# ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE SUS DIVERSAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS, A NIVEL LICENCIATURA

Marisol Radillo Enríquez y Lucía González Rendón
Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara. México
marisol.radillo@red.cucei.udg.mx, lgrendon2@yahoo.com.mx

**Resumen.** Se presentan los resultados preliminares de una investigación cuyo objetivo es analizar desde una perspectiva semiótica las dificultades que enfrentan los estudiantes ante el concepto de límite y diseñar un alternativa didáctica con apoyo en recursos de visualización que permitan al estudiante de Cálculo, por ejemplo, vincular la representación algebraica del límite de una función con su representaciones gráfica y numérica (tabular). La prueba piloto arrojó resultados favorables en el manejo de las distintas representaciones de funciones y límites, aunque aún es necesario llevar a cabo la experimentación completa con sus respectivos análisis cuantitativo y cualitativo.
**Palabras clave**: semiótica, enseñanza del cálculo, límite
**Abstract.** On present the preliminary results of an investigation whose aim is to analyze from a semiotic perspective the difficulties faced by the students to the concept of limit and designing an alternative didactics based on resources of visualization that allow students of calculation, for example, to relate the algebraic representation of the limit of a function with its representations graphical and numerical. A preliminary test of the material has showed favorable results in the management of the different representations of functions and limits, although it is still necessary to carry out the full experimentation and their respective quantitative and qualitative analysis.
**Key words**: semiotic, teaching of calculus, limit

## Introducción

La enseñanza tradicional en los cursos de Cálculo se centra en prácticas algorítmicas y algebraicas (Salinas y Alanís, 2009), las cuales a su vez son el centro de la evaluación. En consecuencia, "la mayoría de los estudiantes piensan que la manera más segura para tratar satisfactoriamente con este dominio no es tratar de comprender, sino sólo funcionar mecánicamente" (Artigue, en Salinas y Alanís, 2009). Esta práctica se basa en la creencia generalizada de que el conocimiento matemático ya está "dado" y los profesores solamente deben "mostrarlo" a los estudiantes, por lo que la enseñanza de la materia se identifica con la enseñanza de técnicas algorítmicas para resolver problemas.

No obstante, los conocimientos así adquiridos se olvidan fácilmente y solo pueden ser utilizados en condiciones muy similares a las que fueron recibidos (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2000), como es el caso de los cursos de Cálculo Diferencial e Integral del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México, pues la enseñanza recae en la explicación del profesor y se centra en la manipulación algebraica de diversos ejemplos y ejercicios.

La situación se agrava debido a que el sistema de evaluación de los alumnos en el Departamento de Matemáticas del CUCEI establece que el 60% de la calificación final corresponde al promedio de dos exámenes departamentales que se aplican simultáneamente a los aproximadamente 2300 estudiantes que cursan la materia cada semestre, en las fechas previstas para cada caso. Los reactivos de dichos exámenes se centran en ejercicios explícitos de límites, derivadas y/o integrales, pero no se incluyen situaciones en las que se requiera dar un sentido más amplio a las nociones matemáticas y reconocer, por ejemplo, cuándo es necesario calcular una derivada, o qué significado tiene la integral en un contexto determinado. Por lo tanto, la presión sobre profesores y estudiantes consiste en aprobar los exámenes, más que en aprender la materia de manera significativa.

La búsqueda de alternativas para mejorar la situación de enseñanza del Cálculo Diferencial parte de la premisa de que, para aprender un objeto matemático es necesario conocer sus diversas representaciones semióticas, así como las traducciones entre ellas (Duval, 2006).

## Soporte teórico

Se considera la comprensión como un proceso mental que involucra el desarrollo de una variedad de representaciones internas apropiadas junto con las relaciones funcionales entre ellas, de tal forma que se puedan producir representaciones externas adecuadas para la resolución de tareas que involucren a dicho objeto de manera determinante (Font, 2007). A su vez, cada una de los formas de representación, junto con las normas que las rigen, propone una caracterización distinta del correspondiente concepto, por lo que se recomienda diferenciar varias representaciones en cada concepto.

En el caso del concepto del límite de una función, las principales formas de representación son la numérica o tabular, la geométrica o gráfica, la analítica o algebraica y la verbal (Duval, 1998; Blázquez y Ortega, 2001). Con la secuencia propuesta se pretende superar algunas de las dificultades para la enseñanza y aprendizaje, del límite, tales como el sentido del término en el lenguaje cotidiano, la sobregeneralización de las propiedades de procesos finitos a procesos infinitos, e incluso aquellas dificultades generadas por los términos y símbolos involucrados en la definición formal (Artigue, 1998; Jiménez, Mejía, Viveros y Castillo, 2006).

