EL TEOREMA DE PTOLOMEO: DEL ALMAGESTO A LOS TEXTOS DE HOY

José Luis Soto Mungía
Universidad de Sonora. México
jlsoto@gauss.mat.uson.mx

Resumen. Se hace aquí una revisión de las proposiciones geométricas usadas y demostradas por Ptolomeo en la sección de *El Almagesto* titulada "sobre el tamaño de las cuerdas en un círculo". El propósito es comparar las intenciones y motivaciones que revela Ptolomeo en su obra, con las presentaciones de los libros de texto en uso, sobre el teorema conocido actualmente como *Teorema de Ptolomeo.*
Palabras clave: teorema de Ptolomeo, transposición didáctica
Abstract. This article presents a review of the geometrical propositions used and demonstrated by Ptolomy, in the section of the The Almagest entitled "On the size of chords in a circle". The purpose is to compare the intentions and motivations that Ptolomeo reveals in his work, with presentations of textbooks in use, on the theorem now known as Ptolemy's Theorem.
Key words: Ptolomy´s theorem, didactical transposition

Introducción

Posiblemente con sus convicciones filosóficas por delante, Ptolomeo decidió que su obra astronómica cumbre debía llamarse *La Composición Matemática*, pero rápidamente la obra se popularizó bajo el título de *La Gran Composición* y posteriormente, el prestigio adquirido entre los árabes hizo que intitularan la traducción del Griego al Árabe como *Al Magisti*, que significa "El mejor" y que terminó traducido al Latín como *Al Magest*, de donde ha pasado al Español como *El Almagesto*.

En la Sección 10 de este texto, de nombre tan cambiante, Ptolomeo publicó la demostración del teorema que a la postre llevaría su nombre. En lo que sigue pondremos en evidencia que este teorema, presentado actualmente en los libros de texto de Geometría, ver por ejemplo, (Shively, 1982, p. 26) o (Eves, 1969, pp. 154-155), como un teorema de geometría pura, surgió como una herramienta necesaria para resolver un problema práctico y expondremos con detalle la manera como Ptolomeo usa esta herramienta.

El problema general planteado por Ptolomeo

En la Sección 10 del Primer Libro del Almagesto, Ptolomeo se propone construir una tabla que registre los tamaños de las cuerdas que subtienden arcos de circunferencia, que van de 0° a 180°, con incrementos de medio grado. En un modelo astronómico que supone a la tierra como el centro del universo y al resto de los cuerpos celestes girando alrededor de ella, en órbitas circulares o que resultan de combinar trayectorias circulares, una tabla como ésta resulta indispensable para la medición y el cálculo astronómico.

Al más puro estilo griego, el autor se ve obligado a demostrar cada uno de los resultados matemáticos que utilizará en los cálculos. Demuestra así seis lemas de naturaleza geométrica que usará como herramientas. Para referirnos a ellos nos hemos tomado aquí la libertad de numerarlos, aunque en el texto original esta numeración no aparece. El segundo de esos lemas ahora se conoce como el Teorema de Ptolomeo.

Por razones que no están claras, pero parecieran relacionadas con el sistema sexagesimal, el autor divide la circunferencia en 360 arcos, que llamará grados y el diámetro del círculo que utilizará como base del cálculo en 120 partes, que llamará simplemente *partes* del diámetro.

El primer lema

Las cuerdas más fáciles de calcular son aquellas que se pueden construir inscribiendo en un círculo ciertos polígonos regulares, es así que en este lema, construye el pentágono y el decágono, que se ilustra en la Figura 1 y que enuncia en los siguientes términos (Ptolemy, 1952):

… sea el semicírculo ABC sobre el diámetro ADC y centrado alrededor de D y sea la recta DB trazada sobre AC en ángulo recto. Sea DC bisecada en E, y trácese EB; y sea EF trazada igual a EB, y trácese FB. Digo que el segmento FD es el lado de un decágono regular inscrito, y BF aquél de un pentágono (pp. 14-16)

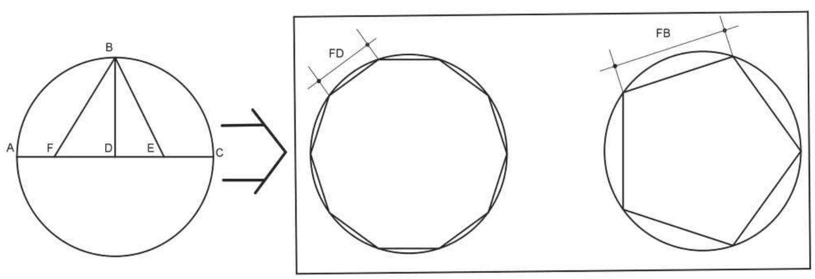

Figura 1

Al igual que en el resto de los lemas, Ptolomeo no se limita a construir los lados de estos dos polígonos regulares y demostrar que están bien construidos; antes de pasar al lema siguiente hace un cálculo de las cuerdas que le interesan y un recuento de las cuerdas que ya puede calcular. Así, obviando la construcción del cuadrado y del hexágono, ya tiene hasta aquí la longitud de las cuerdas que subtienden arcos de 90°, 60°, 72° y 36°, además de las correspondientes a los suplementos de estos ángulos, que puede calcular usando directamente el Teorema de Pitágoras.

