GEOMETRÍA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

José Fermín Berríos Piña y Jairo Naranjo
UPEL Instituto Pedagógico Rural El Mácaro Venezuela
joseferminp@gmail.com, jaironaranjo1@hotmail.com

Resumen. La geometría ha estado presente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, desde épocas muy remotas, está permite: la formación del razonamiento lógico, el desarrollo de habilidades cotidianas para que el estudiante se oriente reflexivamente en el espacio, hacer estimaciones sobre formas y distancias, para hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio. En el presente taller se trata la geometría en el plano complejo, donde sus conceptos no cambian por tal hecho, pero las ecuaciones de los lugares geométricos tienen otra presentación debido a la variable compleja.

Interpretar geométricamente las operaciones con los números complejos permitirá a los participantes tener mucho cuidado con el lenguaje técnico de la matemática, al operar en forma geométrica los resultados pueden hallarse con sólo utilizar regla y compás, proporcionándole al estudiante la habilidad para pasar de resultados geométricos a resultados algebraicos y recíprocamente.

Palabras clave: geometría, lugar geométrico, plano complejo

Abstract. Geometry has been present in the process of teaching and learning, since very remote times, is allows: the formation of logical reasoning, developing skills everyday so reflexively student to orient in space, make estimates of forms and distances, to make assessments and calculations relating to the distribution of objects in space. In this workshop is the geometry in the complex plane, where their concepts do not change by this fact, but the equations of loci have another presentation due to the complex variable. Geometrically interpret operations with complex numbers will allow participants to be very careful with the technical language of mathematics, to operate in geometric form results can be found only by using ruler and compass, providing students the ability to pass results geometric to algebraic results and interactively.

Key words: geometry, locus, complex plane

Introducción

La teoría de los números complejos es parte de la formación de los estudiantes de bachillerato, en noveno grado de educación básica, de la República Bolivariana de Venezuela, cuando se define la raíz cuadrada de un número real se le hace conocer al estudiante que la cantidad subradical no debe ser negativa, porque no existe un número real negativo que elevado al cuadrado sea negativo; sin embargo se le indica al estudiante que en el siguiente año escolar se estudiará un conjunto numérico donde esa situación problemática si es posible, generándose así la curiosidad por conocerlos. En el primer año de Ciencias aparecen los objetivos que harán comprender y manejar los conceptos, operaciones, propiedades básicas, representaciones geométricas, las diferentes formas de presentar a un números complejo, forma cartesiana, binómica y polar.A nivel superior se encuentran muchas carreras universitarias que requieren de esta teoría y su profundización, tales como la ingeniería, la licenciatura de matemática, física y en el caso de las carreras pedagógicas de matemática y física. Merece atención, los ejemplos que requieren el conocimiento básico de la teoría de números complejos para poder llegar a la solución de algunos ejercicios y problemas planteados, una ecuación de segundo grado con soluciones complejas, por nombrar alguno. En este nivel nos encontramos con una realidad, algunos bachilleres desconocen la teoría de los números complejos, y una gran cantidad de ellos con deficiencias al trabajar con tales números, al pedir a los estudiantes que se indique un número que no sea real, son pocos los que proporcionan el ejemplo correspondiente.

