EXPLORACIÓN DEL TRIÁNGULO EN EL PLANO CARTESIANO

Evodio Jiménez Tapia
Centro de Actualización del Magisterio de Chilpancingo. México
ifadmatematicas@gmail.com, jite1965@hotmail.com

Resumen. El presente artículo, es un análisis del triángulo fundamental con el mediano, este último se encuentra formado por los puntos medios de cada lado del primer triángulo mencionado; para lo anterior, en un primer momento se inicia con el trazo de las líneas notables, encontrando con ellas los puntos de concurrencia: circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro; en un segundo momento, se exploran las líneas trazadas con respecto a los lados y vértices del triángulo (primera tabla) y después, los puntos de concurrencia en relación con su ubicación al interior del triángulo o fuera de él (segunda tabla); y en el tercer momento se plantea un problema referente a la distribución de un terreno triangular en cuatro partes iguales, ahí radica el análisis del trabajo, el cual se resuelve de diversas maneras: con regla y compás, método algebraico, tomando en cuenta las pendientes, con software, teorema de Vazgaz y deducción de la fórmula.
Palabras clave: puntos notables del triángulo, pendiente y punto medio

Abstract. This article is an analysis of the fundamentalf triangle with the medium, the last is formed by the midpoints of ecah side of the firts triangle above; therefore, at firts begins with the stroke of remarkable lines, finding them the points of concurrency: circuncemtre, centroide, orthocenter, and incenter; in a second stage the lines draw with respect to the sides and vértices of the triangle (firts board) and then the points of concurrence in relation to their location within the triangle or outside of this (second board) are explored; and the third time a problema concerning the distribution of a triangular field into four equal parts arises, there reside the anlysis of the work, which is solved in different ways: with ruler and compass algebraic method, taking into account the slope, with software, Vazgaz theorem and deduction of the formula.
Key words: remarkable points of triangle, slope and point middle

Introducción

Para determinar los puntos notables en el triángulo, se inician con la construcción de las siguientes rectas, de acuerdo a López (1987) en su obra Geometría Euclideana, se deberán construir: las mediatrices, bisectrices, alturas y medianas, las cuales se van caracterizando durante su trazo y fortaleciendo en el proceso de enseñanza aprendizaje; posteriormente se plantean problemas para confirmar algunas competencias matemáticas.

Desarrollo

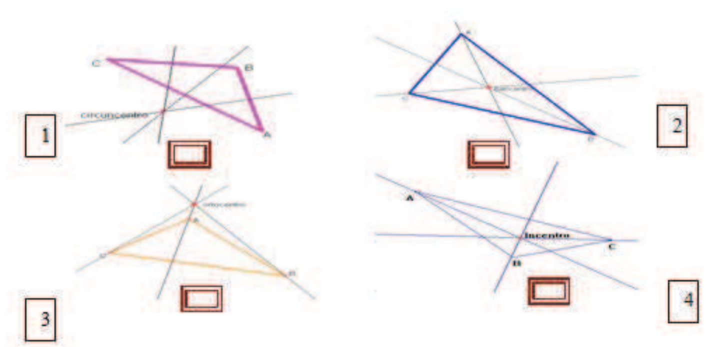


Figura 1

1. Analicen las líneas que aparecen en los triángulos y anoten una ✓ en la tabla frente al triángulo cuando las características sí se cumplan y una **X** cuando no se cumplan.

Características	Las líneas son perpendiculares a los lados del triángulo o a la prolongación de éstos	Las líneas pasan por un vértice del triángulo	Las líneas cortan los lados del triángulo en los puntos medios	Las líneas dividen a la mitad los ángulos del triángulo	Las líneas se cortan en un punto	Las líneas son paralelas a los lados del triángulo	Las líneas cortan los lados del triángulo en una razón de 2 a 1
Triángulo 1 (mediatrices)							
Triángulo 2 (medianas)							
Triángulo 3 (alturas)							
Triángulo 4 (bisectrices)							

Tabla 1

2. Analicen los puntos donde se cortan las medianas, mediatrices, bisectrices y alturas en un triángulo cualquiera y anoten una ✓ donde se cumplan las características señaladas y una X donde no se cumplan.