El segundo lema

A este lema, conocido actualmente como el Teorema de Ptolomeo, está dedicado el presente artículo. La demostración es escencialmente la misma que puede verse todavía en algunos libros de Geometría, ver por ejemplo (Shively, 1982, p. 26). En otros textos de Geometría, ver por ejemplo (Eves, 1969, p. 154; Hadamard, 2009, p. 237) el teorema es demostrado utilizando una transformación por inversión, una herramienta desarrollada muchos siglos después de la escritura del Almagesto. Ptolomeo enuncia su famoso teorema, en los siguientes términos (Ptolemy, 1952):

Y mostraremos ahora, exponiendo un lema muy útil para esta presente empresa, cómo el resto de las cuerdas pueden derivarse exitosamente a partir de aquellas que ya tenemos.

Para ello, sea un círculo con cualquier tipo de cuadrilátero inscrito ABCD, y trácense AC y BD.

Se quiere demostrar que

rect. AC, BD = rect. AB, DC + rect. AD, BC. (p. 16)

En notación moderna la tesis del teorema diría $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$, lo cual es interpretado ahora como una igualdad aritmética, pero para los griegos significaba que el rectángulo contenido por los segmentos AC y BD era equivalente (en contenido, en área) a los rectángulos contenidos por los segmentos AB y DC junto con el rectángulo contenido por los segmentos AD y BC.

En Ptolomy (1952), el lema aparece ilustrado como en la Figura 2.

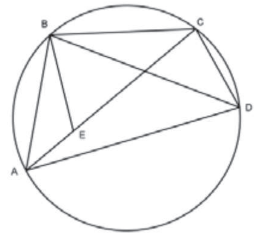

Figura 2

Para la demostración se traza el segmento BE de tal modo que ÐABE = ÐDBC (ver Figura 2); de aquí se desprende la semejanza de los triángulos AEB y DCB por un lado, y la semejanza de los triángulos ABD y EBC por otro. Las relaciones entre segmentos correspondientes que se desprenden de estas semejanzas, conducen a la relación entre segmentos establecida en el teorema. Pero independientemente de la demostración, el interés de Ptolomeo, como se verá posteriormente, pareciera centrado en la relación aritmética entre las seis cuerdas que relaciona el teorema:

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC,$$

porque conociendo cinco de ellas puede calcular la restante.

El trazo del segmento BE, para que los ángulos ABE y DBC resulten iguales, es fundamental para la demostración, porque de aquí se desprende la semejanza entre los triángulos ABE y DBC. Se trata del mismo artificio que muestran algunos textos modernos y que hacen lucir la demostración muy lejos de la heurística. Pero independientemente de la demostración, el interés de Ptolomeo, como se verá posteriormente, pareciera centrado en la relación aritmética entre las seis cuerdas que relaciona el teorema ($AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$); porque conociendo cinco de ellas puede calcular la restante. Ciertamente que el teorema tiene relación con otros temas geométricos, como lo ilustran los libros modernos: el Teorema de Pitágoras, el seno de la suma de dos ángulos y la razón áurea, pero estos temas se ligaron mucho tiempo después a este resultado.

El tercer lema

La intención de Ptolomeo (Ptolomy, 1952) queda más clara en el presente resultado, en donde su teorema es usado por primera vez:

Ahora que esto ha sido expuesto, sea el semicírculo ABCD sobre el diámetro AD, y desde el punto A trácense los dos segmentos AB y AC, y sea dada la longitud de cada uno de ellos en términos de las 120 partes del diámetro; y sea BC trazada.

Digo que BC está también dado. (p. 17)

Ptolomeo divide la circunferencia con la que está trabajando en 360 arcos iguales y su diámetro en 120 partes iguales. Para distinguir unas unidades de otras, usaremos dos notaciones diferentes; cuando queramos referirnos a las partes de la circunferencia, usaremos la notación común usada para denotar grados y cuando hagamos referencia a las partes del diámetro usaremos una ^{p} en lugar de °. Por ejemplo, $1^{p}\ 34'\ 15''$ significará $1+\frac{34}{60}+\frac{15}{3600}$ partes como las 120 en las que se ha dividido el diámetro. Aunque no expone con detalle las razones de estas subdivisiones, es claro que subdividiendo el círculo y el diámetro de esta manera, se facilitan los cálculos en el sistema sexagesimal que usa. Es posible también que haya pensado en la subdivisión del diámetro en 120 partes para que la medida de las cuerdas que subtienden ángulos de un grado resulten próximos a la unidad tomada sobre el diámetro.