## Metodología

La base del trabajo es el programa vigente de Cálculo Diferencial e Integral del CUCEI, en particular la unidad II (Límites y Continuidad de Funciones). Se hizo una investigación documental sobre la enseñanza de límites de funciones de una variable mediante sus diversas formas de representación. Posteriormente se diseñó una secuencia didáctica que contiene los contenidos teóricos necesarios y actividades que los involucren para el logro de los objetivos del programa de la materia.

Antes de comenzar el tema de límite se plantean una serie de actividades iniciales que involucran las representaciones gráfica, numérica y algebraica de tres funciones que coinciden en todos sus puntos, excepto en $x=1$: $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, $g(x)=x+1$, $h(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases}$

Las actividades 1, 2 y 4están dirigidas a que el estudiante se familiarice con las representaciones algebraica y gráfica estas tres funciones para posteriormente introducir la noción informal del límite de una función en un punto dado, ya que al analizar cada caso se puede notar que la existencia del límite no depende de si la función está o no definida en el valor dado. La tabulación de valores que se pide en la actividad 3 corresponde a la representación numérica o tabular de la función *f(x)* pero a la vez dicha tabulación se puede "leer" interpretar como un límite, una vez que se haya introducido la definición correspondiente (figura 1).

La actividad 5 puede parecer diferente de las anteriores, pero si el resultado se analiza y contrasta con las representaciones gráfica y algebraica de las funciones que se denominaron *f* y *g*, es posible mostrar al estudiante que una aplicación del teorema "*Sea **c** un número real y **f(x)= g(x)** para toda **c** ≠ 0, en un intervalo abierto que contiene a **c**. Si el límite de **g(x)** cuando **x** → **c** existe, entonces también existe el límite de **f(x)** cuando **x** → **c** y además* $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)$", que permite determinar el límite de una función racional en un valor $x = c$ en el cual, por sustitución directa se obtiene la indeterminación 0/0

Apellidos y Nombre(s) ______________________________ Fecha: ________

*Actividades iniciales:*

1. Determina el dominio de las siguientes funciones:

$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad$ $g(x)=x+1$ $\qquad$ $h(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases}$

Dominio: $\qquad$ Dominio: $\qquad$ Dominio:

2. Evalúa cada una de las anteriores funciones en el valor indicado:

$f(1)=$ $\qquad$ $g(1)=$ $\qquad$ $h(1)=$

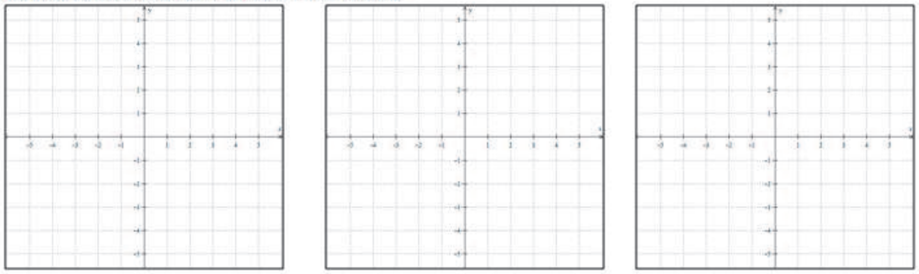
3. Completa las siguientes tabulaciones, para valores cercanos a 1, considerando $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

| $x$ | 0 | 0.5 | 0.6 | 0.8 | 0.9 | 0.99 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | Indeterminado |

| $x$ | 1 | 1.0001 | 1.01 | 1.1 | 1.3 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | Indeterminado | | | | | | |

- Si los valores de $x$ son cercanos a 1, pero menores que 1, es decir "desde la izquierda" en la recta numérica ¿a cuál valor se acerca $f(x)$?
- Si los valores de $x$ son cercanos a 1, pero mayores que 1, es decir "desde la derecha" en la recta numérica ¿a cuál valor se acerca $f(x)$?

