CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Isabel Maturana Peña, Marcela Parraguez González y Miguel Rodríguez Jara
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl, mrodriguez@upla.cl

Resumen. Como parte del Proyecto DI-PUCV 037.495-2013 y basados en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), investigamos desde una postura cognitiva las construcciones y mecanismos mentales necesarios para (re)construir la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Diseñamos una descomposición genética del teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, esto es, investigar, mediante la metodología utilizada en la teoría APOE propuesta por Dubinsky y el grupo RUMEC. Reportamos en este trabajo; un caso de estudio, cuyos resultados muestran que los estudiantes construyen el concepto de coordenadas de un vector como objeto, pero no la generalización de ese proceso hacia una matriz de coordenadas.
Palabras clave: matriz asociada, transformación lineal, teoría APOE
Abstract. As part of Project PUCV 037.495-2013 DI-theory based and APOE (Actions, Processes, Objects and Schemes), we analyzed from a cognitive stance mental constructs and mechanisms necessary to (re) construct the Associated Matrix to a Linear Transformation. We designed a genetic decomposition of the Associated Matrix to a Linear Transformation theorem, that is, investigate, using the methodology of APOS theory proposed by Dubinsky and RUMEC group. Here we report a case study whose results show that students, construct the concept of coordinates of a vector as an object, but not the generalization of this process to an array of coordinates.
Key words: matrix, linear transformation, APOS theory

Introducción

Nos propusimos investigar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego en la (re)construcción que hacen del teorema matriz asociada a una transformación lineal, dicho teorema estableceque; sean *V* y *W* espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K, $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de *V* y $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base de *W*. Los vectores $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ están en *W* y por lo tanto, cada uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base *B'*:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m. \end{aligned}$$

En otras palabras, $[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \dots [T(v_n)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$; y la matriz asociada a la transformación lineal *T* en las bases *B* y *B'*, que rotulamos como $[T]_B^{B'}$ es $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, tal que $[T]_B^{B'}[v]_B = [T(v)]_{B'}$, para todo *v* en *V*.(Poole, 2006).

Consideramos son dos las principales razones de por qué es importante el aprendizaje de este teorema. En primer lugar, el Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, proporciona una manera eficiente de llevar las transformaciones lineales a un equipo digital. La segunda razón es teórica; consideremos *A*matriz asociada a una transformación lineal *T*, esta elección depende de bases *B* y *B'*, normalmente uno elegiría *B* y *B'* para hacer el cómputo de matrices de coordenadas, tan simple como sea posible, cuando esto se hace en la forma correcta la matriz *A* puede proporcionar información importante sobre la transformación lineal.

Como objetivos de Investigación nos propusimos determinar las construcciones y mecanismos mentales que pone en juego un individuo como estrategia cognitiva para construir elTeorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. En el lenguaje de la teoría APOE: diseñar y evidenciar una descomposición genética del teorema.

Teoría APOE

La investigación usó la teoría APOE desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC(Research in UndergraduateMathematicsEducationCommunity). Actualmente en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014) se presentan los elementos de la teoría y su uso en investigaciones en Educación Matemática. Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, y reversión. Estos originan diferentes construcciones mentales: acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Consideremos un fragmento *F* de conocimiento matemático –Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal –. Un individuo posee una concepción acción de *F* si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de *F* si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, donde realiza y construye transformaciones sobre su totalidad ha encapsulado el proceso en una concepción objeto de *F*. Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. La coherencia es la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado.

Una descomposición genética, (DG), describe en detalle los aspectos constructivos de *F* para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales. Tal DG no es única, pues depende de los caminos de construcción y de las estructuras mentales previas.

Metodología de la investigación

En esta investigación se propuso comprender los procesos mentales que operan en las estrategias de aprendizaje delTeorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal; para ello, se utilizará la teoría cognitiva APOE como marco teórico y metodológico, al cual se le incorpora el estudio de caso (Stake, 2010). Los estudio de caso son particularmente apropiados para realizar investigaciones en un determinado periodo de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad de su enseñanza-aprendizaje Arnal, J. del Rincón, D., y La Torre, A. (1992).Las unidades de estudio fueron alumnos chilenos de una universidad del país, de las carreras de pedagogía y licenciatura en matemática. Los estudiantes de esta unidad de estudio trabajada como "caso", se vinculan con las siguientes categorías e indicadores: estudiantes exitosos académicamente, experiencias previas, avance curricular, ejercitan ampliamente en matemática, estudiantes voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores.

