PRERREQUISITO PARA EL TRATAMIENTO DEL LÍMITE FUNCIONAL: INECUACIONES

Ana María Narvaez, Clarisa Noemí Berman yMarcela Rodriguez
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Mendoza. Argentina
ana.narvaez@frm.utn.edu.ar, bercla@gmail.com, iqborbollon@speedy.com.ar

Resumen. Las investigaciones realizadas sobre el tema Límite Funcional (Narvaez et al., 2009, 2010 y 2011) desde la teoría APOE nos permitieron ver la necesidad de revisar la enseñanza de algunos temas, como es el caso de las inecuaciones. El objetivo del presente trabajo es elaborar un conjunto de actividades basadas en una metodología que sustente una mejor enseñanza y aprendizaje de inecuaciones, realizando una descomposición genética del concepto. Entre las conclusiones obtenidas en esta etapa, se destaca la necesidad de hacer hincapié o favorecer la resolución de actividades que requieran de la interpretación y resolución tanto algebraica como gráfica de inecuación. En otras palabras, diseñar actividades de acuerdo a la concepción *esquema* de inecuación (en el sentido de la teoría APOE). Es importante concientizar a la comunidad docente sobre la relevancia del tratamiento del que debe ser objeto el tema en cuestión.
Palabras clave: inecuaciones, teoría APOE, descomposición genética

Abstract. The research into the Functional Limit (*Límite Funcional*, Narvaez et al., 2009, 2010 and 2011) from the APOS Theory, allowed us to realize the need of reviewing the teaching of some topics, such as inequalities. The aim of this work is to elaborate a set of activities based on a methodology that supports better techniques of teaching and learning of inequalities, by doing a genetic decomposition of that concept. Among the conclusions obtained at this stage, it is necessary to emphasize or favor the resolution of activities that require the interpretation and solving of inequality, both algebraically and graphically. This is to say, to design activities according to the conception of inequalities *schema* (according to the APOS Theory). It is important to make the teaching community aware of the importance of the way the present subject should be handled
Key words: inequalities, APOS theory, genetic descomposition

Introducción

La enseñanza universitaria de Matemáticas en carreras de Ingeniería, es tema de análisis desde hace varios años no sólo en nuestro país. Los estudios psicológicos de Piaget (1972), Vergnaud (1982) y Dubinsky (1996), entre otros, han contribuido científicamente en tales discusiones. En particular, para el tema de inecuaciones es de destacar el trabajo de Alvarenga (2003).

Como es bien conocido, el estudio de inecuaciones implica varias nociones que deben encadenarse coherentemente, tales como la estructura de orden en el conjunto de números reales, funciones, análisis de gráficos de funciones, operaciones lógicas de implicación y equivalencia, entre otros, que por lo observado ha tenido una comprensión limitada por parte de los actores de la comunidad universitaria. Por otra parte, se destaca que este contenido disciplinar es una fuente casi inagotable de cambios entre registros de representación semiótica (Duval, 1991), lo que es aprovechado en el proceso de enseñanza.

El propósito del presente trabajo es entender la problemática que presentan los estudiantes de primer año de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional en este tema, para diseñar un material didáctico que les permita superar obstáculos cognitivos.

Antecedentes

En el trabajo de investigación en Matemática Educativa que se viene realizando en la Facultad Regional Mendoza respecto de la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite desde 2009 y, hasta la fecha, en los cursos de primer año, se han obtenido las siguientes conclusiones: a) los alumnos conocen las técnicas de cálculo para límite funcional pero no logran darle significado, más aún no logran interpretarlo; b) los ingresantes no están habituados a participar activamente en sus aprendizajes y, difícilmente pueden realizar análisis críticos de los resultados que obtienen; c) los docentes no utilizan generalmente situaciones didácticas que permitan una mayor participación del estudiante, lo que puede revertirse haciendo uso de las herramientas que brinda la Didáctica de la Matemática universitaria y las Teorías Cognitivas.

En otras palabras, se puede decir que en esta etapa se concluyó que los estudiantes no habían alcanzado un nivel *objeto* según la teoría APOE del concepto límite funcional y parte de la dificultad de la comprensión del mismo estaba relacionada con el hecho de no haber alcanzado un nivel *esquema* de conceptos previos como inecuaciones y funciones reales. Si bien estos conceptos se desarrollaron en el aula, se había seguido lo que se conoce como metodología "tradicional" en el sentido de Alvarenga. Entiéndase por *enseñanza tradicional a un sistema pedagógico que no se fundamenta en una investigación científica en educación matemática y que, en general, no ha logrado avances en el aprendizaje de los conceptos matemáticos* (Alvarenga, 2003, p. 2).

