COMPRENSIÓN DEL ENFOQUE FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD DE ESTUDIANTES AL FINAL DEL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Jesús Salcedo Prado y Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav México
jsalcedo@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. Tres semanas después de recibir la enseñanza de probabilidad, diez estudiantes de un bachillerato tecnológico fueron seleccionados para desarrollar una actividad extra-aula experimental, fundamentada en la aproximación de la frecuencia relativa a la probabilidad. Se utilizaron hojas de control y se videograbó la sesión. Inicialmente los estudiantes lanzaron volados individualmente y después se organizaron en equipos para analizar sus datos. En la interacción social en dos equipos se manifestó la confusión entre los conceptos de frecuencias relativa y absoluta, y se observó la subordinación de ideas de los miembros ante un líder conceptual. Los estudiantes en un inicio confundieron los valores de la variable aleatoria con el espacio muestra, lo cual corrigieron posteriormente; si bien expresaron una aproximación intuitiva a la ley de los grandes números, no lograron progresar en ella. En general los estudiantes se mostraron dubitativos al contestar a las preguntas de las hojas de control, a pesar del poco tiempo transcurrido desde la enseñanza
Palabras clave: probabilidad, frecuencia relativa
Abstract. After three weeks that the probability course was finished, ten high school students were chosen to develop an experimental out-classroom activity based on the approach of relative frequency to probability. Control sheets were used and the session was videotaped. Initially the students tossed coins singly, then they met into teams to analyze their outcomes. Within the social interaction in two teams a confusion between the concepts of absolute and relative frequencies arosed and the ideas of the members were subordinated to those of a conceptual leader. Students initially confused the values of the random variable with the sample space, but they corrected later this misunderstanding, and were able to express an intuitive approach to the law of large numbers, although they did not go on further. In general, the students were hesitant to answer the questions posed in control sheets, despite the short time since the teaching.
Key words: probability, relative frequency

Introducción

En el marco del Acuerdo Académico Colegiado Interinstitucional de Docencia-Investigación establecido entre el DME del Cinvestav y el CECyT No. 4 del IPN, cuyo objetivo principal es impulsar la investigación en Matemática Educativa en el bachillerato tecnológico, se realizó una sesión *extra-aula* en la que los estudiantes del sexto semestre de Probabilidad y Estadística, tres semanas después del final del curso según la propuesta institucional, realizaron un experimento aleatorio desde un enfoque frecuencial, propuesto para la educación secundaria. En este documento se reportan los resultados obtenidos.

Para la asignatura de matemáticas en todos los semestres del bachillerato tecnológico, el programa de estudios destina una hora por semana para la enseñanza en espacios externos al aula (DEMS, 2009), por lo que definimos *Extra-aula*: *Espacio externo al aula de matemáticas para un tratamiento adicional de sus temas o de otros relacionados*. La actividad desarrollada tuvo el objetivo de obtener datos de la comprensión de los estudiantes del enfoque frecuencial de la probabilidad después de haber recibido la enseñanza de probabilidad y estadística según el programa de estudios de un bachillerato tecnológico (DEMS, 2009). La actividad experimental aplicada estaba diseñada para segundo grado de secundaria, para alumnos de 13 años de edad.

Elementos Teóricos

Esta investigación se fundamenta en consideraciones epistemológicas y cognitivas.

Ley de los grandes números y enfoques de la probabilidad

Se han adoptado varios enfoques para clarificar la asignación de probabilidades a eventos. En la enseñanza de la probabilidad es particularmente importante el enfoque que se elija. Konold (1991), refiriéndose a las interpretaciones clásica, frecuencial y subjetiva, argumenta que según la primera, *a priori*, la probabilidad de un evento es la razón del número de alternativas favorables a ese evento, en relación al total de alternativas, siempre y cuando éstas sean igualmente probables. Esta definición es circular: la probabilidad se define en términos de alternativas igualmente probables. Según la interpretación frecuencial, de carácter empírico, la probabilidad de un evento es el límite de su frecuencia relativa de ocurrencia en un número infinito de ensayos. De acuerdo a las interpretaciones subjetivistas, la probabilidad es la medición de la creencia en la verdad de una proposición. El significado del valor de la probabilidad en una interpretación subjetivista se puede concebir como: a) descripción de ese valor según la creencia que una persona tiene de lo que puede acontecer en una apuesta; b) consideración de todos los eventos a los cuales se les asigna una probabilidad como una colección (Konold, 1991).