Se trabajó con una unidad de análisis de 20 estudiantes, atendiendo a los criterios antes mencionados y se diseñaron protocolos de entrevistas semi-estructuradas, previstas por la teoría las cuales se video grabaron.Al caso de estudio se le aplicó el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual estableció: un análisis teórico, conocido como DG; un diseño, basado en la DG teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Arnon et al., 2014). La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que realizan los estudiantes; y a partir del análisis de los datos obtenidos, se lo puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos.

Descomposición genética hipotética

A continuación presentamos parte del relato de la descomposición genética propuesta en la investigación para construir la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Bajo la hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, sostenemos que:

Para que un estudiante construya la Matriz Asociada a una Transformación Lineal como objeto, es necesario que muestre una construcción objeto del concepto espacio vectorial de dimensión finita, de esta forma consideramos dos espacios vectoriales *V*y *W*, con dimensiones finitas:

digamos n y m respectivamente, para luego, desencapsular de este objeto; por una lado bases ordenadas $B=\{v_1,v_2,\ldots, v_n\}$ y $B'=\{w_1,w_2,\ldots, w_m\}$ de los espacios$V$ y Wrespectivamente como procesos y la pertenencia de un vector w al espacio vectorial W, también como proceso. Paso seguido se dan dos coordinaciones de los procesos antes mencionados a través, uno de la transformación lineal y el otro por medio de la combinación lineal de vectores. Específicamente, la primera coordinación, mediante la transformación lineal, es entre los procesos de las bases ordenadas B y B'de V y W respectivamente, donde se calculan mediante la transformación lineal las imágenes de los vectores de la base B. La segunda coordinación es entre los procesos base ordenada B' de W, con la pertenencia de un vector w a W, se coordina a través de la combinación lineal de vectores, dando origen al proceso de expresar w como combinación lineal de los vectores de la base ordenada B' de W, este nuevo proceso se encapsula en el objeto coordenada de vector w en la base B', es decir, $[w]_{B'}$.En figura 1 se muestra en el esquema la coordinación de los procesos que se obtienen de desencapsular el objeto coordenada y el proceso que obtuvimos de la coordinación mediante la transformación lineal, ambos nuevamente serán coordinados por la generalización dada por el cuantificador que determina que el proceso se repetirá en todos los vectores de la base ordenada B de V, de esta forma se obtiene la matriz de coordenadas , es decir un ordenamiento de lascoordenadas de la imágenes, este proceso es encapsulado en el objeto matricial y rotulado como $[T]_B^{B'}$

Por otra parte, la DG da cuenta de la desencapsulación de los objetos matriz rotulada de coordenadas y las coordenadas de un vector v de V, ambos objetos desencapsulados como procesos son coordinados por el producto matricial, formando una matriz resultante de dicho producto, es decir $[T]_B^{B'}[v]_B$ lo cual es un proceso el que se podrá encapsular en un objeto matricial y posteriormente rotular como $[T(v)]_{B'}$

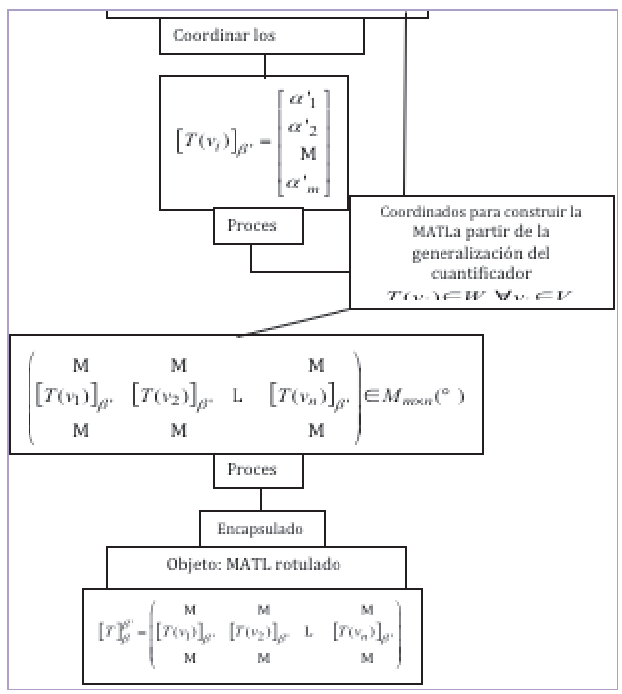

Figura1. Detalles de la DG de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal.