Objetivo

Por lo expuesto precedentemente, en este trabajo se pretende lograr que los estudiantes alcancen el nivel cognitivo *esquema* según la teoría APOE en el tema "inecuaciones en reales", elaborando una Descomposición Genética.

Teoría APOE

Para lograr el objetivo, el marco teórico privilegiado en esta investigación-acción es la Teoría APOE (*Acción, Proceso, Objeto, Esquema*) o en inglés APOS (*Action-Process-Objet-Schema*) que permite modelar la construcción mental matemática, se debe a Ed Dubinsky (RUMEC, Research in Undergraduate Mathematics Education Community), quien a partir del constructivismo de Piaget intenta explicar la forma en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos.

El principio de aprendizaje en esta teoría es que un individuo no aprende los conceptos matemáticos directamente; si tiene las estructuras apropiadas, aprender es fácil, casi automático; si no las tiene, es casi imposible. Por lo tanto, la meta de la enseñanza debe ser ayudar a los estudiantes a construir las estructuras de mejor manera, y a conectar los conceptos matemáticos. Esta teoría está en continuo desarrollo (DeVries, 2002).

Según la Teoría APOE "El conocimiento matemático es una tendencia individual a la respuesta, en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones" (Asiala et al., 1996).

Se observan tres tipos especiales o estructuras básicas para la construcción del conocimiento matemático: *acción*, *proceso* y *objeto* que están organizados en estructuras que se denominan *esquemas*. Los mecanismos mentales para construir dichas estructuras son las reflexiones abstractas tales como *interiorización*, *encapsulación* y *coordinación*.

En este trabajo se considera que esta teoría cognitiva ofrece un soporte adecuado para la Didáctica de la Matemática universitaria, en el sentido que es un marco teórico en el cual es posible buscar soluciones o estrategias pedagógicas para la aprehensión del tema considerado.

Metodología

Las falencias mencionadas anteriormente son consideradas como resultados a priori para el diseño de la presente metodología que privilegia no sólo *qué enseñar* sino *cómo mejorar* la enseñanza y aprendizaje de los contenidos disciplinares.

La metodología requiere de una participación activa del estudiante y del docente, quien tiene como tarea fundamental generar la aparición de competencias en el alumno, por lo que se deben diseñar secuencias didácticas que den lugar a los objetivos previstos, esto lleva al docente a planificar los contenidos vinculándolos a situaciones que resulten de interés para el estudiante.

Se tiene en cuenta el ciclo de investigación de la teoría APOE, que se muestra en la siguiente figura, el cual integra tres componentes a considerar en el proceso de investigación: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos.

Experiencia áulica

Según Alvarenga (2003), *interpretar* y *resolver* una inecuación en el contexto algebraico, requiere de manera general, como prerrequisitos: realizar una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los números reales y la recta numérica; comprender las nociones de operaciones con intervalos y el uso de los conectivos lógicos de conjunción y disyunción; aplicar correctamente las propiedades del cuerpo ordenado real; entender las implicaciones y doble implicaciones lógicas y hacer uso correcto de los cuantificadores lógicos.

Interpretar y *resolver* una inecuación en el contexto gráfico, requiere como prerrequisitos: representar e interpretar adecuadamente algunos tipos de funciones como por ejemplo funciones polinómicas sencillas, función raíz cuadrada y homográficas.

Por lo mencionado anteriormente, se encaró la enseñanza y aprendizaje con actividades de dificultad creciente para que los alumnos fueran construyendo los distintos niveles cognitivos indicados en la Teoría APOE y profundizando en los mismos para lograr alcanzar el nivel de *esquema*, siendo esta una construcción óptima para el entendimiento del tema.

A continuación se exponen algunos ejemplos desarrollados en clase y las preguntas que se formularon a los estudiantes para observar las concepciones referidas a resolución algebraica y gráfica de inecuaciones. Participaron 90 alumnos en tres horas.

Se comenzó el trabajo solicitando la resolución e interpretación de la inecuación $3x-4>x-1$.