Las operaciones con los números complejos casi siempre se realizan en forma algebraica, aquí le vamos agregar el componente geométrico, es decir, realizaremos las operaciones en este campo, en forma geométrica. Permitiendo que el alumno visualice e interprete los resultados para desarrollar habilidades en el cálculo con números complejos. Se requiere que el estudiante exprese algebraicamente las condiciones que caracterizan a un conjunto de números complejos representado gráficamente, (Aznar, 2009) la habilidad de efectuar conversiones del registro gráfico al registro algebraico, en el tema estudiado, no está internalizada en los alumnos, a pesar de que, en el cursado de la asignatura se había trabajado arduamente con conversiones en el sentido contrario. Es necesario abordar sistemáticamente el trabajo con conversiones del registro algebraico al registro gráfico en ambos sentidos, puesto que favorece la conceptualización del objeto matemático en estudio.No se suele tomar como solución a un problema una representación gráfica si no está acompañada de la correspondiente resolución formal, generalmente desarrollada en el registro algebraico o simbólico. De igual manera, las conversiones que se proponen en la ejercitación de ciertos temas contemplan sólo los casos de paso del registro algebraico al gráfico, pero no en el sentido contrario, bajo la suposición de que son análogos, y que si un estudiante es capaz de efectuar la transformación en un sentido también podrá hacerlo en el sentido contrario. Para el paso del registro gráfico al algebraico, se requiere un esfuerzo cognitivo superior, del estudiante, pues debe descubrir cuáles son los rasgos del gráfico que caracterizan la representación y traducir esto a una ecuación o inecuación. La imposibilidad para concretar tales transformaciones genera dificultades en el aprendizaje, obstaculizando la conceptualización del objeto de estudio.

Desarrollo

Durante siglos la geometría ha sido fundamental en la formación académica desde edades tempranas. Su importancia radica en la formación del razonamiento lógico. Pocos son quienes discuten su trascendencia tanto en estudios posteriores de cualquier ciencia como en el desarrollo de habilidades cotidianas.Un conocimiento geométrico básico es indispensable para desenvolverse en la vida cotidiana: para orientarse reflexivamente en el espacio; para hacer estimacionessobre formas y distancias; para hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio. La geometría está presente en múltiples ámbitos del sistema productivo de nuestras actuales sociedades (producción industrial, diseño, arquitectura, topografía). La enseñanza de la Geometría ha tenido tradicionalmente un fuerte carácter deductivo. En educación secundaria, la Geometría se ha venido apoyando en el lenguaje del álgebra, en el álgebra vectorial. Las investigaciones sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico parecen indicar, no obstante, que éste sigue una evolución muy lenta desde unas formas intuitivas iniciales de pensamiento, hasta las formas deductivas finales, y que éstas se corresponden a niveles escolares bastante más avanzados. A partir de situaciones que resulten familiares para los estudiantes (recorridos habituales, formas de objetos conocidos) y mediante actividades manipulativas, lúdicas (plegado, recorte, modelado, etc.), el profesor puede fomentar el desarrollo de los conceptos geométricos contemplados en el currículo.Luego de la presentación y de fijar los propósitos el taller comienza con una pregunta a los participantes, para romper el hielo, ¿en qué momento de su vida estudiantil se encontraron con los números complejos?, esto genera un proceso de discusión entre ellos. Luego se pregunta ¿alguno de ustedes puede indicar una aplicación de los números complejos en la vida real?, para discutir nuevamente sobre el uso de los números complejo.