En la ley de los grandes números se conjugan los enfoques clásico, frecuencial y axiomático de la probabilidad. Históricamente, el primer matemático en demostrar este resultado fue Jakob Bernoulli (1713) mediante la enunciación de su famoso teorema: Dados un suceso *A*, su probabilidad *P* de ocurrencia, y *n* pruebas independientes para determinar la ocurrencia o no-ocurrencia de *A,* sea *f* el número de veces que se presenta *A* en los *n* ensayos y ε un número positivo cualquiera. La probabilidad de que la frecuencia relativa *f/n* discrepe de *p* en más de ε (en valor absoluto) tiende a cero al tender *n* a infinito. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{f}{n}-p\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Ideas fundamentales de estocásticos

Desde un punto de vista epistemológico y pragmático, en el sentido de Bruner, Heitele (1975) ha propuesto una lista de ideas fundamentales de estocásticos para la enseñanza de probabilidad y de estadística en todos los niveles educativos que sigan un currículum en espiral. Considera las ideas fundamentales como:

[…] aquéllas que proporcionan al individuo un modelo explicativo en cada etapa de su desarrollo, tan eficiente como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración (Heitele, 1975, p. 188).

Su propuesta considera cuatro puntos de vista. El marco de la concepción de Bruner, basado en: el principio de la enseñanza de un tópico es la transmisión de ideas fundamentales, las ideas fundamentales son necesarias como una guía desde la educación preescolar hasta la universitaria para garantizar cierta continuidad, las ideas fundamentales y los conceptos se tratan en los distintos niveles cognoscitivos y lingüísticos a lo largo de un currículum en espiral, la transición a un nivel cognoscitivo más alto se facilita si durante las primeras etapas cognoscitivas se ha diseñado una presentación apropiada del tópico principal; los resultados de la psicología del desarrollo con respecto a las ideas de estocásticos; las diversas fallas de los adultos en situaciones estocásticas; la historia de la probabilidad.

En esta perspectiva, el autor propone como ideas fundamentales: Medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, combinatoria, variable estocástica, modelo de urnas y simulación, ley de los grandes números y muestra. Este listado es un modelo para construir un curriculum coherente en estocásticos, más que para resolver problemas. La utilidad de este modelo se muestra al aplicarse en la enseñanza a todos los niveles. Heitele propone integrar en la educación básica, lo más temprano posible, actividades de estocásticos a las de aritmética y geometría, para desarrollar conexiones significativas con la realidad y prevenir sesgos del pensamiento. Para ello, señala, es necesario que los profesores sepan lo que es realmente fundamental en estocásticos.

Modelos generativos

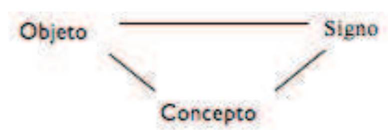
Desde un punto de vista cognitivo, Fischbein (1977) establece la hipótesis de que los modelos didácticos, específicamente los modelos intuitivos, deben tener una capacidad heurística, como sucede con los modelos científicos, porque los modelos, ya sean científicos o didácticos, deben constituir una componente viable para el pensamiento productivo. Esto lo plantea igualmente para los modelos pictóricos:

[…] un buen modelo es, necesariamente, generativo. Un modelo es genuinamente útil al pensamiento productivo si puede representar correctamente un número ilimitado de situaciones diferentes, usando un número limitado de elementos o reglas. El sistema de reglas que establece un modelo para expresar unívoca y estructuralmente al original constituye la sintaxis del modelo (Fischbein, 1977, p. 155).