En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Diseñamos un cuestionario de 5 preguntas, con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir la Matriz Asociada a la Transformación Lineal. Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las preguntas.Hemos seleccionado dos preguntas del cuestionario, para mostrar parte de las evidencias obtenidas, que a continuación serán analizadas a la luz de la DG.

Pregunta 4 del cuestionario

Determine la matriz asociada a la transformación lineal definida desde $IP_2[x]$ (polinomios de grado menor o igual a dos) a $\mathbf{R^3}$ *,por $T(ax^2+bx+c)=(a+ c, a-b, b)$, en las bases $B_4=\{x^2,x^2+x, x^2+x +1\}$ y $B_5=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,01)\}$ de $IP_2[x]$ y* $\mathbf{R^3}$ *respectivamente.*

La pregunta propone determinar si el estudiante muestra una construcción proceso del Teorema Matriz Asociada a Transformación Lineal. Para ello, como se muestra en la figura 1, se considera el tramo en la DG, donde debe coordinar los procesos e incorporar la generalización.

Es así que el estudiante da evidencias de tener una construcción proceso producto de la generalización de la matriz constituida por las coordenadas de las imágenes de los vectores de la Base B_4.En la respuesta esperada**,** un estudiante debe calcular las imágenes de los vectores de la base B_4, es decir: $T\left(x^2 \right)=\left(1,\ 1,\ 0\right)$, $T\left(x^2+\mathrm{x} \right)=\left(1,\ 1,\ 1\right)$ y $T\left(x^2+\mathrm{x}+1 \right)=\left(2,\ 0,\ 1\right)$. De esta forma calcula las coordenadas de cada vector imagen, es decir $\left(1,\ 1,\ 0\right)=\alpha_1(1,1,0)+\beta_1(0,1,0)+\delta_1(0,0,1)$, $\left(1,\ 1,\ 1\right)=\alpha_2(1,1,0)+\beta_2(0,1,0)+\delta_2(0,0,1)$ y $\left(2,\ 0,\ 1\right)=\alpha_3(1,1,0)+\beta_3(0,1,0)+\delta_3(0,0,1)$, de esta forma se obtienen los valores de las coordenadas de cada vector imagen, ordenado los sistemas que se obtienen en una matriz se tiene $\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, de donde la Matriz Asociada a una Transformación Lineal corresponde a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pregunta 5 del cuestionario

Considere la transformación lineal $F:\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \to \langle x^2, x+1\rangle$, *definida por* $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$*; donde* $B=\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle$ *y* $B'=\langle x^2, x+1\rangle$ *determine las coordenadas de la imagen del vector* $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

La pregunta permite observar si la construcción de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal es un objeto encapsulado del cual se reconoce su propiedad de continuar siendo una función.En la respuesta esperada, un estudiante para determinar las coordenadas del vector, debe aplicar $[F]_B^{B'}[v]_B = [F(v)]_{B'}$,por lo que se tiene que las coordenadas del vector pedidas son: $[F(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$.

El desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación presentamos una selección del trabajo realizado por cuatro estudiantes del caso a las preguntas antes descritas.

Análisis a posteriori Pregunta 4

La figura 2, E4 muestra una construcción objeto del concepto Matriz Asociada a una Transformación Lineal; al describir la construcción indicando las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base del espacio de partida, en un arreglo matricial.

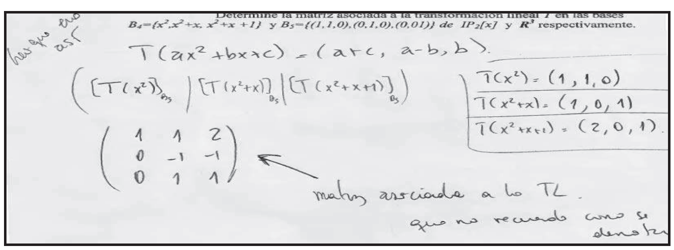

Figura 2. Produccion del estudiante E4.

Esto nos permite decir junto con su trabajo a las otras preguntas que coordina las construcciones proceso de la imagen de un vector con el concepto de matriz, mediante la base, lo que hemos entendido como la generalización de los procesos de formación de las coordenadas de las imágenes mediante la transformación lineal.