4. Grafica cada una de las tres funciones dadas:



5. Factoriza y simplifica la expresión algebraica $\frac{x^2-1}{x-1}$

6. Completa la siguiente tabulación para la función $y = \begin{cases} x+2, & x \le 5 \\ -x+10, & x > 5 \end{cases}$

| $x$ | 4.5 | 4.9 | 4.99 | | 5.001 | 5.1 | 5.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

Figura 1. Actividades previas al tema de límites

Finalmente, en la actividad 6 se pide tabular los valores de una función definida a trozos, cuando *x* tiende a 5, aunque en esta ocasión los valores de *y* no convergen. Posteriormente se abordará el hecho de que si los límites laterales de una función cuando *x* → *c* son diferentes, entonces el límite bilateral no existe.

Después de las actividades iniciales, se inicia formalmente el tema de límites con el análisis del comportamiento de un función cuando *x* tiende a un valor dado. Se proporcionan dos casos: uno con una función polinomial, cuyo límite puede determinarse por sustitución directa, y otro con la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ que fue analizada previamente.

En ambos casos el estudiante debe analizar las representaciones gráfica, analítica y numérica (tabular) de las funciones involucradas, al tiempo que se introducen los términos técnicos "*x tiende a*" y "*límite*", correspondientes a la representación verbal. La tabulación se utilizará posteriormente para ilustrar los límites laterales

2. ¿Cómo se comporta la función: $y = f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ cuando los valores de $x$ se aproximan a 1?

Se sabe que la función está definida para todos los números reales, *excepto* para $x = 1$, pues $f(1) = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$, pero ¿se aproxima $f$ a algún valor específico cuando $x$ se aproxima mucho a 1?

Al graficar esta función, se observa un "vacío" en $x = 1$, ya que *f(1)* está indeterminada.

*Dominio* $(-\infty, 1), (1, \infty)$

*Imagen* $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

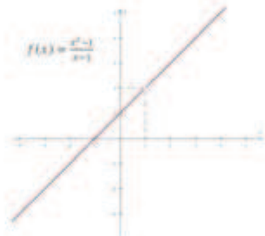


*Figura 2.2 Gráfica de la función* $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

Aunque esta función no está definida para $x = 1$, es posible tomar un valor tan cercano a 1 como se quiera, pero *sin llegar a ser igual a 1*. A esto se le llama "*x tiende a 1*"

*x tiende a 1 desde la izquierda* → ← *x tiende a 1 desde la derecha*

| $x$ | 0 | 0.5 | 0.6 | 0.8 | 0.9 | 0.99 | 1 | 1.0001 | 1.01 | 1.1 | 1.3 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 1.5 | 1.6 | 1.8 | 1.9 | 1.99 | Indeter-minado | 2.0001 | 2.01 | 2.1 | 2.3 | 2.5 | 3 |

*Figura 2.2 Tabulación de la función* $y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ *para valores cercanos a x=1*

Tanto en la gráfica como en la tabulación, se aprecia que si el valor de "$x$" se aproxima a 1, ya sea desde valores menores a uno (desde la izquierda de la gráfica) como desde los valores mayores que uno (desde la derecha de la gráfica), se tiene que el valor de "$y$" se aproxima a 2. Entonces, se dice que ***el límite de esta función, cuando "x" tiende a 1 es igual a 2*** y en notación matemática se escribe de las siguientes maneras:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2 \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Nota: $x$ nunca puede tomar el valor de 1, pues $f(1) = \textit{indeterminada}$

Figura 2. Introducción al límite de una función.

El resto del capítulo de límites incluye propiedades de los límites, cálculo de límites a partir de gráficas, límites indeterminados, límites infinitos y al infinito. En todos los casos se utilizan diversas representaciones semióticas, a sabiendas de que cada forma de representación semiótica enfatiza más algunos rasgos del objeto matemático. Por ejemplo, para comprender los límites al infinito las representaciones gráficas no son suficientes, ya que aún con el apoyo de la computadora no es posible captar detalladamente el comportamiento de las funciones; para estos casos el complemento ideal son las representaciones numéricas (tabulaciones).