Terminada la actividad anterior el talleristas hablará algo de historia de los números complejos, En el presente, se tratan los aspectos históricos más importantes sobre los números complejos, los cuales son fundamentales para cualquier desarrollo didáctico de este tema dentro del aula y sirve para motivar a los docentes y estudiantes hacia el estudio de este y otros temas que puedan surgir. Además, se espera que resuelva esa inquietud que surge en los estudiantes: ¿Por qué los números complejos? ¿De dónde surgen? ¿Por qué se llaman complejos o imaginarios? Trasladándose a el siglo XV y XVI con los matemáticos Scipione del Ferro, 1465-1526, Annibale Nave, Antonio María Fiore, Niccolo Fontana (Tartaglia), 1499-1557, del Girolamo Cardano, 1501-1576, Ludovico Ferrari, 1522-1565, entre otros, se hace notar como Cardanologra que Tartaglia le transfiera su secreto del proceso de resolución de la ecuación cúbica y el por qué rompe con el acuerdo de no publicarlo. Se presenta una lámina donde se hace ver que los números complejos pueden presentarse en forma: cartesiana,binómica, polar o trigonométrica y exponencial y que todas son equivalentes; pasando luego a definir al conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos en forma cartesiana e identificando a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2, \mathbb{C} = \{z = (a, b) | a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$Indicando que a es la parte real y b es la parte de imaginaria y se denotan$Re(z) = a$y $Im(z) = b$, en caso de $b = 0$ el número se llama complejo real puro, si $a = 0$ el número será complejo imaginario puro. Es común denotar a los números complejos así: $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_n$o simplemente z,w cuando no haya peligro de confusión.Se define la igualdad de dos números complejos $z_1 = z_2$ si $Re(z_1) = Re(z_2)$ y $\mathrm{Im}(z_1) = Im(z_2)$.Se presentan ejercicios de identificación y para aplicar el concepto de igualdad.En las siguientes láminas se definen dos operaciones la suma y el producto de números complejos en forma cartesiana; se representa geométricamente en el plano complejo o plano de Argand en forma cartesiana y en formar vectorial. (Jiménez, 2013) es importante conocer las propiedades que cumplen las operaciones sobre los números complejos, que lo dotan de estructura de cuerpo conmutativo. El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos junto con las operaciones de adición y multiplicación hacen que ($\mathbb{C}$, + , .) tenga estructura de cuerpo:se analizarán cada una de la propiedades, sin demostrar, en caso de ser necesario se hace la demostración de alguna de ellas. Se define diferencia y el cociente en forma cartesiana y luego se procede a realizar ejercicios de operaciones aritméticas en $\mathbb{C}$. La unidad imaginaria es el número imaginario puro (0,1) y se denota como *i*. *i* = (0,1). Se establece un isomorfismo entre el conjunto $A = \{(a, b) \in \mathbb{C} | b = 0\}$ y el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con la intención de hacer la convención $z = (a, 0) = a$ y poder así trabajar los números complejos en forma binómica $z = a + bi$.

Se presenta un diagrama de Venn donde se observa que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, y $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Se define la operaciones en forma binómica se realizan ejemplos y se plantean ejercicios para trabajar en clase. Interpretamos geométricamente la suma,aprovechando la representación vectorial, para indicar que para sumar dos números complejos se puede aplicar la regla del paralelogramo o también la regla del polígono, se plantean ejercicios utilizamos aquí el método de deducción. Se ejemplifica. Para hallar la diferencia de dos números complejos, se le suma al minuendo el opuesto del sustraendo. $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ utilizamos el método de inducción planteamos primero los ejemplos y luego se pide generalizar la regla. Multiplicación de un número real puro x por un complejo $a + bi$, $x(a + bi)$, se analiza geométricamente los diferentes casos $-1 < x < 0$, $x = -1$, $x < -1$, $0 < x < 1$, $x = 1$, $x > 1$, se realizan ejercicios en este caso el vector resultante se hace menor, igual o de mayor longitud y en el sentido contrario, sí x es negativo y en el mismo sentido si x es positivo. Multiplicación de un número complejo imaginario puro iy por un complejo $a + bi$, $yi(a + bi)$, al igual que en el caso anterior se analiza geométricamente los casos $-1 < y < 0$, $y = -1$, $y < -1$, $0 < y < 1$, $y = 1$, $y > 1$, el vector resultante es de menor, igual o mayor longitud pero rotado 90° en sentido horario o anti horario según y sea negativo o positivo respectivamente. Se realizan ejercicios. En cuanto a la interpretación geométrica del producto de dos números complejos $z = x + yi, w = a + bi$, $z.w = (x + yi)(a + bi) = x(a + bi) + yi(a + bi)$, se tendría las sumas de los números complejos donde el primer sumando es un número real puro por un complejo y el segundo sumando es el producto de un imaginario puro por el mismo complejo, en base a lo visto anteriormente el primer sumando se hace menor, igual o de mayor longitud y en el sentido contrario, sí x es negativo y en el mismo sentido si x es positivo y el segundo sumando es de menor, igual o mayor longitud, rotado 90° en sentido horario o anti horario según y sea negativo o positivo respectivamente, y para finalizar la regla del paralelogramo para sumar los resultados, se plantean ejercicios, se hace la observación que el cociente de dos números complejos lo haremos en forma trigonométrica. Se definen el conjugado de un número complejo y se presenta algunas de sus propiedades. Se define el módulo, argumento y argumento principal de un número complejo y se interpreta geométricamente, se plantean algunas consideraciones con respecto al argumento principal para luego definir la forma trigonométrica o polar de $z = a + bi$ como $z = |z|(cos\alpha + isen\alpha)$, se realizan ejercicios.se indica como sumar o restar ángulos utilizando regla y compás, se realizan ejercicios.Se indica como multiplicar o dividir geométricamente dos longitudes dadas, utilizando regla y compás, se hacen ejercicio. Se define como se multiplica y como se divide en forma trigonométrica dados dos números complejos, $z = |z|(cos\alpha + isen\alpha), w = |w|(cos\beta + isen\beta)$su producto es $zw = |z|.|w|(\cos(\alpha + \beta) + isen(\alpha + \beta))$, y su cociente $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha - \beta) + isen(\alpha - \beta))$.Se interpreta geométricamente y se realizan ejemplos. Se define la raíz enésima de un número complejo z, si w_k es una raíz enésima de z entonces $|w_k| = \sqrt[n]{|z|}$ y su argumento principal es $Arg\, w_k = \frac{Arg\, z + 2k\pi}{n}$con $k = 0,1,\cdots,n-1$ se plantean ecuaciones para hallar z tales como:$z^3 - 1 = 0, z^5 - 1 = 0, z^3 + i = 0, z^2 + 5iz - 1 + 4i = 0$ Se interpreta geométricamente.