Prácticamente todos los alumnos resolvieron sin dificultad esta inecuación.

Pregunta 1: ¿qué significa resolver una inecuación? Las respuestas fueron dispares:

- "Es encontrar el valor aproximado de la x"
- "Es encontrar los dos valores de x"
- Muy pocos alumnos se refirieron a "es un intervalo"

Pregunta 2: ¿qué propiedades de orden se han aplicado? Nadie pudo responder.

Sin duda, los estudiantes estaban en etapa acción en cuanto a la interpretación y a la resolución algebraica de inecuaciones.

Luego, se solicitó la resolución e interpretación de la inecuación $\frac{3}{x}<15$.

Los alumnos resolvieron la inecuación "pasando" x multiplicando al segundo miembro de la desigualdad y llegaron a la conclusión que la respuesta de la inecuación era $x>\frac{1}{5}$.

Pregunta 3: ¿si $\frac{3}{\mathrm{x}}$ *resulta una expresión negativa, se verifica que es menor que 15? ¿Qué error se ha cometido en la resolución?*

Los estudiantes no pudieron identificar cuál era el error cometido en la resolución.

Se esperaba que al recordarles el concepto de conjunto solución en el primer ejemplo y las propiedades de orden en el segundo ejemplo alcanzaran un nivel *proceso* en cuanto a la interpretación y resolución algebraica de inecuación.

Luego se les pidió que resolvieran la inecuación $x^2 - x - 2 \geq 0$, observándose que si bien algunos alumnos seguían en etapa *acción* en cuanto a la resolución algebraica, otros habían alcanzado un nivel *proceso*, pero todos estaban en etapa *acción* en cuanto a la resolución gráfica.

Posteriormente se solicitó la resolución en forma gráfica y algebraica de la inecuación $1 < x^2 - 2x < 3$. El 80% de los estudiantes interpretó que para resolver algebraicamente la inecuación, se la debía separar en dos partes; obtuvieron dos conjuntos solución, correspondientes a las dos desigualdades.

Pregunta 4: ¿cómo se relacionan las dos soluciones?

El 10% logró interpretar que la solución era la intersección de los dos conjuntos obtenidos.

Pregunta 5: ¿pueden graficar la inecuación?

Algunos alumnos dibujaron dos parábolas y analizaron la solución en el eje *x*.

Un alumno logró interpretar que la parábola estaba entre 1 y 3 en el eje de las ordenadas.

La mayoría de los alumnos dibujaron la parábola y decían que debía estar entre 1 y 3 en el eje de las *x*.

Seguían en etapa *acción* en cuanto a la resolución gráfica.

Luego de varios intentos algunos alumnos entendieron que se debía leer la función sobre el eje de las ordenadas y que la solución representaba la proyección de la gráfica sobre el eje *x*. Se explicó en el pizarrón lo que implicaba la resolución gráfica en esta inecuación para lograr que alcanzaran un nivel *proceso* en cuanto a la resolución gráfica.

Por último, se solicitó la resolución en forma algebraica y gráfica de la siguiente inecuación $\sqrt{x+1} < \sqrt{2}x$ (Alvarenga, 2003, p. 201).

Muchos alumnos detectaron antes de resolver la inecuación que la solución no debía incluir los números menores que -1.

La mayoría la resolvió elevando al cuadrado y en la solución algebraica estaba incluido el intervalo (-∞; -0,5). Algunos alumnos detectaron que el conjunto solución no podía incluir el intervalo (- ∞; -0,5).

Pregunta 6: ¿pueden verificar gráficamente sus respuestas? La mayoría de los alumnos resolvieron en forma correcta e interpretaron que la solución debía ser el intervalo $(1; \infty)$. A partir de dicha respuesta se repasaron las propiedades de orden en reales.

Se esperaba que a posteriori de la precedente institucionalización, los alumnos estén en condiciones de alcanzar un nivel *objeto* del concepto de inecuaciones al tener competencias para analizar equivalencias, verificar qué valores no pueden ser solución y resolver correctamente la inecuación en forma algebraica y gráfica

Ejemplo de una producción textual de un estudiante

Para propiciar el aprendizaje es importante mostrar no sólo donde está el error, sino que además se recomienda reflexionar sobre las acciones realizadas correctamente o no, elemento indispensable en el quehacer didáctico matemático puesto que esta actividad permite, a su vez, al docente, rediseñar actividades para que el alumno realice las reestructuraciones mentales necesarias para el aprendizaje.