Heitele (1975) señaló también la pertinencia de los modelos pictóricos en la enseñanza básica de estocásticos. La importancia de las operaciones combinatorias es clara en el caso discreto, pues al asignar probabilidades es relevante la tendencia a subestimar la cardinalidad de los eventos (Fischbein, 1975). Con el uso de los diagramas de árbol, basado siempre en las mismas convenciones, se obtiene respuesta a las posibles preguntas referentes a combinatoria y pertenecientes a la misma clase, donde se pide la cantidad de arreglos posibles en la ordenación de objetos. El modelo es consistente internamente; expresa un principio, un método para construir los arreglos. El modelo es una herramienta intelectual: con él se resuelve el problema y no sólo se describe la solución. Con un modelo tal se aprende a pensar efectivamente y a comprender activamente. Los diagramas de Venn también constituyen una técnica consistente para expresar operaciones con conjuntos. Es una técnica visual generativa, que usa una lógica figurativa; la solución a las operaciones con conjuntos, qué representan, se puede obtener usando consistentemente el lenguaje figurativo.

Triángulo epistemológico

De acuerdo con Steinbring (1991), el conocimiento probabilístico tiene un carácter de sistemas complejos en cada nivel de desarrollo. Este conocimiento se crea como una forma relacional o un mecanismo de unión entre los aspectos de cálculo formales y los contextos interpretativos. Esta forma relacional del significado matemático se caracteriza como el triángulo epistemológico del conocimiento matemático (véase la Figura 1).



1. Triángulo epistemológico del conocimiento probabilístico

El triángulo epistemológico representa un diagrama relacional en el cual el significado del conocimiento no puede ser deducido desde uno de los vértices, siempre requiere un balance entre todos ellos.

Método e Instrumento

Tres semanas después de la enseñanza de Probabilidad se seleccionó a diez estudiantes de un grupo de Probabilidad y Estadística del sexto semestre (17-18 años de edad) de un bachillerato tecnológico para el desarrollo de una actividad, con duración de 2 hrs, 45 min. La selección de los estudiantes obedeció a su mayor disposición y participación en la enseñanza. Se utilizaron hojas de control para guiar la actividad y registrar las respuestas de los estudiantes; no se permitió el uso de calculadora y la sesión se videograbó. La actividad se desarrolló en dos tiempos, con un receso de 40 minutos, como se indica en la Tabla 1.

Tiempo	Secciones
1. Frecuencia relativa en ternas de volados (1 hr, 45 min)	I, II y III
2. Simulación del sexo de cuatro hijos (1 hr.)	IV

Tabla 1: Correspondencia entre las secciones de la actividad y su duración

La primera sección de la actividad se contestaba de manera individual y pedía lanzar 25 ternas de volados, para las cuales había que indicar los valores que toma la variable aleatoria, registrar la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa para cada uno de ellos, y finalmente comparar estas frecuencias con las de águila en todos los lanzamientos.

En la segunda sección los estudiantes formaron equipos para comparar sus resultados individuales y conjuntar sus datos, para comparar las frecuencias relativas entre grupos de datos de distinto tamaño y, finalmente, observar el comportamiento de las frecuencias relativas de ambos conjuntos de datos respecto a la probabilidad. Los diez estudiantes E_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ formaron tres equipos T_j $(j = 1, 2, 3)$ para el desarrollo de la actividad: T_1 $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, T_2 $\{E_5, E_6$ y $E_7\}$ y T_3 $\{E_8, E_9, E_{10}\}$.

En la tercera sección se procedió a graficar los valores de las frecuencias relativas de los dos grupos de datos de diferente tamaño y el valor a priori de la probabilidad para cada uno de los valores de la variable aleatoria; también calcularon el promedio del número de águilas obtenidas en las ternas de volados para ambos grupos de datos para, posteriormente, compararlo con la esperanza matemática de la variable aleatoria.

En la sección final los estudiantes simularon el sexo de cuatro bebés mediante volados; se les pidió el espacio muestra correspondiente con el recurso a un diagrama de árbol, indicar valores que toma la variable aleatoria y su respectiva probabilidad, así como observar esta relación en el diagrama de árbol, calcular la esperanza matemática y estimar el resultado más probable para una combinación dada en un mayor número de repeticiones.