Uno de los objetivos del taller es trabajar la geometría analítica, en el plano complejo, donde las ecuaciones de los diferentes lugares geométricos sean tratadas con variable compleja. (Vera, 2013) después de haber identificado a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, el modulo $|\quad|$ con la norma euclidea$\|\quad\|_2$ y la distancia $|z - w|$ con la distancia euclidea $\|z - w\|_2$ quedan definidas en el plano complejo todas las nociones geométricas y topológicas habituales del espacio euclideo$(\mathbb{R}^2, \|\quad\|_2)$.Así $|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2$ nos permite trabajar en el plano complejo, la geometría analítica.Se define lugar geométrico y se indica que se hallarán las ecuaciones en variable compleja de algunos lugares geométricos notables. Se presentan las propiedades autilizar y que serán de gran utilidad, $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ .El segmento de extremo $z, w \in \mathbb{C}$ es el conjunto $\{(1-t)z + tw \mid 0 \leq t \leq 1\}$para ejemplificar.Se trabaja con ecuaciones de la recta en variable compleja $Az + B\bar{z} + C = 0$representa la ecuación general de la recta, siempre que A y B sean conjugados y $C \in \mathbb{R}$. Se visualizan las ecuaciones para los casos de rectas horizontales, verticales y oblicuas; se presentará las fórmulas para pendiente y las intersecciones con los ejes. Se proporcionarán ejemplos y luego se proponen ejercicios como actividad el taller.