Con el objetivo de analizar las construcciones mentales de los estudiantes respecto al tema en cuestión e integrarlo con la noción de valor absoluto, al finalizar la clase se les repartió una fotocopia con dos ejercicios adicionales. Se solicitó que los trajeran resueltos para el día siguiente. Se obtuvieron 70 producciones.

Ejercicio 1 *Dada f(x) representada en la figura, resuelva* $|f(x) - 3| < 2$. *Explique con sus propias palabras cómo lo resolvió.*

El objetivo del ejercicio era la interpretación gráfica de un entorno de la función. Se esperaba que lo resolvieran algebraicamente como una inecuación e interpretaran que la solución era la proyección de la función sobre el dominio de la misma. Se suponía que la correcta interpretación de este ejercicio, ayudaría en la futura comprensión de la definición épsilon-delta de límite finito.

El segundo ejercicio tenía como objetivo la interpretación gráfica de operaciones con funciones. Si los estudiantes eran capaces de realizar dicha interpretación podrían alcanzar un mayor nivel cognitivo respecto de la resolución gráfica de inecuaciones.

A continuación se muestra la producción de Carlos, que fue elegida porque es representativa. Se observa que interpretó bien el ejercicio; cabe señalar que se había trabajado bastante en la clase con la interpretación gráfica de inecuaciones y entornos.

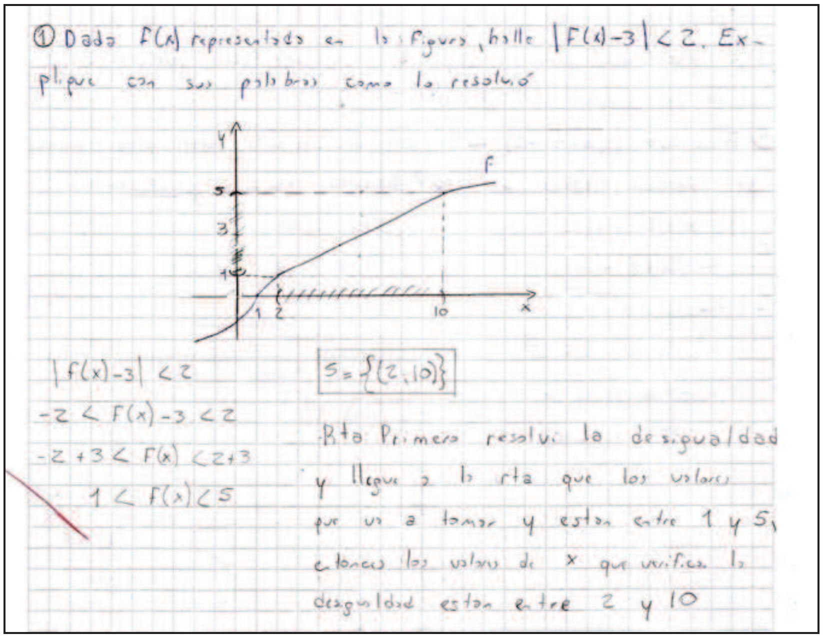

Figura 1: Producción de Carlos

Descomposición Genética Preliminar

Desde la teoría APOE, el estudiante debería mostrar a partir de comportamientos observables, las construcciones mentales (*acción*, *proceso*, *objeto*, *esquema*) dispuestas en la descomposición genética, que es una modelación epistemológica y cognitiva del concepto en estudio. Para el concepto de inecuaciones, se analizará la resolución algebraica y la resolución gráfica.

Se considerará, en primer lugar, que los alumnos encuentran la solución algebraica de la misma; la que puede ser obtenida mediante: a) aplicación mecánica de algoritmos de resolución, b) siendo concientes de las propiedades de orden en reales o c) sin desarrollo a la vista. Si en a), no justifica, el estudiante está en concepción *acción*. Si en b) y c) justifica lo realizado, está en concepción *proceso*. Si el estudiante continúa trabajando en a) hasta interiorizar lo suficiente el algoritmo, justificándolo, puede por esta vía llegar también a la concepción *proceso*.