La Tabla 2 muestra el contenido de ideas fundamentales de estocásticos por sección.

	Ideas fundamentales						
Sección	Medida de Probabilidad	Espacio muestra	Regla del Producto	Equiprobabilidad y Simetría	Combinatoria	Variable Aleatoria	Ley de los grandes números
I							
II							
III							
IV							

Resultados

Al final de la actividad experimental obtuvimos las repuestas que los estudiantes dieron a los reactivos en las hojas de control y la videograbación de sus intervenciones durante el desarrollo de la actividad, de todo lo cual a continuación presentamos los resultados

La interacción social

Inicialmente los estudiantes no contestaron correctamente todas las preguntas, por lo que el investigador guió sus reflexiones hasta que dieran la respuesta correcta. Este proceso de razonamiento siempre se realizó en equipo o por todo el grupo en general. Durante la realización de este razonamiento y del proceso de contestación de los reactivos, se observó que dentro de cada equipo había un estudiante que fungía como "líder conceptual"; este estudiante era reconocido por sus compañeros como poseedor del conocimiento suficiente para solucionar los problemas presentados y su opinión prevalecía cuando los integrantes del equipo discutían cómo responder a las preguntas; este estudiante en el proceso de interacción, el "líder conceptual", no trataba de convencer a los demás con sus argumentos. Este fenómeno se debió a que estos estudiantes tenían casi tres años de ser compañeros de aula y reconocían mutuamente sus niveles de dominios conceptuales. En el equipo T_1, E_1 fungió como líder conceptual, mientras que en T_3 lo fue $E_{8;}$ en las discusiones en T_2 ninguno de sus integrantes dominó. El hecho relevante de este fenómeno es que sólo las ideas de un estudiante prevalecían en T_1 y en T_3 y los demás contestaban de la manera en que él proponía; hubo una subordinación de ideas que limitó la expresión del pensamiento del resto de los estudiantes.

El concepto de frecuencia relativa resultó difícil para los estudiantes, a pesar de que fue objeto de la enseñanza en el curso. Inicialmente un estudiante aclaró para todo el grupo la diferencia entre frecuencia absoluta y frecuencia relativa, pero durante el desarrollo de la actividad los estudiantes se mostraron dubitativos respecto al concepto; incluso una estudiante no reparó en su confusión y terminó dando una respuesta incorrecta. La Figura 2 muestra el triángulo epistemológico para el concepto de frecuencia relativa.

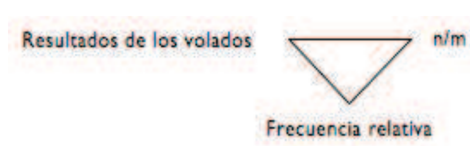


Figura 2: Triángulo epistemológico para el concepto de frecuencia relativa en el lanzamiento de volados.

Contestaciones a los reactivos

La Figura 3 presenta las contestaciones por reactivo clasificadas como correctas, incorrectas u omitidas. La Sección I corresponde a los reactivos a-h, los precedidos por la letra A son los de la segunda sección, por la letra B de la tercera y por la C de la cuarta.

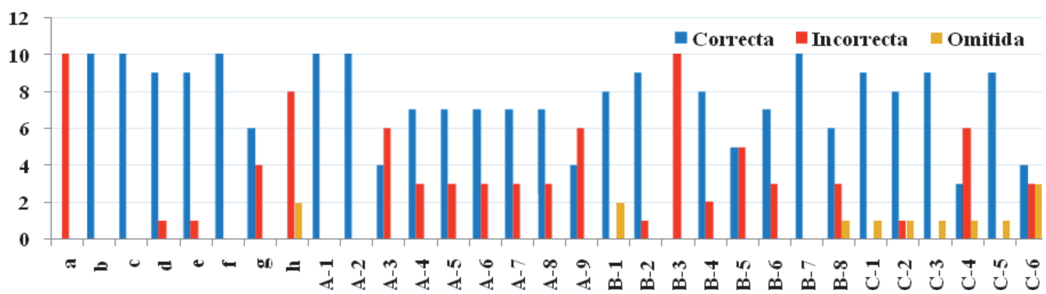
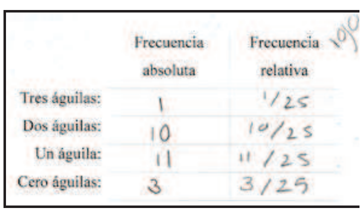


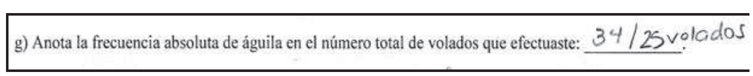
Figura 3. Clasificación de las respuestas por cada reactivo.