Ejemplo: Cuando $x$ crece, $f(x)$ se acerca cada vez más a 1, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | -1 |
| ± 1 | 0 |
| ± 5 | 0.923077 |
| ± 50 | 0.999200 |
| ± 100 | 0.999800 |

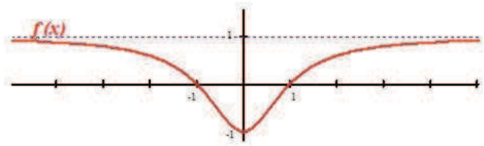


*Figura 2.9. Límites al infinito de f(x)*

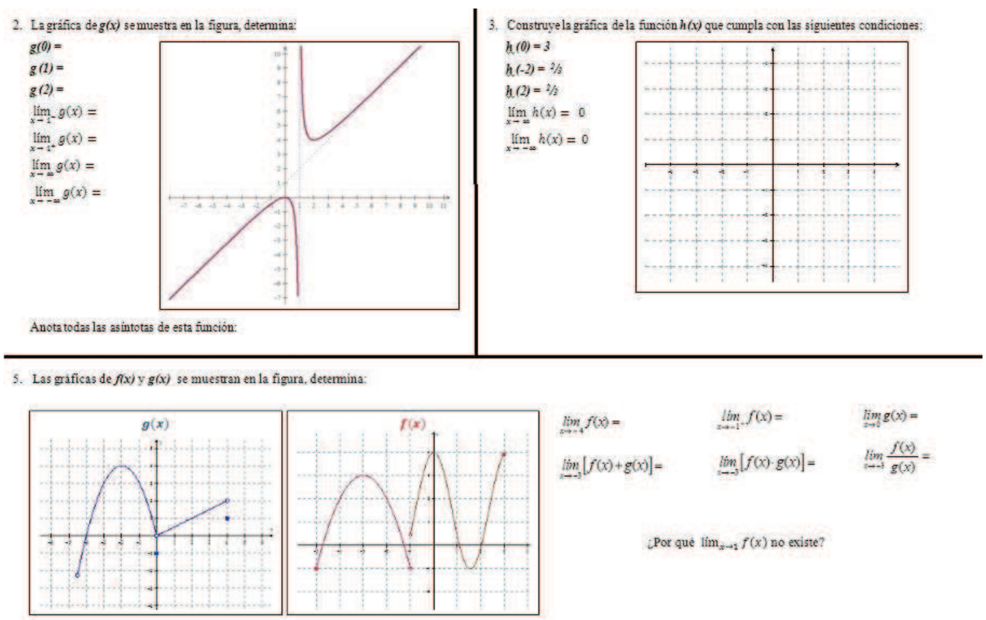
En la misma función, se aprecia que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

La recta $y=L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$ si:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \quad ó \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

Figura 3. Límites al infinito: representaciones gráfica y numérica (tabular)

Algunas actividades para los estudiantes se muestran en la figura 4, en las que se pide (2) leer en la gráfica valores determinados de la función, límites infinitos y/o al infinito, mientras que en otra actividad es necesario esbozar la gráfica de una función a partir de datos en forma de límites y valores determinados




## Análisis de resultados

Los principales errores encontrados en las actividades iniciales se relacionan con determinar el dominio de la función definida a trozos en la pregunta 1 y tampoco contestaron correctamente el valor $h(1)$ de la pregunta 2, pero realizaron correctamente la tabulación de la otra función a trozos de la pregunta 6.

En la pregunta 3, se encontró que varios estudiantes contestaron de la siguiente manera:

- Si los valores de $x$ son cercanos a 1, pero menores que 1, es decir "desde la izquierda" en la recta numérica ¿a cuál valor se acerca $f(x)$? Respuesta: 1.99
- Si los valores de $x$ son cercanos a 1, pero mayores que 1, es decir "desde la derecha" en la recta numérica ¿a cuál valor se acerca $f(x)$? Respuesta: 2.0001

De estas respuestas se infiere que los estudiantes, antes de cursar el tema de límites, no

fueron capaces de identificar que ambos acercamientos de $x$ a 1 conducen a un mismo número, el cual posteriormente será identificado como el límite de la función. Es posible que esta imprecisión se relacione con la representación numérica del límite, pero para afirmarlo sería necesario implementar otros instrumentos de recolección de información, como entrevista clínica.

La pregunta 4 (gráficas de las tres funciones iniciales) fue la que menos aciertos registró. En algunas de las respuestas se observó que los estudiantes graficaron las funciones como si fueran intervalos cerrados, ya que no prolongaron las líneas (figura 5). Hubo quienes graficaron curvas, en lugar de las rectas que corresponden a las funciones dadas (figura 6). De aquí se concluye que es necesario trabajar con mayor detalle el proceso de traducción de la representación numérica a la gráfica para que los estudiantes aprecien el carácter continuo de la función, ya que ésta es una noción central del cálculo infinitesimal.