Desde la concepción *proceso* puede reflexionar coordinando con otros procesos y si reconoce las operaciones lógicas, entre ellas, la de equivalencia entre inecuaciones, puede lograr la concepción *objeto*, o sea ha realizado una encapsulación del proceso en objeto; y, si además realiza el proceso inverso, desencapsulación, se entiende que el estudiante tiene una concepción *esquema* de la resolución algebraica de inecuación.

Si desde la concepción *proceso*, no puede coordinar con otros procesos, como por ejemplo, la equivalencia lógica, no logra llegar a la concepción *objeto*.

Para analizar la resolución gráfica de inecuaciones, el estudiante que posee la concepción *esquema* de función, lo desencapsula y trabaja con el proceso imagen – dominio. Este proceso en coordinación con otros procesos, como por ejemplo, transformaciones de una misma función (traslaciones, reflexiones y otras), operaciones entre distintas funciones y acotación de funciones, puede lograr la concepción *objeto* de la resolución gráfica de inecuaciones. El conjunto de acciones sobre procesos, coordinación de procesos y objeto, determinan la concepción *esquema* de la resolución gráfica de inecuaciones.

Si el estudiante logra coordinar coherentemente ambos esquemas, obtiene una acabada interpretación del concepto de inecuación.

Conclusiones

El manejo insuficiente del cuerpo real y sus propiedades de orden son fuente de una problemática importante en la adquisición y el tratamiento correcto de una gran cantidad de contenidos utilizados en las materias básicas de las carreras de Ingeniería.

Un tema relativamente sencillo, como es el de inecuaciones, genera dificultades que son difíciles de superar para la adquisición de otros conceptos asociados al mismo, como es el caso, justamente del concepto de límite funcional, razón que justifica el presente trabajo.

A partir de la utilización de la teoría APOE, se pone énfasis en la necesidad de proponer actividades basadas en el *esquema* de inecuación, que involucren la interpretación y las resoluciones tanto algebraicas como gráficas. Asimismo se concluye que el *esquema* de función es imprescindible para el entendimiento de inecuación dada las conexiones entre ambos conceptos.

Se debería revisar la metodología de enseñanza de inecuaciones, tratando de entender las construcciones mentales de los estudiantes para realizar una descomposición genética lo más acabada posible del concepto.

Las actividades a ser desarrolladas deben ser diseñadas en distintos contextos y con el control de variables didácticas que permitan la aparición de obstáculos para su tratamiento.

Los estudiantes se motivan con actividades que les resultan desafiantes y se comprometen con las que requieren cambios de registros de representación semiótica.

Es importante concientizar a la comunidad docente universitaria, sobre la necesidad del tratamiento del que debe ser objeto el tema en cuestión.

Las reflexiones finales se refieren a la necesidad de realizar análisis didácticos continuos de los temas que se pretende sean aprehendidos por los estudiantes y la necesidad de investigar en Didáctica de la Matemática pues esta actividad elevará el nivel de los aprendizajes.

Referencias bibliográficas

Alvarenga, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6(3), 199-219.

Asiala, M., Brown, N., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II. CBMS Issues in Mathematics Education* 6, 1-32.

Boero, P. (1998). Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifics. In: Jean-Philippe & Maryse Maurel, *Actes des Séminaires - SFIDA X*, VOL. III, Genova, I´IREM de Nice, X, 3-7.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *The Journal for Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

DeVries, D. Publicación electrónica. RUMEC/APOS theory glossary. Obtenido en http://www.cs.gsu.edu/rumec/Papers/Glossary.html en junio de 2002.

Dubinsky, E. (1991). The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. En L. P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundation of Mathematical Experience.* Nueva York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1996). Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24-45.

Duval, R. (1991). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, *Grupo de Educación Matemática.* Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes, 1995.

Narvaez, A. M, Berman, C. y Rodriguez, M. (2011) *¿Problemas con el límite o el límite de los problemas enseñados?* En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 24, 585-595. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Narvaez, A. M; Berman, C.; Rodriguez, M. (2011) *Una descomposición genética del límite. En Z* Cataldi y F. Lage (comps.*), Libro de Artículos JEIN 2011*, Vol. II, (pp.18- 25). Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional.

Piaget, J. (1972). *The principles of Genetic Epistemology* (W. Mays trans) .London: Routeledge & Kegan Paul (original published in 1970).

Vergnaud G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: some theorical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics* 3, 2, November, 31-41.

Sierpinka, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, 73-95. Leiden.