Características	Siempre se encuentra en el interior del triángulo	Se puede localizar en un vértice del triángulo	Puede localizarse fuera del triángulo	Es el centro de un círculo que toca los tres vértices de triángulo	Es el centro de un círculo que toca los tres lados del triángulo	Es el punto de equilibrio de un triángulo	Está a la misma distancia de los vértices del triángulo	Se encuentra alineado con otros puntos notables del triángulo
Incentro (punto donde se cortan las bisectrices)								
Baricentro (punto donde se cortan las medianas)								
Ortocentro								

(punto donde se cortan las alturas o su prolongación)								
Circuncentro (punto donde se cortan las mediatrices)								

Tabla 2

3. Exploración del triángulo fundamental y el mediano

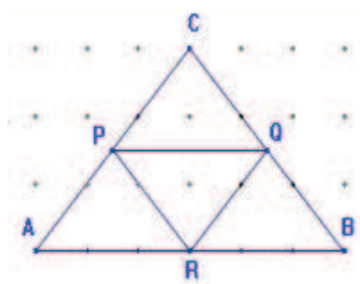


Figura 2

¿El triángulo PQR es semejante con el triángulo ABC?, ¿Cómo es el triángulo PQR en relación con los demás triángulos que están al interior del triángulo fundamental?, ¿Cómo son las rectas entre sí que pasan por los siguientes puntos AC y QR; PQ y AB; BC y PR?, ¿Qué relación guardan los segmentos que unen a los puntos medios en cuanto a magnitud con el tercer lado del triángulo?, ¿Se puede construir el triángulo fundamental (ABC) solamente con el triángulo mediano (PQR)?

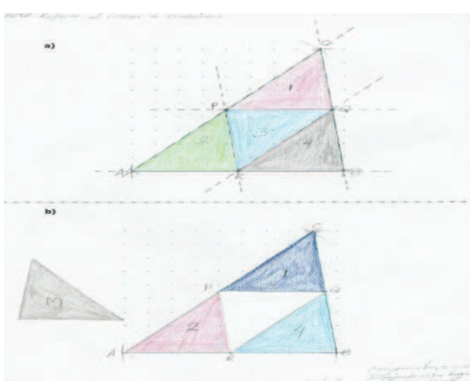


Figura 3

Al triángulo del inciso a, se le prolongaron líneas auxiliares, para comparar visualmente los lados paralelos del triángulo mediano, con respecto a los que pasan por el vértice opuesto; en un segundo momento hicieron uso de las propiedades de los triángulos para afirmar que todos los triángulos eran congruentes.

Al triángulo del inciso b, se le recortó el triángulo mediano para superponerlo en los demás y nuevamente afirmar que todos los triángulos al interior son iguales.

4. El Sr. López, desea que sus cuatro hijos se repartan equitativamente un terreno que tiene forma triangular. El cual posee las siguientes coordenadas de sus puntos medios P(2, -1), Q(9,0) y R(5, 3). ¿Cuáles son las coordenadas del terreno grande que se reparte?

Resolución

a) Regla y compás

Con la regla y compás, según Szklarz y Gutiérrez (2008), y la reflexión propia al trazado se puede construir el triángulo fundamental:

Paso 1: con el compás se toma el segmento PQ y centrando en R, se traza una circunferencia.

Paso 2: con el compás se toma el segmento PR y centrando en Q, se traza una circunferencia.

Observación: las circunferencias se interceptan en dos puntos (12,4) y (6, -4).