Se define la circunferencia de radio $r > 0$ y centro el punto $z_0$como él conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r, r > 0\}$, Luego se analizan los casos para la gráfica de la ecuación dependiendo si la relación entre $|z - z_0|$ y r es $<, \leq, >, \geq$ así como el caso de $r_{1<}|z - z_0| < r_2$Se realizan ejercicios, dada la ecuación de la circunferencia en variable complejas, construir la gráfica en el plano complejo.Dada la gráfica en el plano complejo hallar la ecuación de la circunferencia en el plano complejo, también se ejercitaen la transformación de las ecuaciones en variable compleja a la ecuación en variable real. (Derrick, 1987) Las secciones cónicas proporcionan ejemplos adicionales de los conceptos vistos hasta ahora. Aunque pueden utilizarse las formulas usuales de la geometría analítica (con $x = Re(z)$ y $y = Im(z)$), es fácil definir las secciones cónicas en términos de distancia.Se define la elipse de focos z_0, z_1, al conjunto de todo los puntos z del plano complejo tales que la suma de su distancias a los dos focos z_0 y z_1, es constante y su ecuación es $|z - z_0| + |z - z_1| = k, k > 0$. Se realizan ejemplo se plantea en ejercicio como actividad a realizar en el taller.La parábola se define como el conjunto de todo los puntos z del plano complejo cuyas distancia a un punto fijo z_0, llamado foco es igual a su distancia de una recta fija del plano, llamada directriz y la ecuación de la parábola de eje focal vertical es$|z - z_0| = |Im(z) - k|$ y la de eje focal horizontal $|z - z_0| = |Re(z) - h|$. Se realizan ejemplo se plantea en ejercicio como actividad a realizar en el taller. Se define la hipérbola de focos z_0, z_1, al conjunto de todo los puntos z del plano complejo tales que el valor absoluto de la diferencia entre las distancias de z a dos puntos fijos, z_0, z_1 llamados focos, es constante k real positiva. La ecuación de la hipérbola es $\big||z - z_0| - |z - z_1|\big| = k$. Se realizan ejemplo se plantea ejercicios como actividad a realizar en el taller.

Conclusiones

Basados en nuestra experiencia podemos representar muchas curvas en el plano cartesiano, existen métodos que nos ayudan hacer tales representaciones, por ejemplo la derivada nos permite determinar intervalos de monotonía, valores extremos, concavidad, convexidad y asíntotas. En ocasiones con sólo ver la ecuación de la curva nos damos una idea de la forma que tiene. Este taller permite a los participantes adquirir destrezas para pasar de una representación algebraica a una representación geométrica y viceversa, podemos solventar las dificultades que se le presentan al estudiante al momento de pasar de una representación geométrica a una representación algebraica.

Referencias bibliográficas

Aznar, M., Distéfano, M., Massa, S., Figueroa, S. y Moler, E. (2009). *Transformación derepresentaciones de Números Complejos del registro gráfico al algebraico: un análisis desde la Teoría de Registros Semióticos*. Recuperado el 20 de abril de 2013 dehttp://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_25/prop_07.pdf.

Churchill R. V. y Brown, J. W. (1992). *Variable Compleja y Aplicaciones*. España: Editorial MacGraw Hill.

Cuartero, B. y Ruiz, F. j. (2004). *Teoría de funciones de variable compleja*. Recuperado el 20 de abril de 2013 de www.ce-mat.org/cdc/Variable_compleja.pdf.

Derrick, W. R. (1987). *Variable compleja con aplicaciones*. (2a. ed.). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dettman, J. W. (1965). *Applied Complex Variables*. New York: Dover publications

Hauser, A. A. (1973). *Variable Compleja*. Colombia: Fondo EducativoInteramericano.

Hernández, A. J. (1975). *Funciones de variable compleja*. Valencia: Universidad de Carabobo.

Jiménez, J. (2013). *Los números complejos en bachillerato*.Recuperado el 20 de abril de2013 dehttp://www.sociedadelainformacion.com/geogebra/complejos.pdf

López, G. J. (2001). *Ecuaciones diferenciales y variable compleja*. España: Editorial Prentice Hall.

Spiegel, M. R. (1991). *Variable compleja*. México: Editorial MacGraw Hill.

Trejo, A. C. (1974). *Funciones de la variable compleja*. México: Editorial Harla.

Vera, G. (2013). *Lecciones de Análisis Complejo*. Recuperado el 20 de abril de 2013 de http://webs.um.es/gvb/AC/LeccionesAC.pdf

Wunsch, A. D. (1997). *Variable compleja con aplicaciones*. (2a. ed.). México: Editorial Pearson Educación.