Sección I

El 68% de las respuestas fueron correctas. Todos los estudiantes confundieron el espacio muestra con el conjunto de valores que toma la variable aleatoria, aunque todos indicaron correctamente el espacio muestra correspondiente; para identificar el espacio muestra, sólo E_1 no recurrió al diagrama de árbol. Todos los estudiantes calcularon correctamente las frecuencias absoluta y relativa con que obtuvieron los valores de la variable aleatoria, pero sólo seis pudieron recuperar la frecuencia absoluta de águilas obtenidas en el total de volados; la Figura 4 muestra uno de estos casos.



	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Tres águilas:	1	1/25
Dos águilas:	10	10/25
Un águila:	11	11/25
Cero águilas:	3	3/25

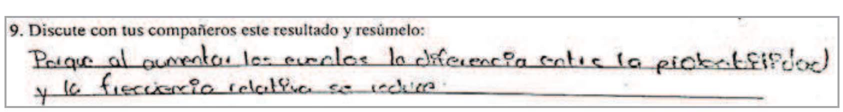


g) Anota la frecuencia absoluta de águila en el número total de volados que efectuaste: 34/25 volados

Figura 4. Inicialmente E2 identifica la frecuencia absoluta y la relativa para cada uno de los valores de la variable aleatoria, pero al romper la agrupación de ternas no puede expresar correctamente el valor de la frecuencia absoluta de águilas en el total de volados.

Sección II

El 70% de las respuestas para esta sección fueron correctas. Ante la petición de comparar la desviación entre el valor teórico de la probabilidad y el valor de la frecuencia relativa de dos grupos de datos de diferente tamaño, E_1 señaló que a más repeticiones del fenómeno aleatorio la frecuencia relativa se acercaba a la probabilidad (véase la Figura 5).



9. Discute con tus compañeros este resultado y resúmelo:
Porque al aumentar los ciclos la diferencia entre la probabilidad y la frecuencia relativa se reduce

Figura 5. Respuesta dada por E1 la que fue apropiada por todo el T1.

Después de un consenso, el equipo T_2 dio una conclusión similar (véase la Figura 6). La respuesta de estos tres estudiantes, en la que expresan de manera intuitiva la ley de los grandes números, resultó de una reflexión guiada por el investigador, en la que se hizo énfasis en observar la tendencia de la frecuencia relativa para un valor de la variable aleatoria al aumentar el número de ensayos; inicialmente este hecho les pasó desapercibido.

8. Para cada número posible de águilas en el lanzamiento de tres monedas, compara las dos diferencias anotadas. ¿Para cuál número de lanzamientos la diferencia es mayor? 25 lanzamientos.
9. Discute con tus compañeros este resultado y resúmelo:
Con 25 el número es más grande a 1/8 y más cercano es 75 a un 1/8.

Figura 6. Respuesta dada por T2, con el consenso de sus tres integrantes.