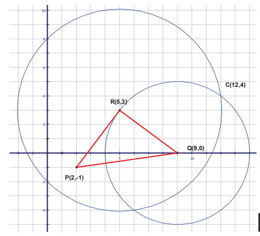


Figura 4

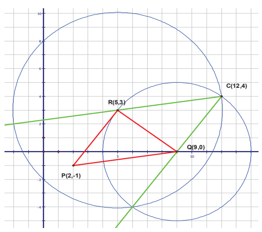


Figura 5

Paso 3. Del punto C(12,4), se trazan dos semirrectas, que pasen por los vértices Q y R

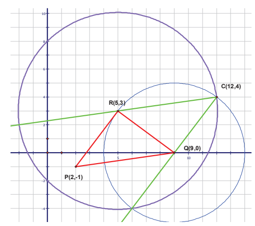


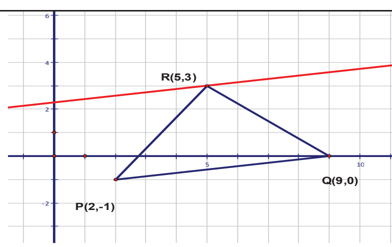
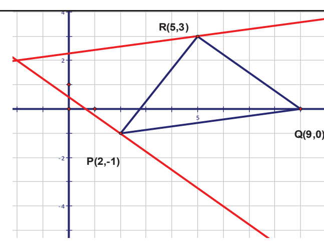
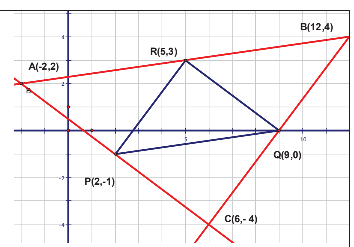
Figura 6

Paso 4. Los puntos que interceptan las dos semirrectas a las circunferencias, son los vértices del triángulo fundamental.

Las coordenadas son: A(-2, 2), B (6, -4) y C(12, 4)

b) Por método algebraico

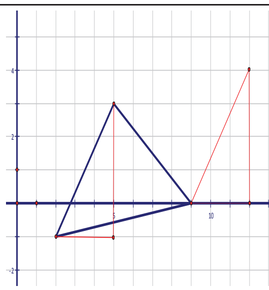
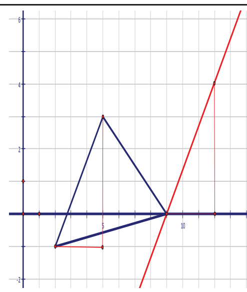
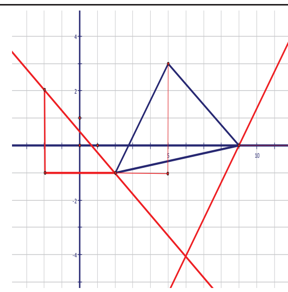
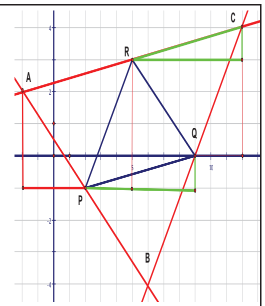
De la Borbolla, F. (1963), plantea que el triángulo fundamental se puede obtener de la siguiente manera

 Figura 7	 Figura 8	 Figura 9
Se determina la ecuación de la recta que pasa por R(5,3) y es paralela a la recta que pasa por el segmento PQ, esta es $y = \frac{x+17}{7}$	Se determina la ecuación de la recta que pasa por P(2,-1) y es paralela a la recta que pasa por el segmento QR, esta es $y = \frac{-3x+2}{4}$	Se determina la ecuación de la recta que pasa por Q(9,-0) y es paralela a la recta que pasa por el segmento PR, esta es $y = \frac{4x-36}{3}$

Por sistema de ecuaciones determina las coordenadas del triángulo fundamental A(-2, 2), B (6, -4) y C(12, 4)

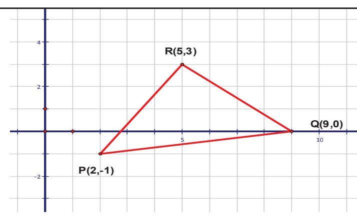
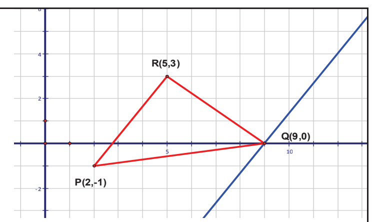
c) Tomando en cuenta las pendientes

