascensor (1995, p.18).

De modo que si el aprendiz no tuvo la experiencia concreta de operar con fracciones, no debería ser enfrentado directamente con algoritmos aparentemente caprichosos.

También hay que considerar que el estudiante se encuentra en una etapa de su vida en que trata de afianzar su personalidad. Esta es frágil aún y todo fracaso contribuye a disminuir su autoestima. Creemos que como una de las maneras de proteger esa autoestima, es el abandono del estudio de la matemática, cuando el mismo no es exitoso.

La experiencia descripta tomó mucho tiempo. No siempre las situaciones propuestas eran replicables exitosamente. Por ello aprendimos a tener mayor cuidado al elegir los problemas y los recursos para cada nuevo grupo de estudiantes. En el entorno escolar muchos consideraban que en la secundaria no se debería 'perder tiempo' en la enseñanza de nociones y procedimientos que corresponden al nivel primario. Pero el aprendizaje de la matemática es acumulativo y helicoidal. Es imposible avanzar significativamente si se carece de los contenidos previos. Y tampoco se puede 'mirar desde más arriba' algo que carece de existencia previa. Una aparente 'pérdida de tiempo' en re-aprendizaje facilita futuros aprendizajes correlativos. La finalidad del trabajo docente es que los alumnos aprendan y progresen. Si encontramos maneras adecuadas para estos propósitos, también nosotros aprendemos y progresamos profesionalmente.

También en esta ocasión rescatamos los sentimientos expresados por los estudiantes luego de lograr resultados satisfactorios tanto durante el proceso de aprendizaje, como en las correspondientes evaluaciones, sintetizados en la aclamación: "¡así quiero aprender!"

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (1995). *Una matemática feliz y otras conferencias*. Buenos Aires: Red Olímpica.

Ander-Egg, E. (1991). *El Taller, una alternativa para la renovación pedagógica*. Buenos Aires: Editorial Magisterio.

Brousseau G., (1993). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*. Córdoba: Editado por I. Dotti y J. Vargas, Universidad Nacional de Córdoba.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Mathiaud, M. (1996). *Enseñar a Partir de Actividades. Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre Saberes, Programas y Prácticas*, 139-158. Point-a-Mouson: Ed. E. Barbin y R. Douady.

Real Academia Española (2000). *Diccionario de la Lengua Española* (21ª ed.). Madrid: Editorial Espasa Calpe S.A.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2) , 133-170.