En la demostración, la igualdad $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$ es aprovechada directamente para establecer que BC puede ser calculada. Puesto que ABCD es un cuadrilátero inscrito, y como AB, AC y el diámetro AD están dados y las cuerdas BD y CD pueden calcularse usando el Teorema de Pitágoras (ver Figura 3), entonces BC es la única incógnita y puede ser despejada.

Con este resultado puede calcular la cuerda que subtiende un ángulo de 12°, puesto que $12° = 72° - 60°$.

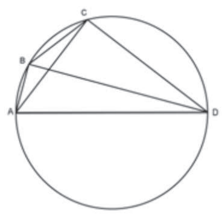

Figura 3

El cuarto lema

El siguiente resultado expuesto por Ptolomeo no usa su teorema, pero lo enunciamos aquí porque es importante para entender los preparativos del cálculo de cuerdas, Ptolomeo (Ptolomy, 1952) afirma:

De nuevo, dada cualquier cuerda en un círculo, propóngase encontrar la cuerda de la mitad del arco de la cuerda dada.

Y sea el semicírculo ABC sobre el diámetro AC, y sea CB la cuerda dada. Y sea el arco bisecado en D, y trácense AB, AD, BD, y DC, y sea DF perpendicular a AC trazado desde D.

Digo que

$$CF = \text{mitad } (AC - AB)$$

… Pero cuando la perpendicular DF se traza en el triángulo rectángulo ACD, como consecuencia los triángulos rectángulos ACD y DCF tendrán sus ángulos respectivamente iguales [Euclides, VI, 8], y

$$AC : CD :: CD : CF. \text{ (p. 17)}$$

Ptolomeo no utiliza aquí el lema anterior para calcular AB, porque puede hacer el cálculo directamente del Teorema de Pitágoras, aprovechando que la cuerda AC es un diámetro. El resultado está basado en la construcción de los triángulos congruentes ABD y AED y de los triángulos semejantes ADC y DFC, que lo conduce a la igualdad $AC/CD = CD/CF$ y de aquí a la ecuación, que en la notación actual escribiríamos como $CD^2 = AC \cdot CF$. Y como AC está dado y CF ha sido calculado, entonces CD puede ser calculada. El resultado está ilustrado en la Figura 4. Aplicando repetidas veces este lema, puede calcular cuerdas que subtienden arcos de 6°, 3°, $(1\frac{1}{2})°$ y $(\frac{3}{4})°$, a partir de la que subtiende un arco de 12°.

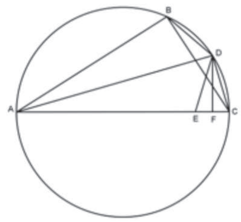

Figura 4

El quinto lema

Aquí, el Teorema vuelve a usarse para demostrar que si se tiene un arco subdividido en dos partes y se conocen las cuerdas que subtienden estas partes, entonces puede calcularse la cuerda que subtiende el todo. Ptolomeo (Ptolomy, 1952) establece este resultado en los siguientes términos:

De nuevo sea el círculo ABCD sobre un diámetro AD con centro en F. Y a partir de A córtense dos arcos consecutivos, AB y BC; y sean trazadas las cuerdas dadas AB y BC que los subtienden.

Digo que si trazamos AC, entonces AC será también dado. (p. 18)

La Figura 5 ilustra la construcción que se requiere para demostrar este lema.

Como puede verse en esta figura, si podemos calcular la cuerda CD, entonces el lema estaría prácticamente demostrado, porque AC resultaría de aplicar el Teorema de Pitágoras al triángulo ACD, puesto que AD es un diámetro. En el cálculo de CD se aplica el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero inscrito BCDE. En este cuadrilátero, están dados: la cuerda BC por hipótesis y BE por ser un diámetro, mientras que pueden calcularse usando el Teorema de Pitágoras: BD, DE y CE. Se tiene así que en la igualdad

$$CE \cdot BD = BC \cdot DE + BE \cdot CD,$$

la única medida desconocida es CD y por lo tanto puede ser calculada.

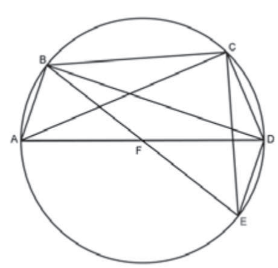

Figura 5

El sexto lema

A pesar de toda la herramienta acumulada hasta aquí, todavía los resultados obtenidos son insuficientes para calcular cuerdas que subtiendan arcos de $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$, porque cualquier intento enfrentaría el problema de la trisección, imposible de resolver. Por ello establece un último lema, que lo conducirá a calcular una aproximación de la cuerda que subtiende un arco de un grado. Bosquejamos aquí este lema y la manera como lo usó.