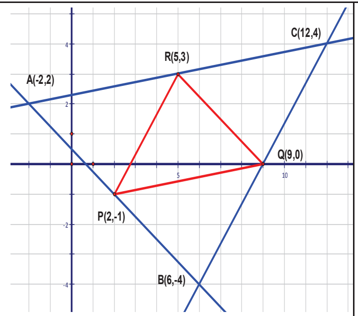
Interpretando el valor de la pendiente consultada en diversos autores como: Kindle (1980); Anfossi (1988); Fuenlabrada y Samuel (2000); Guerra y Figueroa (2004) y otros que se indican en la bibliografía.

 Figura 10	 Figura 11	 Figura 12	 Figura 13
Se toma en cuenta la pendiente de PR y se “traslada” hacia el punto Q.	Se traza una recta que inicia en el punto antes trazado y pasa por Q.	Se hace lo mismo con los demás puntos, siempre tomando el vértice con el lado opuesto.	*Las coordenadas del triángulo fundamental A(-2, 2), B (6, -4) y C(12, 4)*

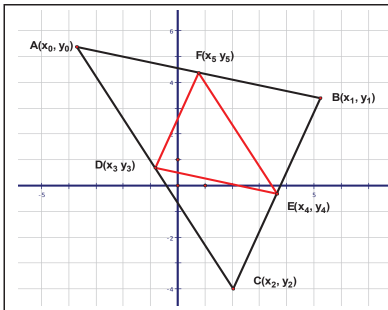
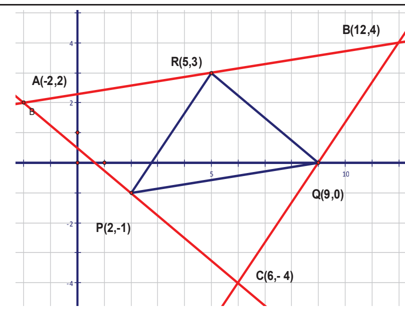
d) Con software

Se utilizó el geometer sketchpad para realizar los trazos requeridos. De acuerdo a las condiciones del problema

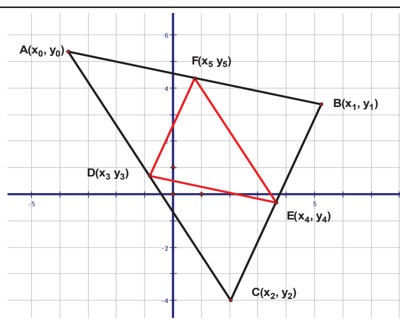
 Figura 14	 Figura 15	 Figura 16
Se grafican los puntos en el plano cartesiano	Se construye el triángulo	Se trazan una recta paralela que pasa por un vértice con respecto a su lado opuesto; lo mismo se hace con los demás vértices

 *Figura 17*	*Las coordenadas del triángulo fundamental A(-2, 2), B (6, -4) y C(12, 4)*

Por el teorema de Vazgaz

 Figura 18	*Fórmulas para calcular las coordenadas de los vértices* $A(x_0,y_0) \to x_0 = x_5 + x_3 - x_4$ $A(x_0,y_0) \to y_0 = y_5 + y_3 - y_4$ $B(x_1,y_1) \to x_1 = x_5 + x_4 - x_3$ $B(x_1,y_1) \to y_1 = y_5 + y_4 - y_3$ $C(x_2,y_2) \to x_2 = x_4 + x_3 - x_5$ $C(x_2,y_2) \to y_2 = y_4 + y_3 - y_5$	 Figura 19
Calcular "A" *Datos: D(2,-1), E(9,0) y F(5,3)* $D(x_3,y_3), E(x_4,y_4)\ y\ F(x_5,y_5)$ $x_0 = 5 + 2 - 9 = -2$ $y_0 = 3 - 1 - 0 = 2$ ***A(-2, 2)***	***Calcular "B"*** *D(2,-1), E(9,0) y F(5,3)* $D(x_3,y_3), E(x_4,y_4)\ y\ F(x_5,y_5)$ $x_1 = 5 + 9 - 2 = 12$ $y_1 = 3 + 0 - (-1) = 4$ ***B(12,4)***	***Calcular "C"*** *D(2,-1), E(9,0) y F(5,3)* $D(x_3,y_3), E(x_4,y_4)\ y\ F(x_5,y_5)$ $x_2 = 9 + 2 - 5 = 6$ $y_2 = 0 - 1 - 3 = -4$ ***C(6, -4)***