Sección III

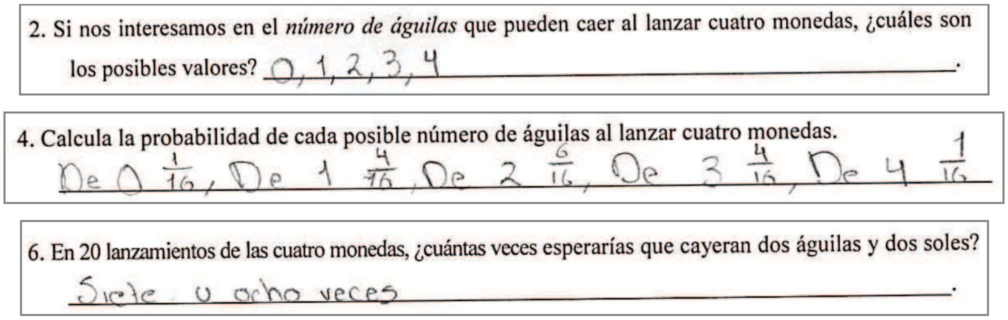
El 68% de las respuestas fueron correctas. Al trazar una gráfica de barras solicitada para comparar los valores de las frecuencias relativas y de la probabilidad, los estudiantes no avanzaron hacia la idea de la ley de los grandes números porque no se percataron de que las alturas de las barras de las frecuencias relativas del grupo con más datos están más próximas a la altura de la barra de la probabilidad; algunos ya habían expresado este hecho en lengua natural. E_3 dio una respuesta de naturaleza subjetiva al expresar que era grande la diferencia entre la representación gráfica de la probabilidad a priori y la frecuencia relativa de los valores de la variable aleatoria en 25 lanzamientos, pero no hizo referencia alguna a la frecuencia relativa en 100 lanzamientos; se puede interpretar esta omisión como que para E_3 fue obvio que la diferencia entre este segundo grupo de valores y el valor a priori era menor que la del primer grupo (véase la Figura 7).

3.¿Qué observas de las barras que trazaron respecto a las barras azules?
son muy diferentes las gráficas logis

Figura 7. Comparación de E3 de la gráfica de la frecuencia relativa de los dos grupos de datos.

Sección IV

En la última sección los estudiantes contestaron correctamente el 78% de los reactivos. Al igual que en el reactivo inicial, E_1 no utilizó un diagrama de árbol para calcular la cardinalidad del espacio muestra, tampoco E_7 lo utilizó, pero no hubo evidencia de su cálculo en ambos casos. Ocho estudiantes ahora sí pudieron identificar los valores de la variable aleatoria, aunque sólo tres indicaron su probabilidad y cuatro respondieron correctamente al resultado más probable para la combinación de dos águilas y dos soles en 20 lanzamientos de cuatro monedas.



2. Si nos interesamos en el *número de águilas* que pueden caer al lanzar cuatro monedas, ¿cuáles son los posibles valores? 0, 1, 2, 3, 4.

4. Calcula la probabilidad de cada posible número de águilas al lanzar cuatro monedas.
De 0 $\frac{1}{16}$, De 1 $\frac{4}{16}$, De 2 $\frac{6}{16}$, De 3 $\frac{4}{16}$, De 4 $\frac{1}{16}$

6. En 20 lanzamientos de las cuatro monedas, ¿cuántas veces esperarías que cayeran dos águilas y dos soles?
Siete u ocho veces.

Figura 8. Respuestas correctas de un estudiante a tres reactivos de la sección IV.

Conclusiones

Si bien las respuestas de los estudiantes en las hojas de control fueron correctas en su mayoría, en el desarrollo de la actividad mostraron sus dudas sobre los conceptos, a tan sólo tres semanas de haber recibido la enseñanza. De no tener el repaso de los temas en un corto periodo de tiempo durante su enseñanza superior, corren el riesgo de olvidar lo aprendido en el bachillerato, al igual que olvidaron lo de secundaria. El enfoque de probabilidad frecuencial no está incluido en el plan de estudios del bachillerato tecnológico, pero en extra-aula se le pudo agregar al conjunto de los temas prescritos (DEMS, 2009). Resultó ser insuficiente el tiempo asignado por la institución a la enseñanza de probabilidad, ya que los estudiantes no pudieron consolidar los temas enseñados.

Referencias bibliográficas

Bernoulli, J. (1713). *Ars Conjectandi*. Basilea: Impensis Thumisiorum, Fratrum.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística*. México, D. F.: IPN.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies of Mathematics*, 8, 153-165.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics,* 6(2), 187-205.

Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. En E. von Glasersfeld (Ed). *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Netherlands: Kluwer.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 503-522.