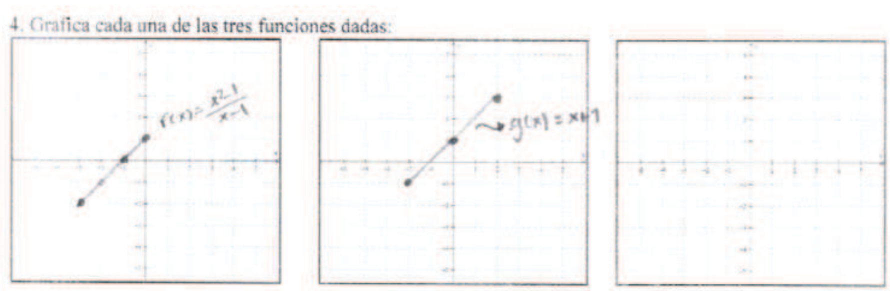



Figura 5. Respuesta del estudiante #5 a las gráficas de las funciones. No prolonga las rectas a pesar de tener las expresiones algebraicas de las funciones

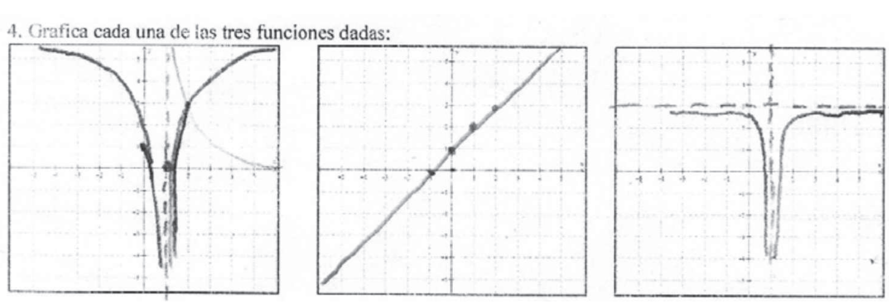



Figura 6. Respuesta del estudiante # 23 a las gráficas de tres funciones.

En cuanto a las actividades de límites que se llevaron a cabo después de dos semanas de clases (figura 4) se encontró que 38 de 42 estudiantes logran construir adecuadamente las gráficas a partir de valores concretos y límites al infinito (asíntotas horizontales (problema 3, figura 4), aunque tienen dificultades para "leer" el mismo tipo de datos en la gráfica (problema 2, figura 4) donde solo 7 estudiantes contestaron todas las preguntas acertadamente. Se detectó que los estudiantes usan indistintamente los términos "no existe" e "indeterminado" y los aplican erróneamente tanto en valores de funciones como en límites; 5 alumnos reportaron como resultado de un límite la ecuación de la asíntota, en vez de la respuesta esperada "no existe".

No hubo mayores dificultades en aplicar las propiedades de los límites a las gráficas de dos funciones (problema 5, figura 4).

## Conclusiones

Si bien los resultados de la prueba piloto de los materiales instruccionales son alentadores, aún es necesario llevar a cabo la experimentación en las condiciones adecuadas para poder obtener inferencias científicamente válidas sobre la eficacia de la propuesta.

Durante esta etapa de la investigación se pone de manifiesto la necesidad de implementar actividades con apoyo de la computadora o calculadora graficadora para que los estudiantes tengan mayor libertad para explorar las funciones y sus límites.

Otro punto que debe fortalecerse es la argumentación de las respuestas que logra cada estudiante, para que éste logre un mejor dominio los diversos registros del lenguaje matemático.

A partir de los resultados parciales que se reportan, se optimizará la propuesta de enseñanza para el tema de límite de una función, con un mayor énfasis en los procesos de traducción entre las representaciones numérica y gráfica de las funciones, para evitar que las interpretaciones erróneas o incompletas distorsionen la construcción de significado del límite de la función.

## Referencias bibliográficas


Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1(1),* 40-55

Blázquez, S., Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, (14),* 219-236. México: Grupo Editorial Iberoamericana

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, R. A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 103-131.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto. Una mirada desde la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 10(2),* 419-434.

Jiménez, M. P., Mejía, H. R., Viveros, K. y Castillo, G. (2006). Análisis de una propuesta de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de una función. Recuperdo el 6 de enero de 2009 en: http://hdl.handle.net/123456789/505

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(3),* 355-3