Deducción de la fórmula de Vazgaz

 *Figura 20*	*Se relacionan los puntos medios con los extremos, mediante la siguiente fórmula:* $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$; *donde el punto medio tiene las coordenadas* (x_m, y_m) ***Primer paso***: $PM_{\overline{AC}} A(x_0, y_0), D(x_3, y_3)\ y\ C(x_2, y_2)$ *Al sustituir las coordenadas en las fórmulas del punto medio, queda:* $2x_3 = x_0 + x_2, \quad 2y_3 = y_0 + y_2$

Segundo paso:

$PM_{\overline{CB}} C(x_2, y_2), E(x_4, y_4)$ *y* $B(x_1, y_1)$

Al sustituir las coordenadas en las fórmulas del punto medio, queda:

$2x_4 = x_1 + x_2$, $2y_4 = y_1 + y_2$

Tercer paso:

$PM_{\overline{AB}} A(x_0, y_0), F(x_5, y_5)$ *y* $B(x_1, y_1)$

Al sustituir las coordenadas en las fórmulas del punto medio, queda:

$2x_5 = x_0 + x_1$, $2y_5 = y_0 + y_1$

Resumen

1	$2x_3 = x_0 + x_2$	2	$2y_3 = y_0 + y_2$
3	$2x_4 = x_1 + x_2$	*4*	$2y_4 = y_1 + y_2$
5	$2x_5 = x_0 + x_1$,	*6*	$2y_5 = y_0 + y_1$

Con las ecuaciones impares se obtienen:

$x_0 = x_5 + x_3 - x_4$, $x_1 = x_5 + x_4 - x_3$,

$x_2 = x_4 + x_3 - x_5$

Con las ecuaciones pares se obtienen:

$y_0 = y_5 + y_3 - y_4$, $y_1 = y_5 + y_4 - y_3$

$y_2 = y_4 + y_3 - y_5$

Formulario

$x_0 = x_5 + x_3 - x_4$

$x_1 = x_5 + x_4 - x_3$

$x_2 = x_4 + x_3 - x_5$

$y_0 = y_5 + y_3 - y_4$,

$y_1 = y_5 + y_4 - y_3$

$y_2 = y_4 + y_3 - y_5$

Con estas fórmulas se pueden calcular los vértices del triángulo fundamental, utilizando operaciones aritméticas.

Referencias bibliográficas

Anfossi, A. (1988). *Geometría Analítica*. México: Progreso.

Cantoral, R., Farfán R. M., Cordero F., Alanís, J.A., Rodríguez R.A. y Garza A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas

De la Borbolla, F. (1963). *Problemas y ejercicios de geometría analítica.* México: Unión Editorial Hispanoamericana.

Dirección General de Desarrollo Curricular. (2011). *Plan de Estudios 2011 Educación Básica*. México: SEP.

Fuenlabrada, S. (2000). *Geometría Analítica*. México: Mc Graw Hill.

Guerra, M. y Figueroa, S. (2004). *Geometría analítica*. México: Mc Graw Hill.

Jiménez, T.E. (2013). *Plano Cartesiano y funciones*. México: SEG.

Kindle, J. (1980). *Geometría Analítica*. México: Serie Schaum.

López, R. G. (1987). *Geometría euclideana.* México: SEP.

Steen y Ballou (1966). *Geometría Analítica*. México: Edit. Publicaciones Cultural.

Szklarz, Z.E. y Gutiérrez, S.S.E. (2008). *Geometría y trigonometría*. México: Mc Graw Hill.