El resultado está establecido en los siguientes términos (Ptolomy, 1952):

Digo que si dos cuerdas desiguales son inscritas en un círculo, la más grande guarda con la menor una razón menor que la que el arco sobre la más grande, guarda sobre el arco de la menor.

Sea el círculo ABCD; y sean inscritas en él cuerdas desiguales, AB la menor y BC la mayor.

Digo que

cuerda BC : cuerda AB < arco BC : arco AB (p. 19)

Escrito en nuestro lenguaje, este lema dice que si tenemos dos arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$, y sus respectivas cuerdas AB y BC (ver Figura 6), donde AB < BC, entonces

$\frac{BC}{AB} < \frac{\bar{B}\bar{C}}{\bar{A}\bar{B}}$

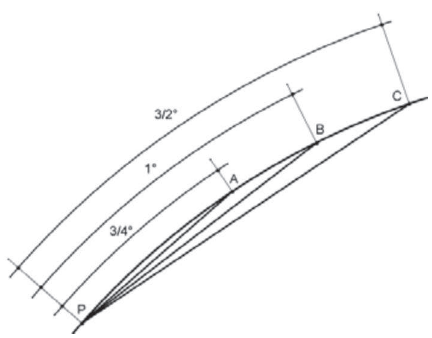

Figura 6

Establecida esta desigualdad, se puede acotar la cuerda PB por la derecha de la manera siguiente:

$$1\tfrac{1}{3} = \frac{\bar{P}\bar{B}}{\bar{P}\bar{A}} > \frac{PB}{PA}$$

O bien,

$$PB < 1\tfrac{1}{3}(PA)$$

Similarmente se puede acotar la cuerda PB por la izquierda:

$$1\frac{1}{2} = \frac{\bar{P}\bar{C}}{\bar{P}\bar{B}} > \frac{PC}{PB}$$

Que puede también escribirse como,

$$PB > \frac{2}{3}(PC)$$

Pero Ptolomeo ha calculado ya las cuerdas de $\left(\frac{3}{4}\right)^{\circ}$ y $\left(1\frac{1}{2}\right)^{\circ}$, obteniendo PA= 0^{p} 47´ 8´´ y PC = 1^{p} 34´ 15´´, por lo que, entonces,

$$(1^{p}2'50'') \approx \frac{2}{3}(PC) < PB < 1\frac{1}{3}(PA) \approx (1^{p}2'50'')$$

Y concluye de aquí, que una buena aproximación para la cuerda de un grado es

$PB \approx (1^{p}2'50'')$

Y es así como puede calcular la tabla, no sin antes precisar que si hubiera algún error de impresión en la tabla, el lector podrá corregirla, puesto que tiene ya todos los elementos con los que se ha construido.

Conclusiones

El recuento del texto de Ptolomeo revela que su famoso teorema fue propuesto en un contexto completamente distinto al que utilizan los libros de texto actuales de Geometría. Ciertamente que el cálculo de cuerdas es un tema que ya no está vigente en lo que se refiere a sus aplicaciones, pero mostrar el Teorema de Ptolomeo como un resultado sin más contexto que el de su consistencia geométrica, tiene sus propias repercusiones en la enseñanza de la Geometría, sobre todo en las escuelas de ciencias, donde se supone que estamos formando cuadros científicos para que puedan generar resultados científicos. Nada pareciera más lejano a la matemática como actividad humana, que la presentación de resultados, cuya validación depende de una idea genial, casi siempre muy lejana al pensamiento matemático de nuestros estudiantes. Chevallard (2000) ha llamado "transposición didáctica" al proceso de transformación de los saberes sabios en saberes a enseñar y en este caso, como en pocos, este proceso de transformación es radical. ¿Cuál debiera ser la relación entre la forma que adquiere el saber sabio y la forma que presenta el saber a enseñar? El mismo Chevallard reconoce la complejidad de esta pregunta y el Teorema de Ptolomeo seguramente no alcanza para responderla. Repensar esta transposición es a mi juicio, una parte importante del trabajo docente, porque aún cuando el contexto histórico se considerara inapropiado, esto no tendría por qué traducirse en ausencia de contexto.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (2000). *La Transposición didáctica: del Saber Sabio al Saber Enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías (Tomo I)*. México: Editorial Hispano-Americana

Hadamard, J. (2009). *Lessons in Geometry: I. Plane Geometry*. Rhode Island: AMS-EDC

Ptolemy, C. (1952). *The Almagest.* In Ptolemy, Copernicus, Kepler *Great Books of the Western World (16).* Chicago: Encyclopaedia Britannica.

Shively, L. (1982). *Introducción a la Geometría Moderna*. México: CECSA