Opuestamente a E4, en la figura 3 se muestra la producción de E3, al que se le dificulta dar respuesta.

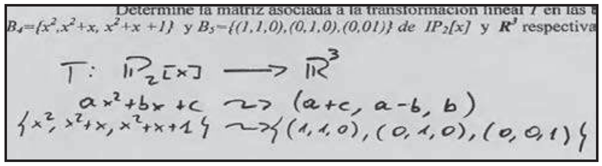

Figura 3: Produccion del estudiante E3

E3, no puede dar respuesta a la pregunta, pero en sus respuestas a las preguntas anteriores mostró una construcción proceso del concepto coordenadas de la imagen de un vector, esto es la construcción de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, a pesar de necesitar el concepto de coordenadas no es suficiente para asegurar su construcción.

Análisis a posteriori Pregunta 5

La figura 4 muestra,la respuesta de E12 a la pregunta 5.

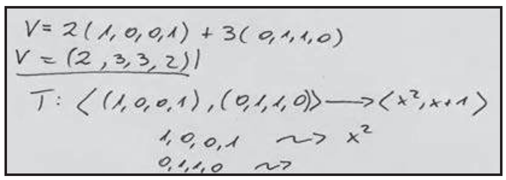

Figura 4: Respuesta que realiza el E12.

A la luz de la DG, podemos argumentar que no ha construido el conceptoMatriz Asociada a una Transformación Lineal, pues a pesar de mostrar una construcción proceso del concepto combinación lineal y de base de un espacio vectorial, no le alcanza para dar respuesta, en las preguntas anteriores construye las coordenadas, peo no construye la matriz, lo que constituye un obstáculo para lograr dar respuesta a una pregunta que le pide operar con ella.Por el contrario el estudiante E9muestra según figura 5, la Matriz Asociada a una Transformación Lineal como una construcción mental objeto, la que desencapsula permitiéndole realizar transformaciones sobre él, y llegar a construir TMATL.

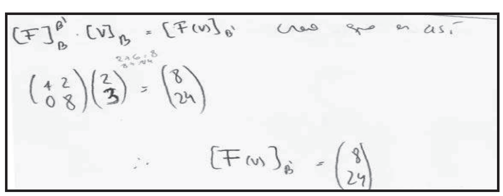

Figura 5: Respuesta que realiza el E9.

Conclusiones

La DG propuesta en la investigación ayudó a describiralgunas de las dificultades de aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, y por ende de su teorema Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Es así, que se obtuvo como consecuencia que la coordinación de las construcciones proceso de los conceptos de coordenadas de la imagen de un vector y el proceso matriz a partir de la generalización del cuantificador,es una falencia en el caso estudiado. Prueba de ello es E3, que construye el concepto de coordenada como objeto, sin embargo no puede generalizarlo a la matriz como objeto.Por otro lado, otros mecanismos que muestran debilidad en los informantes para la construcción del TeoremaMatriz Asociada a una Transformación Lineal, esto es, los estudiantes aun habiendo construido la matriz no pueden aplicar el teorema, esto podría deberse, por una parte a que no construyen como objeto la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, esto es rotulan antes de tiempo un objeto mal construido y es así que no se alcanza la construcción del Teorema Matriz Asociada a una Transformación Linealcomo objeto. Para el caso de estudio, la construcción del Teorema Matriz Asociada a una Transformación Lineal como proceso no es alcanzada por la totalidad de los estudiantes, sólo cinco de estos lograron coordinar los procesos descritos en la DG para construir como objeto.

Para finalizar, en cuanto a la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, los dos temas substantivos, según nuestros datos, transformación lineal y matriz de coordenadas; los resultados de la investigación indican, para el caso estudiado, que el concepto de coordenadas de la imagen de un vector, por medio de una transformación lineal no representa dificultad a los estudiantes, sin embargo la generalización de este, es un obstáculo para alcanzar la construcción del objeto Matriz Asociada a una Transformación Lineal .Los estudiantes que conforman esta unidad de estudio, excepto dos, no logran construir la matriz asociada a la transformación lineal como objeto.

Reconocimientos. Los autores manifiestan sus agradecimientos por la buena disposición de todos los participantes en la investigación.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer.

Arnal, J. del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

Poole, D. (2006). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna*. México: Thomson Internacional.

Stake, R. E. (2010). *Investigaciónconestudio de casos*. Barcelona: Labor.